921870

高等学校试用教材

流体力学与叶栅理论

江苏工学院　刘天宝
甘肃工业大学　程兆雪
编

GAO DENG XUE XIAO JIAO CAI



机械工业出版社

9 921870

O35
0213

高等学校试用教材

流体力学与叶栅理论

江苏工学院　刘天宝
甘肃工业大学　程兆雪　编



机械工业出版社

本书共分十五章，主要阐述不可压缩流体运动规律及不可压缩运动流体与固体间的相互作用、不可压缩流体绕机翼和叶栅流动规律及计算。在气体动力学基础一章简要地介绍了可压缩流体运动的基本概念与流动特性。

本书是《水力机械》专业的专业基础教材，也可供从事水力机械设计与科学研究的工程技术人员参考。

流体力学与叶栅理论

江苏工学院　刘天宝
甘肃工业大学　程兆雪　编

*

责任编辑：王世刚　责任校对：丁丽丽
责任印制：尹德伦　版式设计：王　颖

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）
（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）
重庆印制一厂印刷
新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 ·印张 24 3/4 ·字数 605 千字
1990年10月重庆第一版·1990年10月重庆第一次印刷
印数 0,001—1,500 ·定价：4.90元

*

ISBN 7-111-02319-6/TK·91（课）

前　　言

流体力学及叶栅理论是《水力机械》专业的一门重要的专业基础课程。本书是根据《水力机械》专业指导委员会核准的编写大纲编写的。

针对水力机械设计制造专业的需要，本教材主要阐述不可压缩流体运动的基本规律、不可压缩运动流体与固体间的相互作用规律，以及不可压缩流体绕流机翼和叶栅流动的基础理论与基本解法。最后在气体动力学基础一章，介绍可压缩流体运动的基本概念及流动特性。

各章均选编了一定数量的例题及习题，以训练学生运用基本理论去分析、解决实际问题的能力。通过本教材的学习，为学习专业课作好准备、也为将来从事水力机械的设计制造和科学研究打下必要的理论基础。

本书由江苏工学院刘天宝与甘肃工业大学程兆雪共同编写。书中第五、六、七、十、十一、十五章由程兆雪编写，其余几章则由刘天宝编写。

江苏工学院施卫东同志为本书部分章节绘制了图稿，在此我们表示衷心感谢。

限于编者水平，书中错误与不妥之处，恳切希望读者批评指正。

编　者

1989.12

目　　录

Ⅱ

第一章　流体及其力学性质

本章主要建立流体的概念并讨论几个与其有关的力学性质。

第一节　流体及流体力学

在客观世界中物质存在的形式可以分为两大类：固体与流体。固体为大家所熟知，当它受到切向力的作用时，一般将沿切线方向发生微小变形，而后达到平衡，同时变形停止。这时在沿切线方向的截面上将承受切应力的作用，即是说，处于静止状态的固体，可以承受切应力的作用。而流体（如水、空气等）则只要有切应力（不论这种应力多么微小）出现，它就将连续不断地发生变形，而无法静止。因此流体可以说是在静止状态下不能承受切应力的物质。相对于固体来说，流体具有容易变形并表现为流动的特性。也可以说，流体具有易流动的特性。

流体通常指的是液体和气体两类。但鉴于水机专业的需要，本书中所涉及的流体主要指液体。流体力学是研究流体平衡和运动的规律以及它与固体间的相互作用规律的科学。流体力学既研究流体平衡的条件及其压力分布的规律，也研究流体流动的速度分布和压力分布的规律，同时还研究静止流体与固体间的相互作用规律，以及流体绕过固体或流过固体通道时其与固体间的相互作用与能量损失的规律等。

流体力学在生产技术部门中有着非常广泛的应用，目前已很难找出一个技术部门，它与流体力学不存在着这样或那样的联系了。诸如在航空、航海、石油、化工、水利工程与动力机械等部门中都会遇到流体力学问题，需要用流体力学知识去分析、去解决它们。对水力机械而言，为制造出具有所要求的技术指标和良好水力性能的水泵、水轮机，必须正确地设计叶轮、导叶等的形状。为此，首先又必须了解和掌握流体在其中流动的规律．因此流体力学是水力机械专业的一门主要专业基础课程．

第二节　流体的连续介质假定

流体力学研究的是流体的宏观力学行为，而流体又是由分子组成的，因此处理流体运动的一个很自然的方法是从考虑每个分子的运动出发，经过统计平均得出宏观力学量的变化规律．但由于统计理论还不够完善，尚不能为流体力学提供充分的理论依据，故此法虽然直接、自然，但却难以实现．另外，也由于实际工程上所涉及的水力元件的尺寸远比分子间距大，要求掌握的是大量分子的统计平均宏观行为，而不是个别分子的微观运动规律（如桌上放一杯水，从微观上看，水分子始终在不停地运动；但从宏观的角度看，水则处于静止状态。由工程实用的观点看来，显然只有后者才有意义）．所以人们甩开了流体的离散的分子结构，提出了流体的连续介质假定。

连续介质假定认为：流体是连续地、无空隙地充满它所占据的空间的一种介质，在这种连续介质中到处都具有流体的一切属性。

建立在连续介质假定基础上的流体力学，在各工程技术部门中获得了极大的成功，这有力地支持了这个假定。

流体的宏观力学特性，如平均密度、平均压力与速度等，是随下列因素而变化的：（a）所考虑流体块的大小、（b）位置、（c）时间。

就（a）来说，如果流体块大时，由于不均匀性，流体特性是随体积而变化的。让流体块体积变得远小于流动特征体积时，流体特性将趋向一个稳定值（这是由于在流体块体积充分小时，其特性趋于均匀的结果），若流体块体积继续缩小，小过某一极限体积后，流体特性将产生强烈的、不规则的变化（这是由于流体块体积小到分子运动的尺寸，引起体积内分子数的统计增减所致）。故只在流体小块尺度，远小于流动特征尺度，又远大于分子运动尺度时，流体特性才是稳定的。把流体特性稳定不变时的流体小块，就叫做流体质点，它是考察流体运动的小单元体。

现仅以密度这一流体特性为例，说明其随体积变化的情形。图1-1a表示流体中一点A（x,y,z）处的一个流体小体积δV，它包含质量δm。让δV收缩到A点时，$\rho=\frac{\delta m}{\delta V}$随$\delta V$变化的情况如图1-1b中曲线所示。由曲线看出：当$\delta V$具有流动特征尺度$\delta V^1$的量级时，$\rho$随$\delta V$而变化。当$\delta V$缩小至远小于$\delta V^1$后，$\rho$渐趋于一定值。但存在极限体积$\delta V^0$：当$\delta V$小于$\delta V^0$时，$\rho$值开始猛烈上下摆动，无法确定出一个一定大小的$\rho$值来了。$A$点处流体密度即可定义为小体积$\delta V$内的平均密度：

$$\rho=\frac{\delta m}{\delta V} \qquad (\delta V^0 \ll \delta V \ll \delta V^1)$$

这个体积δV也就是流体质点的体积大小。由于宏观上（与流动特征尺度比较）它很小，可以近似看成几何上没有维度的一个点，在算式的极限过程中常用“0”代表。

采用了这一假定后，在研究流体的宏观运动时，就可以用连续充满整个空间的流体质点的运动问题，来代替大量的离散分子的运动问题了。如果将流体质点的特性看作该时刻流体质点所在空间点上的特性时，则此特性可借场的方法表出。这样一来，密度、压力、速度等这些流体动力特性就都可表示为时间和地点的连续函数了。这使人们可应用数学分析这一强有力的工具来研究流动。因此可以说，连续介质假定是流体力学中第一个带有根本性的假定。

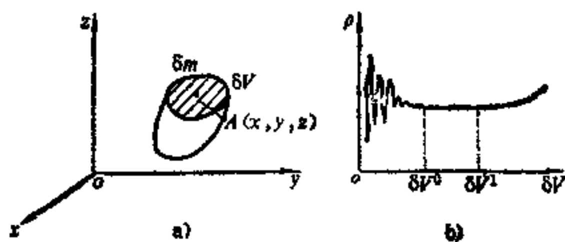


图1-1　流体密度随体积而变化

在某些特殊问题中连续介质假定也可以不成立。例如外层大气里，那里的空气稀薄，分子间距达到流动特征尺度的量级，在研究那里的飞行问题时，空气不能再当连续介质处理了。

第三节　流体的惯性

流体象固体一样具有惯性，这一性质（如在物理学中讨论过的那样）是用质量来度量的。

流体作为连续介质是连绵一片的，在研究它的平衡与运动时，常取出某一隔离的流体小块作为考察对象，因此引进密度来表示流体的惯性对今后的讨论是方便的。

流体单位容积中所含流体质量的多少叫作密度。考虑围绕空间某点的流体小体积δV，其中所含流体质量为δm，当δV趋向无穷小时，比值$\delta m/\delta V$的极限为：

$$\rho=\lim_{\delta V\to 0}\frac{\delta m}{\delta V}$$

ρ叫作空间该点处的流体密度，密度的单位为kg/m^3。

如果流体是均质的，则流体密度为：

$$\rho=\frac{m}{V}$$

式中　m——流体质量；

　　V——流体体积。

显然对均质流体，ρ在整个流体中为常数，对非均质流体，则ρ随流体中的位置而变。

流体具有质量，因而在地球上要受到重力的作用。流体所受重力作用的大小，常采用重度来表示。

单位容积内流体所受重力作用的大小叫作流体的重度，用记号γ（γ的单位为N/m^3）表示：

$$\gamma=\lim_{\delta V\to 0}\frac{\delta G}{\delta V}$$

式中　δV——流体小体积；

　　δG——小体积流体所受的重力。

由于　$\delta G=\delta mg$

将之代入上式即得重度与密度的关系：

$$\gamma=\rho g \tag{1-1}$$

式中　g——重力加速度。

从式（1-1）容易看出，对均质流体，γ在整个流体中为常数，对非均质流体，则γ随其在流体中位置而变化。

流体的密度与重度，是随温度与压力而变化的。但对液体，这个变化一般很小，可忽略不计。

表1-1列出了在常温、标准大气压下，几种常见均质流体的密度与重度值。

表1-1　常见流体的密度与重度

流体名称	密度/($kg\cdot m^{-3}$)	重　度/($N\cdot m^{-3}$)
蒸馏水	1000	9806
海　水	1020～1030	10000～10100
普通汽油	700～750	6860～7350
石　油	880～890	8630～8730
润滑油	890～920	8730～9030
酒　精	790～800	7750～7840
水　银	13560	132969
铁　水	7000	68600
空　气	1.22	11.96
水蒸汽	0.804	7.88

第四节　流体的压缩性及膨胀性

流体随压力的增加而体积缩小，随温度的增高而体积胀大的属性，叫作流体的压缩性及膨胀性。

一、液体的压缩性与膨胀性

（一）液体的压缩性

液体的压缩性用体积压缩系数来表示。在温度不变，而压力升高一个单位时，液体体积的相对缩小值，即称为液体的体积压缩系数，用κ（κ的单位为Pa^{-1}）表示：

$$\kappa=\frac{-dV/V}{dp} \tag{1-2}$$

式中 dp——压力的增值；

V——液体原来体积；

dV——液体体积增量，负号将使κ取正值。

由式（1-2）可看出，对同样的压力增值dp，若液体的κ值大，则其体积的相对缩小量$-dV/V$较大，说明该液体较易压缩；κ值小的液体，其体积的相对缩小量$-dV/V$也较小，说明这种液体较难压缩。应该指出，κ的值除随液体种类而异外，它还随压力与温度而变化。

工程技术上还常引用液体的体积弹性模量来表示液体压缩性的大小。液体体积弹性模量定义为其体积压缩系数的倒数，用E（E的单位为Pa）表示：

$$E=\frac{1}{\kappa} \tag{1-3}$$

从式（1-3）知，E值与液体压缩性大小的关系刚好和κ相反，即E值大的液体较难压缩，E值小的液体反较易压缩。显然E值也是随液体种类、压力与温度而变化的。表1-2列出了水的E随压力与温度的变化情况。

由下表看出，水的E值很大，即它的压缩性很小（0℃、5×0.1MPa的水，压力每升高0.1MPa，其体积约改变万分之零点五），其他液体情况也是类似。所以通常当压力变化不大时，是不计液体的压缩性的。但当压力改变很大（如水下爆炸或水击）时，则必须计及它的压缩性。

［例题1-1］ 压力表校正器（图1-2）中活塞直径$d=1cm$，手轮的丝杠螺距$t=2mm$，在0.1MPa压力下装入体积$V=200L$的工作油液，为了造成200atm的表压力，试求手轮需要转动的圈数n。

假定油液体积压缩系数的平均值可取为

$$\kappa=0.466\times10^{-9}\frac{1}{Pa}$$

表1-2 水的体积弹性模量E/（GPa）

温度/℃ \ 压力/(0.1MPa)	5	10	20	40	80
0	1.85	1.86	1.88	1.91	1.94
6	1.89	1.91	1.93	1.97	2.03
10	1.91	1.93	1.97	2.01	2.08
15	1.93	1.96	1.99	2.05	2.13
20	1.94	1.98	2.02	2.08	2.17

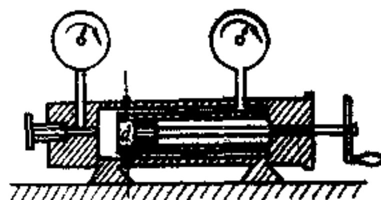


图1-2 压强表校正器

［解］ 根据题意知$dp=200\times1.013\times10^5Pa=202.6\times10^5Pa$由（1-2）式可得油液需要减小的体积为：

$$-dV=\kappa V dp$$

另一方面，根据手轮螺距及活塞面积可得油液减小的体积为：

$$-dV=\frac{\pi}{4}d^2tn$$

由此可得手轮转动圈数为：

$$n=\frac{4\kappa V\mathrm{d}p}{\pi d^2t}=\frac{4\times0.466\times10^{-4}\times0.2\times10^{-3}\times202.6}{\pi\times10^{-4}\times2\times10^{-3}}=12 \quad (答)$$

（二）液体的膨胀性

液体的膨胀性可用温度膨胀系数表示。当压力不变时，温度升高一度所引起的液体体积的相对增加值，称为液体的温度膨胀系数，用α（α的单位为K^{-1}）表示：

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}V/V}{\mathrm{d}t} \tag{1-4}$$

式中 $\mathrm{d}t$——温度的增量；

V——液体温升前体积；

$\mathrm{d}V$——温升所引起的体积增量；

$\mathrm{d}V/V$——温升所引起的体积相对增加值。

α值对不同液体不一样，并且它还随压力与温度而变化。水的α值随压力、温度变化情况列于表1-3内。

表1-3 水的温度膨胀系数$\alpha/(10^{-6}K^{-1})$

压力/(0.1MPa) \ 温度℃	1～10	10～20	40～50	60～70	90～100
1	14	150	422	556	719
100	43	165	422	548	704
200	72	183	426	539	—

由表1-3看出，当温度低于50℃时，水的α值随压力增加而增大；当温度高于50℃时，α值却随压力的增加而减小。由表还可看出，当一个大气压时，常温下（10～20℃）温升一度，水的每单位体积只增加万分之一点五。因此，在工程实用上，当温度变化不大时，不考虑它的膨胀性。对其他液体也是如此。

二、气体的压缩性与膨胀性

在一般情况下，气体的体积受压力和温度变化的影响很显著。它的压缩性与膨胀性可用上述系数法表示，但也可用方程式更清晰地表示。在通常的压力与温度范围内的气体，可作完全气体处理（如$p<1$MPa、240K$<T<$2000K的空气）。这时气体的体积，温度和压力，可用克拉贝隆状态方程表示：

$$pv=RT \tag{1-5}$$

式中 p——气体的压力；

v——单位质量气体体积；

R——气体常数；

T——气体的热力学温度。

由状态方程（1-5）知：当温度不变时，气体体积与压力成反比。压力增加一倍，体积就减小为原来的一半；当压力不变时，体积与温度成正比。温度每升高一度，气体体积就增加0℃时体积的1/273。

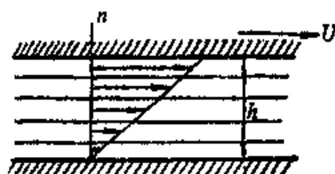
气体体积很容易受温度、压力影响而改变其大小。但当温度和压力变化很小（如通常流动速度小于50m/s的气流）时，体积的变化也可忽略不计，此时气流遵循的规律与液流相同。

流体（包括液体与气体）运动过程中，由于压力、温度等因素的变化而引起流体体积的改变的这个性质，可统称为流体的压缩性。通过以上讨论，可以看出，流体都具有压缩性，但对液体或低速运动之气体，在一般情形下可近似视为不可压缩。这样根据压缩性，可将流体分成可压缩流体和不可压缩流体两大类。在流体力学中，对这两类流体的运动，是用不同的方法处理的。应该强调的是，实际流体都具有或大或小的压缩性，而不可压缩流体只是实际流体在一定条件下的近似模型。

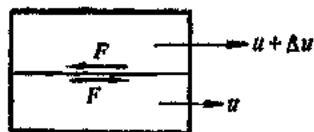
第五节 流体的粘性

一、粘性的实质

设有两块被流体所分开的平行平板，其间距为h。其中，上面一块在它自己的平面内以等速U向右运动，而下面一块静止不动（图1-3a）。把二板间整个流体看成是由无数无限薄的、平行于平板的流体层所组成，每层厚度记为Δn，n表示平板法线方向。观察表明：毗邻平板的流体层粘附于平板，其速度和平板一样，上层为U，下层为零，中间各流体层速度u沿法线n方向呈线性分布。这说明流体层与层之间存在相对运动。



a)



b)

图1-3 平行平板间的粘性流动

在各流体层中，任取二相邻的流层（图1-3b），上层运动速度$u+\Delta u$、下层运动速度为u。显然上流体层在下流体层上以相对速度Δu滑过。由于流体分子力的作用，速度快的流层对慢的流层产生一个拖力F；而速度慢的流层对速度快的流层也有一个反作用力F，称为阻力。拖力与阻力这是一对大小相等、方向相反的力，通过二相邻流层的接触表面分别作用在慢层与快层上。因为这一作用过程很类似于发生在固体间的摩擦，且过程又发生在流体内部，故通常把这一对力叫作内摩擦力，它力图阻止流体各部分间的相对运动。

可见，当流体各部分之间有相对运动出现时，在相对运动的各部分流体间就会产生内摩擦力，以阻止这种相对运动。流体的这种阻止其各部分之间进行相对运动的特性，就叫作流体的粘性或粘滞性。实际流体或多或少都具有一定粘性。

由上所述可知，凡流体皆有粘性，即在流动流体中会出现阻止流动进行的内摩擦力，为维持流动就必须克服这种摩擦阻力、消耗一部分能量。所以粘性是流体流动时，产生能量损失的根本原因。

二、牛顿粘性公式

流体流动时，出现在流体内相对运动各部分间的内摩擦力F，和哪些因素有关、如何计算它的大小，这就是我们在这段里要讨论的问题。

在公元1687年，牛顿第一个为探讨上述问题，做了一个简单而著名的实验。通过实验，建立了内摩擦力F的计算公式。

牛顿做的，就是如图1-3a所示的那样一个实验。实验结果表明：内摩擦力F和上板的运

动速度U成正比，和邻层的接触面积A成正比，而和两板间的距离h成反比，即

$$F \propto A\frac{U}{h}$$

写成等式则

$$F=\mu A\frac{U}{h} \tag{1-6}$$

式中 μ——比例系数（对不同流体其值也不一样），称为（动力）粘度。

式（1-6）双边同除以接触面积A，则得到出现在流层单位接触面上的内摩擦力——内摩擦切应力（简称切应力）τ的算式

$$\tau=\mu\frac{u}{h} \tag{1-7}$$

式中 u/h——沿流速垂直方向n单位长度上的速度增量，即速度梯度。

在上述情况下，因流速分布均匀，u/h可代以更一般的速度梯度表达式$\frac{du}{dn}$，故式(1-7) 可写成更普遍的形式：

$$\tau=\mu\frac{du}{dn} \tag{1-8}$$

上式叫做牛顿粘性公式，也称为牛顿内摩擦定律。

一般情况下，即使流体流动速度并不按线性规律（均匀）变化（如图1-4a所示），牛顿粘性公式（1-8）仍可被推广使用，只是常写成如下形式：

$$\tau=\pm\mu\frac{du}{dn} \tag{1-9}$$

式中正负号，是为了能使τ永取正值而置。$\frac{du}{dn}$为正时，取“+”号；$\frac{du}{dn}$为负时，取“－”号。

牛顿粘性公式是流体力学中的一条重要的基本关系式，也把它叫做流体力学的本构方程式。由式看出，对同一种流体（μ一定），当速度梯度大时，切应力（从而摩擦阻力）就大，则能量损失也大；当速度梯度小时，切应力就小，则能量损失也小。

牛顿粘性公式还可表示成另外一种形式——流体微团角变形速度的形式。设在运动流体中取出一正方形流体微元截面，如图1-4a中的阴影部分$abcd$所示。由于截面上、下边界处速度分别为$u+du$和u，经无限小时间间隔后，原正方形流体微元截面$abcd$变形成平行四边形$a'b'c'd'$（图1-4b），原直角$\angle abc$变成锐角$\angle a'b'c'$，减小了一个无限小角度$d\varphi$，于是

$$d\varphi \approx \mathrm{tg}\, d\varphi=\frac{du\,dt}{dn}$$

则

$$\frac{d\varphi}{dt} \approx \frac{du}{dn}$$

将上式代入牛顿粘性公式得：

$$\tau=\mu\frac{d\varphi}{dt} \tag{1-10}$$



图1-4 流体微元平面的变形

这就是牛顿粘性公式的又一形式。式（1-10）说明切应力与流体微团角变形速度成正比。

三、粘度

牛顿粘性公式中，比例系数μ叫做（动力）粘度。由式（1-9），对不同流体$\frac{du}{dn}$一样时，μ大的流体，τ也大，因而流动遭遇的阻力大，流动较困难，我们就说这种流体的粘性较大。因而μ的大小是流体粘性的量度。

以后我们还常用到另一粘度（运动粘度），它是μ与密度ρ的比值，用ν表示：

$$\nu=\frac{\mu}{\rho}$$

不难看出，μ的量纲是$L^{-1}MT^{-1}$，而ν的量纲则为L^2T^{-1}. 由于在μ的量纲中包含了动力学要素，而在ν的量纲中则只包含运动学要素，为了不致混淆把μ叫做动力粘度，而ν叫做运动粘度。

μ与ν的现行单位分别为$Pa\cdot s$与m^2/s. 但它们的物理学单位（即c·G·s单位）至今仍在使用，现分别列出：泊（Poise）$=\frac{dyn\cdot s}{cm^2}$、斯（Stokes）$=\frac{cm^2}{s}$。两种单位之换算如下：

$$1Pa\cdot s=10P$$

$$1\frac{m^2}{s}=10000St$$

粘度的值首先依赖于流体性质.对粘性小的流体之粘度，如0.1MPa压力、20℃时的水和空气的动力粘度μ，分别为$1.005\times10^{-3}Pa\cdot s$、$18.08\times10^{-6}Pa\cdot s$；运动粘度$\nu$分别为$1.007\times10^{-6}m^2/s$、$15\times10^{-6}m^2/s$。粘性大的流体之粘度值，如甘油在0.1MPa压力下，温度3℃时，动力粘度为：

$$\mu=42.2\times10^{-3}Pa\cdot s$$

此值比水的粘度大好几十倍。粘度值还显著地依赖于温度，但很少随压力发生变化。对液体来说，随温度升高，粘度值下降；对气体而言，随温度升高，粘度值反而上升。可见粘度值与温度的关系，对液体与气体说来是截然不同的.在0.1MPa压力下，水和空气的粘度随温度而变化的关系列于表1-4中。

四、基于粘性的流体分类

（一）牛顿流体与非牛顿流体

凡流体中出现的切应力与速度梯度服从牛顿粘性公式（1-8），即切应力与速度梯度成

表1-4 水与空气的粘度值

温度/℃	水		空气	
	μ/(kg·s^{-1}·m^{-1})	ν/(m^2·s^{-1})	μ/(kg·s^{-1}·m^{-1})	ν/(m^2·s^{-1})
0	1.792×10^{-3}	1.792×10^{-6}	0.0172×10^{-3}	13.7×10^{-6}
10	1.308×10^{-3}	1.308×10^{-6}	0.0178×10^{-3}	14.7×10^{-6}
20	1.005×10^{-3}	1.007×10^{-6}	0.0183×10^{-3}	15.7×10^{-6}
30	0.801×10^{-3}	0.804×10^{-6}	0.0187×10^{-3}	16.6×10^{-6}
40	0.656×10^{-3}	0.661×10^{-6}	0.0192×10^{-3}	17.6×10^{-6}
50	0.549×10^{-3}	0.556×10^{-6}	0.0196×10^{-3}	18.6×10^{-6}
60	0.469×10^{-3}	0.477×10^{-6}	0.0201×10^{-3}	19.6×10^{-6}
70	0.406×10^{-3}	0.415×10^{-6}	0.0204×10^{-3}	20.6×10^{-6}
80	0.357×10^{-3}	0.367×10^{-6}	0.0210×10^{-3}	21.7×10^{-6}
90	0.317×10^{-3}	0.328×10^{-6}	0.0216×10^{-3}	22.9×10^{-6}
100	0.284×10^{-3}	0.296×10^{-6}	0.0218×10^{-3}	23.6×10^{-6}

正比的，叫做牛顿流体；否则叫非牛顿流体。最常见的牛顿流体如水、空气等，而非牛顿流体如泥浆、纸浆、油漆、油墨等。牛顿流体与非牛顿流体，它们的切应力与速度梯度关系曲线不同，见图1-5。线A为牛顿流体，B、C、D线则各代表不同类型的非牛顿流体。

本教材中只讨论牛顿流体。讨论非牛顿流体的学科叫流变学。由于工程应用中有大量的非牛顿流体，故流变学的研究越来越受到重视。

（二）粘性流体与理想流体

实际流体都具有粘性，都是粘性流体。但当流体粘性不大（如水、空气粘性都很小），流动的速度梯度也较小时，则出现在流体中的切应力比起其他力（如惯性力）可忽略不计，也就是说这时的流体是无粘性的，而无粘性的流体称为理想流体。理想流体实际并不存在，在流体力学中引进理想流体概念，是为了简化问题便于分析。先研究相应的理想流体运动，把结果做为进一步研究实际流体运动的基础。这种做法在流体力学中取得很大的成功。

［例1-2］ 缸套中之活塞柄上作用着$F=8.436$N（图1-6），缸套内径$D=12$cm、活塞直径$d=11.96$cm、活塞长度$L=14$cm，缸塞间隙中充的是$\mu=0.065$Pa·s的油液，求活塞移动的速度u为若干？

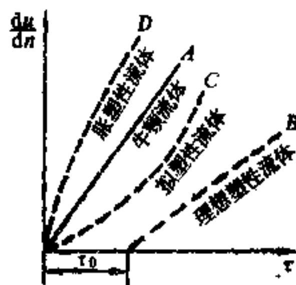


图1-5 牛顿流体和非牛顿流体曲线

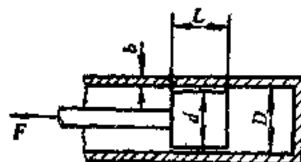


图1-6 缸中活塞的运动

［解］ 根据牛顿内摩擦公式可写出

$$\tau=\frac{F}{A}=\mu\cdot\frac{u}{\delta}$$

从而　$u=\dfrac{\delta F}{\mu A}$

式中各项计算如下

$$\delta=\frac{1}{2}(D-d)=\frac{1}{2}(12-11.96)\text{cm}=0.02\text{cm}=0.0002\text{m}$$

$$A=\pi dL=\pi\times0.1196\times0.14\text{m}^2$$

把数据代入上述 u 式得：

$$u=\left(\frac{0.0002\times8.436}{0.065\times\pi\times0.1196\times0.14}\right)\text{m/s}=0.494\text{m/s}$$

所以活塞运动速度 $u=0.494\text{m/s}$

［例1-3］ 图1-7所示为一轴和滑动轴承示意图。轴的直径 $D=15\text{cm}$，轴承宽 $b=25\text{cm}$，轴与轴承之间隙 $\delta=0.1\text{cm}$，间隙充满 $\mu=2.45\times10^{-2}\text{Pa·s}$ 的润滑油，若轴的转速 $n=180\text{r/min}$，求所消耗功率为多少？

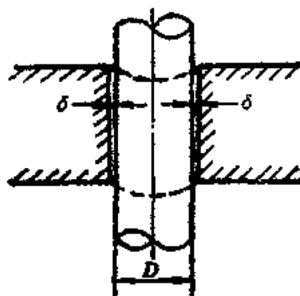


图1-7　轴和滑动轴承

［解］ 轴表面的圆周速度为：

$$u=\frac{\pi Dn}{60}=\left(\frac{3.14\times0.15\times180}{60}\right)\text{m/s}=1.415\text{m/s}$$

润滑油的速度梯度

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}=\frac{u}{\delta}=\left(\frac{1.415}{0.001}\right)1/\text{s}=1415\ \ 1/\text{s}$$

作用于轴表面的摩擦力

$$F=A\tau=A\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}=(3.14\times0.15\times0.25\times2.45\times10^{-2}\times1415)\text{N}$$
$$=40.90\text{N}$$

滑动轴承所消耗的功率

$$P=M\omega=T\frac{D}{2}\cdot\frac{2\pi n}{60}=\left(40.90\times\frac{0.15}{2}\times\frac{2\times3.14\times180}{60}\right)\text{N·m/s}$$
$$=57.68\text{N·m/s}=57.68\text{W}$$

第六节　液体的表面性质

一、表面张力概念

考虑有自由界面（液体与气体的分界面）的液体内部，分子的相互吸引作用。如图1-8所示，A为液体内一分子，则只有邻近它的那些分子对它的作用才需要考虑，而远处分子的作用很弱，可以忽略不计。譬如以A为圆心，r为半径做一球体，球内分子对A的引力需计及，而球外分子对A的引力可以忽略，则把r叫分子作用半径、而所述球体称为分子作用球。在A的分子作用球内存在大量其他分子，这些分子作用在A上的引力指向四面八方，平均地讲这些引力是互相抵消的。但对靠近自由表面的分子，情况就不同了。在液面下距液面的距离小于r的薄层内的分子B，在它的分子作用球内有液体及气体两种分子，液体对B的分子力大于气体对B的分子力，故它受到一个不平衡的、垂直指向液体内部的分子合力f的作用，此作用力图把表面层中分子拉向液体内部，致使除了为构成表面层所必需的那些分子以

外，绝不允许有多余的分子留在表面层中。

由于上述分子力的作用，宏观上表现出来，液体自由表面总是力图收缩为最小，就象一个被均匀地张拉的弹性薄膜那样处于应力状态。为了保持这紧张的薄膜的平衡，必有施于薄膜底周界上与液体表面相切的力，这力就叫做表面张力。作用在单位长周线上的表面张力记为σ（如图1-9），其单位为N/m。σ值随液体物理性质及温度而变化。表1-5列出了常用液体的表面张力。

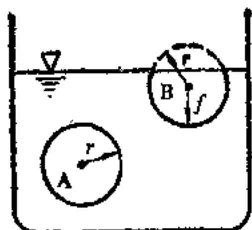


图1-8 液体内的分子作用球

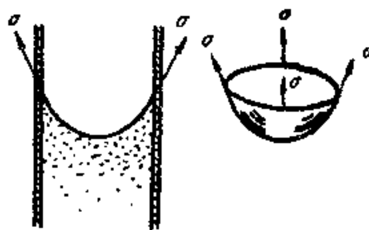


图1-9 管中液体表面张力

表1-5 常用液体的表面张力(20℃)

液体名称	$\sigma/(N\cdot m^{-1})$	液体名称	$\sigma/(N\cdot m^{-1})$
酒精	0.0223	原油	0.0306
苯	0.0289	水	0.0731
四氯化碳	0.0267	水银	0.5137（以上与空气接触）
煤油	0.0277		0.3926（与水接触）
润滑油	0.0365		

二、毛细管现象

由表面张力所引起的毛细管现象，常出现在流动参数的测量中，必须给以充分注意。

液体分子之间存在互相吸引的作用力，叫作内聚力。当液体与固体接触时，液体分子与固体分子之间也有吸引力，这类吸引力称为附着力。

当把一根细玻璃管插入液体中时，倘若此液体（象水）的内聚力小于它同玻璃管的附着力，则液体将润湿管壁，并沿壁面向上伸展，致使液面成月牙形向上弯曲（图1-10a）。由于表面张力的作用，弯曲的液面被拉平，管内液柱随之升高，而后液体进一步润湿壁面，并沿壁面再向上伸展，液柱随之再次升高、直至表面张力的合力与管内升高液柱的重量相平衡为止。但倘若液体（如水银）的内聚力大于它同玻璃管的附着力，则液体将不润湿玻璃管，并沿壁面向下伸展，致使液面中间凸起而向下弯曲（图1-10b）。此时表面张力的作用将使管内液柱下降，直至表面张力的合力与管内下降液柱的重量相等时，液面才会稳定。这种细管中液面由于表面张力作用而上升或下降的现象就叫做毛细管现象。



图1-10 毛细管现象

毛细管现象中，液柱上升（或下降）的高度，可按表面张力的合力应与升高（或降低）液柱重力相等的原则来计算。设管径为d、液柱上升（或下降）的高度h、液面与管壁接触角（张力方向与管壁夹角）θ（图1-10）、γ为液体的重度，则

$$\pi d\sigma\cos\theta=\gamma h\pi d^2/4$$

$$h=\frac{4\sigma\cos\theta}{\gamma d} \tag{1-11}$$

对20℃时的水和水银，它们在玻璃管内上升和下降的高度（单位mm）分别为：

$$h=\frac{29.8}{d} \tag{1-12}$$

$$h=\frac{10.15}{d} \tag{1-13}$$

式中　d——毛细管内径，[d]为mm。

由上面公式看出，管越细毛细现象越严重；管粗则较缓和，甚至（如$d>10$mm时）可忽略毛细现象。

第七节　液体的空气分离压力与汽化压力

一、液体的空气分离压力

和空气接触的液体，总是或多或少地把一部分空气溶入了其中，溶解量的多少与压力成正比且依赖于温度。常温下，一个大气压时，按体积百分比计，空气在水中之溶解量为1～2%。

在某一温度下，设当压力为p_0时空气在液体中之溶解量为α_0，压力降至p_1时空气在其中溶解量应降为α_1，但压力在由p_0降至p_1过程中，空气可能并未随过程析出，则液体中包含了α_0-α_1的过饱和空气溶解量。当让压力继续降低达到某一压力值p_g时，溶入液体内的过饱和空气将突然从液体中析出，形成气泡。这个压力p_g称为该温度下，那种液体的空气分离压力。空气分离压力的大小与液体种类、温度、空气溶解量等有关，当液温高、液中空气含量大，则空气分离压亦高。

二、液体的汽化压力

一种液体在温度保持固定而让压力下降，当压力下降到某一压力值p_v时，液体将开始转化成其蒸汽。把这个液体开始转化成其蒸汽时的压力p_v，称为汽化压力。汽化压力p_v因液体而异，并且随温度而变化。水在不同温度时，其汽化压力p_v的值列于表1-6中。

表1-6　水的汽化压力与温度的关系

温　度　t/℃	0	10	20	30	40	50	60	70.	80	100
汽化压力p_v/Pa	610.54	1225	2333.38	4235.56	7400	12322.52	20000	31138.52	47400	101256.54

液体的汽化，在工程技术部门中有截然不同的两方面的作用。在汽化器、喷雾器、燃烧室等需要汽化的机器中，应通过设计促进汽化的发生，而且汽化的越均匀、越充分越好。但在某些液体机械的低压区中（如水泵与水轮机的叶片、螺旋桨桨叶、液压小孔等处），液体常出现自发汽化现象，随后并演变成汽蚀。这时轻则阻塞流道降低机器效率，重则引起振动、噪声，甚至损坏机件。因此应尽量避免液体汽化的发生，这是水力机械设计中的一个重要任务。

第八节 作用在流体上的力

这一节我们来说明作用在任一流体块上的力的问题。设有任意的被分离出的一个流体块，界面是S、体积为V（图1-11）。作用在此流体块上的力，一般可分成两大类：表面力和质量力。

一、表面力

流体块通过表面S要受到周围与之接触的流体（或固体）对它的作用力，这类通过接触界面作用于流体块上的力叫表面力。如容器壁作用于所盛流体接触面上的力和大气作用于液体界面上的力以及周围流体作用在被隔离流体块表面上的力等，均属于此类力。

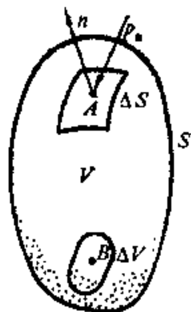


图1-11 流体上的作用力

表面力常用应力来表示：设界面S上包含某一点A的微元面积ΔS，作用在它上面的表面力为ΔP（图1-11），当ΔS收缩到A点面积趋向零时比值$\dfrac{\Delta P}{\Delta S}$的极限记成$p_n$

$$p_n=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta S}$$

这就是作用在S面上A点处的应力，下标n指S面在A点处的法线方向。一般应力p_n是随空间位置和时间而变化的。

为了分析上的方便，常把这个应力分解成两个分力：一个沿着表面法线方向的法向应力p_{nn}（就是常说的流体压力）；一个沿着表面切线方向的切应力p_{nt}(也就是内摩擦切应力)。

作用在微元面积ΔS上的表面力可以表示为

$$\Delta P=p_n\Delta S$$

可见它是正比于面积的，与面积是同阶的无穷小量。从而它与线性尺寸相比为一个二阶的无穷小量。

二、质量力

直接作用在流体块中各个质点上的力，叫做质量力，这类力是非接触力。重力、惯性力等都是质量力的例子。

流体力学中常以作用在单位质量流体上的质量力来表示这类力。设ΔV为包围流体块中任一点B的某一微元体积，它包含的流体质量为Δm、所受的质量力为ΔF。令ΔV收缩到B点时的极限：

$$\mathbf{f}=\lim_{\Delta m\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta m}$$

称为B点处单位质量流体所受的质量力，

单位质量流体所受的质量力，在直角坐标系中三个坐标轴方向的分量常用f_X、f_Y、f_Z表示，

$$\left.\begin{aligned}f_X&=\lim_{\Delta m\to 0}\frac{\Delta F_X}{\Delta m}\\f_Y&=\lim_{\Delta m\to 0}\frac{\Delta F_Y}{\Delta m}\\f_Z&=\lim_{\Delta m\to 0}\frac{\Delta F_Z}{\Delta m}\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}14)$$

一般在流体内各处质量力并不相同，同一点在不同时刻质量力也可以变化.因此，f_X、f_Y、f_Z一般是空间坐标和时间的函数。

由上述可知作用在任一微元流体体积ΔV（具有质量Δm）上的质量力就应该是：

$$\Delta \mathrm{F}=\Delta m\mathrm{f}=\rho\Delta v\mathrm{f}$$

可以看出质量力与体积成正比，（因此质量力也常称为体积力）即说明质量力是与体积元素同阶的无穷小量，与线元相比它是三阶的无穷小量。

习 题 一

1-1 何谓连续介质假定？此假定的根据是什么？引入连续介质假定的目的何在？

1-2 何谓流体的粘性？

1-3 充满石油的油槽处于5个工程大气压下，今由槽中排出石油40kg，使槽内压力降到1个工程大气压，设石油的体积弹性系数$E=1.32\times10^9\mathrm{N/m^2}$，求油槽体积。

($V=153\mathrm{m^3}$)

1-4 直径$d=400\mathrm{mm}$，长$l=2000\mathrm{m}$的输水管作水压实验，管内水的压力达$750\mathrm{N/cm^2}$，经一小时后，压力降至$700\mathrm{N/cm^2}$。不计水管变形，求由于降压流出的水量。水的体积压缩系数为$0.5\times10^{-5}\mathrm{cm^2/N}$。

(62.8L)

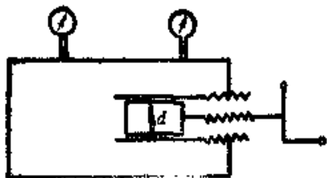
1-5 如图示为一压力表校正示意图，机内充满油液，其体积压缩系数$\kappa=5\times10^{-4}(\mathrm{MPa})^{-1}$，机内压力由手轮丝杠和油塞造成，活塞直径$d=1\mathrm{cm}$，丝杆螺距$t=2\mathrm{mm}$，无压时机内液体积为200mL，若要形成20MPa压力，手轮需转多少圈？

($n=12.74$圈)

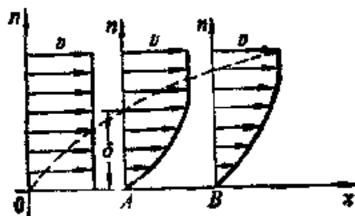
1-6 在进行水洞试验时需测定由下式所定义的无量纲数(Reynold数)$R_e=\dfrac{ul}{\nu}$式中u为试验的速度，l为模型长度，ν为水的运动粘性系数。如果$u=20\mathrm{m/s}$，$l=4\mathrm{m}$，当温度由10℃变成40℃时，R_e数将有何变化？$\nu_{10℃}=0.125\mathrm{St}$，$\nu_{40℃}=0.0075\mathrm{St}$ ($R_{e10℃}=6.4\times10^6$；$R_{e40℃}=1.07\times10^8$)

1-7 设流体的流动如图所示，如果δ内的流速按抛物线分布$v=u(2\frac{n}{\delta}-\frac{n^2}{\delta^2})$当$u=20\mathrm{m/s}$，$\delta=10\mathrm{cm}$时，分别求水和空气对壁面$OAB$所作用的摩擦应力。

($\tau_{水}=46.4\times10^{-3}\mathrm{N/m^2}$，$\tau_{空气}=72.8\times10^{-4}\mathrm{N/m^2}$)



题1-5图



题1-7图

1-8　轴在滑动轴承中转动，已知轴的直径$D=20$cm，轴承宽$b=30$cm，间隙$t=0.08$cm。间隙内充满$\mu=0.245$Pa.s的滑润油，若已知转速$n=90$r/min，求润滑阻力所消耗的功率。

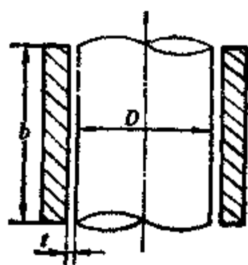
(功率$P=51.2$N·m/s$=51.2$W)

1-9　如图一油缸及其中滑动栓塞，尺寸$D=120.2$mm，$d=119.8$mm，$L=160$mm，间隙中充满油液$\mu=0.65$Pa，若施活塞以$F=10$N的拉力，活塞匀速运动时速度多少？

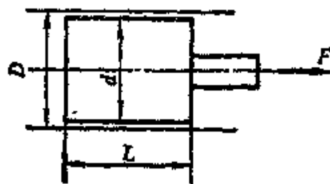
($u=0.51$m/s)

1-10　有一金属套在自重下沿垂直轴下滑，轴与套间充满$\nu=0.3$St，$\rho=850$kg/m^{3}的油液，套的内径$D=102$mm，轴外径$d=100$mm，套长$l=250$mm，套重100N，求套筒下滑时最大速度。

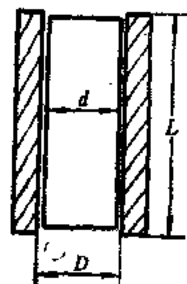
($u_{mix}=49.96$m/s)



题1-8图



题1-9图



题1-10图

第二章　流体静力学

流体静力学主要研究流体静止（平衡）的规律和这些规律的实际应用。

流体静止是指流体对所选坐标系无相对运动，所选的坐标系可以是惯性系（如地球），也可以是非惯性系（如等角速旋转的容器）。如流体相对于惯性系处于静止状态时叫绝对静止；流体相对于非惯性系处于静止状态时，则叫相对静止。本章除讨论流体静止的一般规律外，还将进一步具体讨论流体绝对静止和相对静止的规律及其应用。

静止流体对参考坐标系无运动，因而流体质点间也不会有相对运动，则静止流体内切应力处处等于零。所以在静止流体中，流体粘性作用表现不出来，从而在本章中便也无须区分理想流体与实际流体了。

流体处于静止状态时情况较为简单，便于数学处理；而且流体静力学的分析方法具有一定代表性，其结果也可当作研究流体运动问题的基础。所以把静力学放在流体力学开始来讨论是适宜的。

第一节　静止流体中的压力及其特性

由上一章知道，流体中的应力既是空间点的函数又和作用面的方位（即法线方向n）有关。一般应力可分解为法向应力与切向应力两个互相垂直的分量。但在静止流体中，情况将特别简单。在本节中，我们将较仔细地引入静止流体中的压力（应力）的概念，并讨论其性质。

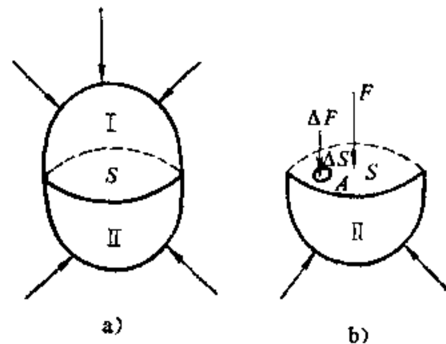


图2-1　流体静压力

一、总静压力、平均静压力、点静压力

在静止流体中，任取一流体块，把它从流体中分出来（图2-1a）。为保持平衡，须在分离面上添加适当的力，以代替原周围接触流体对它的作用。如进而沿S面再将它分割成Ⅰ、Ⅱ两部分，取走部分Ⅰ，欲使Ⅱ部分继续保持平衡，则应在S面上外加一个力F（图2-1b）代替部分Ⅰ对部分Ⅱ的作用。这个力F称为面积S上的流体总静压力。按单位面积平均所承受的压力，称为流体平均静压力（压强）

$$p=\frac{F}{S}$$

由于压力分布的不均匀性，流体中的平均静压力并不能精确地表示S面上一点(如点A)处的静压力。为要精确表示，可围绕A点、在S面上取一面元ΔS，设其上总静压力ΔF，考虑平均静压力$\frac{\Delta F}{\Delta S}$；$\Delta S$取的越小，压力分布不均匀程度也就越小，则$\frac{\Delta F}{\Delta S}$就越能精确地表

示A点处的压力。故让ΔS趋向零（即ΔS趋向A点）时，人们把作用在ΔS面积上的平均静压力$\frac{\Delta F}{\Delta S}$的极限，叫做$A$点的流体静压力。以小写字母$p$表示此压力，则$A$点流体静压力的数学表达式是：

$$p=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta S} \tag{2-1}$$

流体静压力表示作用在单位面积上的力，因而又称流体静压强。其单位有N/m^2、Pa，bar、等，它们的换算关系如下：

$$1N/m^2=1Pa \quad 1bar=10^5Pa$$

二、流体静压力的特性

（一）流体静压力的方向是沿着作用面的内法线方向

首先在静止流体内不存在切应力，因此对任何作用面，应力只能是沿着它的法线方向。又因为流体内聚力很小，流体几乎不能承受拉力。因此静止流体中的应力只能指向所取作用面的内法线方向。也正是由于这一缘故，人们把静止流体中的应力叫作流体静压力。

如在静止流体中，隔离出一流体块，在它的界面S上的A点处，单位外法线记为$\boldsymbol{n}$(图2-1b），则S面在该点的压力可表示为：

$$\boldsymbol{p}_n=-\boldsymbol{n}p_n$$

式中　p_n——A点的压力值。

（二）流体静压力的大小与作用面的方位无关

设点A为静止流体中一点，p_1、p_2为该点处分别以任意方向$\mathbf{n}_1$、$\mathbf{n}_2$为法向的两个作用面上的流体静压力，则p_1的大小与p_2相等。

为说明此事，包围A点用五个平面隔离出一个直角三棱柱体状的流体微元（图2-2），并取如图所示的坐标系（y轴垂直纸面向内）。流体微元的五个界面分别为：法向为$\mathbf{n}_1$的矩形平面、法线为$\mathbf{n}_2$的矩形平面、与第一个平面交成θ角并与第二个平面垂直的矩形平面、还有两个与纸面平行相距为dy的三角形平面。它们的边长如图所示。

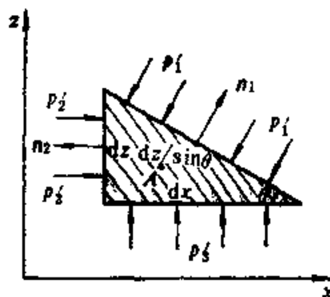


图2-2　包围点A的静止流体元

由于所取流体元为静止的，故沿任意方向其作用力总和应为零。考虑x方向，则有

$$p_2'\mathrm{d}y\mathrm{d}z-p_1'\sin\theta\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}z}{\sin\theta}+\rho f_x\frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

让五个界面平行于自身向A点收缩且令dx，dy，dz趋向零时，三阶项消失，且p_1'、p_2'分别以p_1、p_2为极限，则由上式导出：

$$p_1=p_2$$

上式说明，在静止流体中过某点的任意两个作用面上的压力都相等，即流体静压力的大小与作用面的方位无关。换句话说，在静止流体内，任意一点处的流体静压力的大小，只是空间位置的函数。

第二节 静止流体微分方程

本节建立静止流体中作用在流体微元上诸力的平衡方程式，也就是压力和质量力所应满足的微分方程式，并在此基础上讨论静止流场的几个特性。

一、静止流体（欧拉）微分方程

任何物体处于静止状态的必要条件是：作用于其上的各种外力之和应等于零。在静止流体中，隔离出一微小流体团作为考察对象，分析其受力并把上述静止条件应用于其上，即可导出静止流体微分方程。

设在静止流体中建立一个坐标系 $oxyz$。$A(x, y, z)$ 是流体空间任意一点。以A为中心隔离出一个其棱与坐标轴平行的六面体流体微团，棱长分别为 dx、dy、dz（图2-3）。这个微团所受外力在x轴方向的分量包括下列几种。

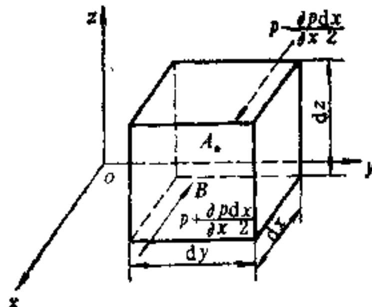


图2-3 静止流体微团的受力

（一）表面力

微团上所受的表面力就是作用在六个表面上的压力。而且只有以x轴为法线的前、后二面上的表面力才是沿x轴方向的。

设在点$A(x, y, z)$处压力为$p(x, y, z)$，则在前侧面中心 $B\left(x+\frac{dx}{2}, y, z\right)$ 的压力（据太勒展开）应为$p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}$。由于表面积很小，此压力可以看成是前侧面上的平均压力，故该面上之总压力为：

$$\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz$$

后侧面上总压力可以类似得出：

$$\left(p-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz$$

沿x轴方向的表面力总和则应为：

$$-\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz$$

（二）质量力

设作用在所划出的流体微团质心A上的单位质量力在x轴方向的分量为f_x。因微团很小，f_x可被看成是作用在六面体上的平均单位质量力在x轴向的分量。设ρ为流团密度，则作用在整个六面体流团上的总质量力的x轴向分量应为：

$$f_x\rho dxdydz$$

根据物体静止的条件有

$$f_x\rho dxdydz-\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz=0$$

经过整理可得下列各式中的第一式。同理得二、三两式：

$$
\left.\begin{aligned}
f_X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0 \\
f_Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0 \\
f_Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0
\end{aligned}\right\} \tag{2-2}
$$

或写成向量形式

$$
\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p=0 \tag{2-2$'$}
$$

式（2-2）叫做静止流体微分方程。由于此方程是欧拉在1755年首先提出的，故又称欧拉平衡微分方程。它表明：在静止流体中，作用在每个流体质点上的质量力与压力的合力相平衡。或者说，作用在静止流体中的质量力，将引起流体沿该力作用方向的压力梯度。它既适用于不可压缩流体，也适用于可压缩流体。

式（2-2）是流体静力学的基本方程，在不同质量力及边界条件已给定之下求解式(2-2)，我们就可以得到各种静止流体的解（压力分布规律）。流体静力学的一切计算公式均可由式（2-2）导出。下面从式（2-2）出发先来讨论静止流场的几个一般性质。

二、静止流场的性质

（一）外力限制条件

只有当外质量力满足一定条件时，流体才可能静止，这样的条件叫作外力限制条件。

下面的讨论假定流体为不可压缩的。处于静止的流体其受力均须满足式（2-2），若对三个方程交替对坐标求导，可得

$$
\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x} \quad \frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial y} \quad \frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial z}
$$

由矢量分析知道，满足上述条件的质量力场为一无旋场，从而质量力应是某一标量函数的梯度。假设用$U(x,y,z)$表示这一函数，则有

$$
\boldsymbol{f}=\nabla U
$$

即

$$
f_X=\frac{\partial U}{\partial X} \quad f_Y=\frac{\partial U}{\partial Y} \quad f_Z=\frac{\partial U}{\partial Z}
$$

标量函数其对各坐标变量求导，分别等于某力矢量的三个坐标轴方向的对应分量时，则此标量函数叫做那个力的势函数。因此$U(x, y, z)$为质量力$\vec{f}$的势函数。从而得出结论：不可压缩流体静止的必要条件是质量力有势。

实际上所遇到的质量力大多是有势的，如重力、引力、离心惯性力、直线惯性力等；也有无势的质量力，如克里奥莱力。以下当然只讨论有势质量力的作用。

（二）等压面及其特性

静止流体中压力是空间点坐标的连续函数。静止流体空间各点压力都有它一定的值。压力相等的各点所组成的面（平面或曲面），叫做等压面。

根据等压面的定义，等压面的数学表式应为：

$$p\ (x,\ y,\ z)\ =c$$

或写成微分形式则为：

$$\mathrm{d}p=0 \tag{2-3}$$

进而把$\mathrm{d}p$展开得

$$\mathrm{d}p=\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z$$

将式（2-2）代入上式，得压力差公式：

$$\mathrm{d}p=\rho\ (f_X\mathrm{d}x+f_Y\mathrm{d}y+f_Z\mathrm{d}z) \tag{2-4}$$

把它代回式（2-3），并消去ρ后则得到等压面的微分方程：

$$f_X\mathrm{d}x+f_Y\mathrm{d}y+f_Z\mathrm{d}z=0 \tag{2-5}$$

上式沿等压面成立。$\mathrm{d}\vec{l}=(\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}z)$代表沿等压面的任一微位移，$f_X$，$f_Y$，$f_Z$沿等压面取值，是等压面上坐标变量$x$，$y$，$z$的函数。把各种$f_X$，$f_Y$，$f_Z$值代入式（2-5）积分，可得各种静止情况下的等压面方程式。

由式（2-5）出发，可以立刻得到等压面的几个重要性质，下面分别讨论这些性质。

1．等压面与质量力的等势面重合

沿等压面微分方程式（2-5）成立，即

$$f_X\mathrm{d}x+f_Y\mathrm{d}y+f_Z\mathrm{d}z=0$$

流体静止的必要条件是质量力有势、设其势函数为$U\ (x,\ y,\ z)$。质量力的各坐标轴分量，可分别用势函数对各坐标变量的相应偏导数表示：

$$f_X=\frac{\partial U}{\partial x},\ f_Y=\frac{\partial U}{\partial y},\ f_Z=\frac{\partial U}{\partial z}$$

把这些关系代入式（2-5）得：

$$\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z=0$$

即

$$\mathrm{d}U=0$$

或

$$U=c$$

上式表明在等压面上势函数值不变，即等压面同时也是等势面。也就是说在静止流体内，等压面与质量力的等势面是互相重合的。

2．等压面与质量力相垂直

由于

$$f_X\mathrm{d}x+f_Y\mathrm{d}y+f_Z\mathrm{d}z=(f_X,\ f_Y,\ f_Z)\cdot(\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}z)=\mathbf{f}\cdot d\mathbf{l}$$

把此关系代入式（2-5）则得：

$$\vec{f}\cdot d\vec{l}=0$$

$\vec{f}=(f_X,\ f_Y,\ f_Z)$为单位质量力，$\mathrm{d}\vec{l}=(\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}z)$表示沿等压面的任一微位移，所以上式说明：作用于静止流体中任意一点的质量力，必垂直于通过该点的等压面。根据这一特性，我们可以在已知质量力的方向后去确定等压面的形状；或已知等压面形状后去确定质量力的方向。

3. 两种不相混合的静止流体的分界面必为等压面

如图2-4为两种不相混合的流体1、2，其分界面为S。设A、B为S上相邻的两点，两点间压力差为dp、势函数值之差记为dU。写出A、B两点压力差公式（2-4），对第一、二种流体分别为：

$$dp=\rho_1\ (f_x dx+f_y dy+f_z dz)\ =\rho_1 dU$$
$$dp=\rho_2\ (f_x dx+f_y dy+f_z dz)\ =\rho_2 dU$$



图2-4　不混合流体分界面

由此导出

$$\rho_1 dU=\rho_2 dU$$

因为对两种不同流体

$$\rho_1\neq\rho_2$$

那么必定有

$$dU=0$$

上式说明沿S面任意两邻近点（A与B）的势函数值之增量皆为零。换言之，S面为等势面。由等压面性质1知S面也必为等压面。

第三节　液体的绝对静止

在地球上讨论物体的运动问题时，可把地球取为惯性参考系，则相对于地球的静止就是绝对静止。液体的这类静止是最常见的现象。由于这时静止的液体只受重力一种外质量力的作用，因此这种静止也叫做重力液体的静止。在这里我们要建立重力静止液体中的压力分布公式，并介绍它在工程实际上的几个应用。

从式（2-4）出发，质量力代以重力，然后积分，即可得到重力液体中压力分布规律。

设有如图2-5所示重力静止液体，取图上所示坐标系后，则单位质量重力的三个坐标分量为：

$$f_X=0\quad f_Y=0\quad f_Z=-g$$

将上式代入式（2-4）得：

$$dp=-\rho g dz$$

或

$$dz+\frac{dp}{\gamma}=0$$

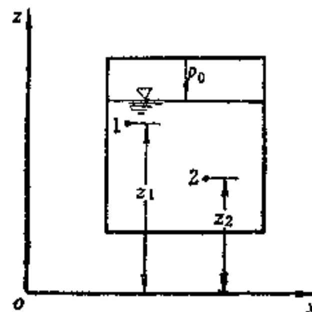


图2-5　液体静力学基本方程用图

设液体为均质，则重度$\gamma=\rho g$等于常数，积分上式后得：

$$z+\frac{p}{\gamma}=c \qquad (2-6)$$

c为一积分常数，由边界条件决定。上式说明，静止液体内各点静压力p的大小依赖于该点垂直坐标z。在静止液体内任取二点1，2，其位置高度及静压力分别记为z_1、z_2与p_1、p_2，则针对此二点，式（2-6）可改写成：

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}=z_2+\frac{p_2}{\gamma} \qquad (2-6)'$$

式（2-6）与（2-6）′被叫做流体静力学基本方程。

下面说明方程（2-6）的物理意义。基本方程(2-6)是对单位重㊀液体的一个关系式：第一项z代表单位重液体（以xoy为水平基准面时）的位置势能，第二项$\frac{p}{\gamma}$代表单位重液体的压力势能。对第二项可作如下说明：若在静止液体中压力为p之a处，接出一根抽成绝对真空的玻璃管，则液体将沿管上升一高度h_p（图2-6）至b处。这是由于压力克服了液体所受的重力做了功，才使液体位置得以升高，从而使它的位置势能有所增加。因此可以说压力p具有做功的能力，而$\frac{p}{\gamma}$正是它对单位重液体所能做出的功之大小。因为当压力p使单位重液体沿真空玻璃管上升高度h_p时，单位重液体位置势能之增加（即压力p对之做的功）也恰为h_p，而h_p就等于$\frac{p}{\gamma}$。如图2-6，对a、b两点列方程（2-6）′

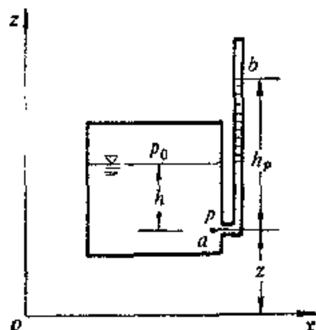


图2-6 真空玻璃管内液体上升高度$h_p=\frac{p}{\gamma}$

$$z+\frac{p}{\gamma}=(z+h_p)+\frac{0}{\gamma}$$

故

$$\frac{p}{\gamma}=h_p$$

把$\frac{p}{\gamma}$称为单位重液体的压力势能，$z+\frac{p}{\gamma}$叫做单位重液体的总势能。于是流体静力学基本方程的物理意义可以说是：在静止的均质、重力液体中，其单位位置势能与单位压力势能可以因点而变化，但它们的总和（单位总势能）保持不变。

流体静力学基本方程（2-6），虽然便于理论分析，但对实际计算却不方便。为得出便于计算液体静压力的公式，下面我们改写基本方程。考虑一般情况下的液体的绝对静止，如（图2-7），对液面上一点和淹没深度为h的液体内任意一点列出方程（2-6）′，则有

$$z+\frac{p}{\gamma}=(z+h)+\frac{p_0}{\gamma}$$

或

$$p=p_0+\gamma h \tag{2-7}$$

此为重力液体中，静压力的计算公式。公式表明，在重力液体内任一点的静压力由两部分组成：一部分为液体表面上的压力p_0；另一部分是由高为h、底面积为一个单位面积的液柱之重力所产生的压力γh。由于对液体中各点来说，表面压力p_0、液体重度γ是不变化的，只有h随点在液体中之位置而变，因此式（2-7）表明，静压力p是淹没深度h的线性函数。

应强调说明的是此式只适用于连通的、均质绝对静止液体（或可忽略压缩性之气体）。以下我们介绍式（2-7）的推论及它的几个应用。

一、等压面

绝对静止液体中之等压面，可由式（2-7）确定出来。实际上令式中压力p为常数，推得

$$h=\text{const}$$

㊀ 单位重液体是指受到单位重力的液体。后同。

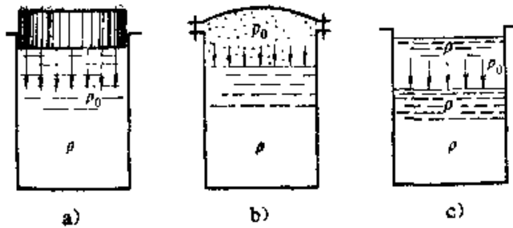


图2-7 建立静压计算公式用图

这说明绝对静止液体中之等压面为一族水平面。特别当$h=0$时为液体自由界面（液体与气体的分界面），这时$p=p_0$，也是一个等压面。

实际上从式（2-5）出发，经过积分同样可得到等压面。

在绝对静止条件下，等压面理论与实际现象的完全吻合，验证了静力学理论的正确性。

最后我们强调一个为静力学计算常用到的等压面性质：在同一种连通的静止液体内，每个水平面都是一个等压面。如图2-8所示，连通器内为密度 ρ_1、ρ_2 的两种不相混合之液体。在两种液体分界面c-c以下的水平面（如d-d）是等压面；但在c-c面以上的水平面（如e-e）就不是等压面了，因为它已经不在同一种连通的静止液体内了。下举一例以示等压面在计算中之应用。

［例2-1］ 在大气中之敞口连通器内，盛了重度分别为γ_1、γ_2的两种液体（如图2-9)。若$\gamma_1=7840\text{N/m}^3$，$\gamma_2=11760\text{N/m}^3$液面高差$h=0.3\text{m}$，求高度$h_1$、$h_2$。

［解］ d-d为包含液体分界面在内的水平面，从容器Ⅰ、Ⅱ算出的连通管中d-d面上压力分别为：$p_a+\gamma_1h_1$与$p_a+\gamma_2h_2$。由于d-d面为等压面故有

$$p_a+\gamma_1h_1=p_a+\gamma_2h_2$$

即

$$\gamma_1h_1=\gamma_2h_2$$

因为

$$h_1=h_2+h$$

所以

$$\gamma_1(h_2+h)=\gamma_2h_2$$

由此得

$$h_2=\frac{\gamma_1h}{\gamma_2-\gamma_1}=\frac{7840\times0.3}{11760-7840}\text{m}=0.6\text{m}$$

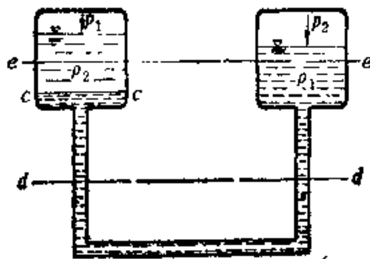


图2-8 连同液体内之等压面

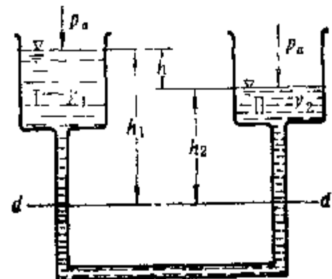


图2-9 盛有不同液体的敞口连通器

$$h_1=h_2+h=(0.6+0.3)\text{m}=0.9\text{m}$$

二、压力的表示与压力的单位

为进行下面的讨论，先让我们回顾一下静压计算公式（2-7）。因为在很多工程实际情况下，静止的重力液体具有自由界面，而且自由界面上是大气。大气压力常记成p_a，这时式（2-7）中$p_0=p_a$，故压力计算公式写成：

$$p=p_a+\gamma h \tag{2-8}$$

式（2-8）是重力液体静压力计算的一个常用公式。以它为基础，来介绍压力的几种表示法。

(一)压力的表示

静止液体中一点压力之大小，按度量时所取基准(即零点)的不同，有下列两类表示方式。

1. 以绝对真空为基准

静止液体内一点压力之大小，可以绝对真空为零算起，这个压力值称为绝对压力。其算式一般可写成

$$p = p_a + \gamma h$$

在理论分析中常采用压力的这一表示方式，如在物理学、热力学、化学等理论学科中，多采用绝对压力这一计压方式。

2. 以大气压力为基准

从工程实用的角度看，绝对压力的表示方式并不必要。因为任何工程设备，总是同处于大气的包围与作用中，故大气压力几乎总是互相抵消的，而真正起作用的是压力中超过大气压的部分，这部分压力还更便于测量。所以静压力中的大气压力分量，可以不必计入，而引入以大气压为零点起算的压力，是更为实用和方便的。这时可以分两种情况讨论：

（1） 压力大于大气压（$p > p_a$）的情况　以大气压力p_a为零起算的压力值，叫做相对压力，通常用记号p_g表之。根据式（2-8）相对压力计算公式应为

$$p_g = p - p_a = \gamma h \tag{2-9}$$

工程上所用测量压力的一般仪表，大气压力并不能使压力表指针转动，即大气压力在压力表上表现为零压，而表上刻度所表示的则为超过大气压力的部分，就是相对压力。所以相对压力，在工程上也称为表压力或计示压力。

（2） 压力小于大气压（$p < p_a$）的情况　实际工程中有时会出现流体中一点之压力小于大气压的情形，这时就说该点处于真空状态。出现真空之处，其相对压力成为负值，为了方便工程上引用真空度来表示该点压力。一点的绝对压力不足大气压力的数值，叫做该点的真空度（有的书中把此值与大气压的百分比值叫真空度）。真空度用记号p_v代表，则据定义其计算公式为

$$p_v = p_a - p \tag{2-10}$$

比较式（2-9）与式（2-10）可得一点真空度与其表压力的关系式：

$$p_v = -p_g$$

即真空度等于其负表压力值。

最后我们综合地回顾一下，三种压力表示的互相关系。这关系可用式子表示如下

绝对压力＝大气压力＋表压力

表压力＝绝对压力－大气压力

真空度＝大气压力－绝对压力

上述关系也可用图表示（图 2-10）。

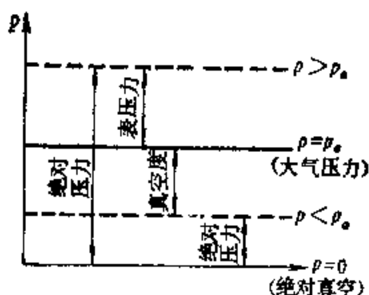


图2-10　绝对压力、表压力、真空度的关系

三种压力值的变化界限：绝对压力以零为下界，表压力则可至负一个大气压(参看式2-9)。由式(2-10)可看出真空度上界为一个大气压。当绝对压力为零时，达到一个大气压的最大真空，叫绝对真空。这一概念在理论分析中虽可被采用，但在工程实际中却很难办到，特别是在液体中，当压力下降到液体饱和蒸汽压时，液体便开始汽化，压力就不会再

往下降了。因此最大真空度实际上不会超过大气压与液体的饱和蒸汽压之差。

(二) 压力的单位

压力的单位，在工程技术上常用的有三种。

1. 单位面积上受力单位

在法定单位制中采用的是 $Pa=\frac{N}{m^2}$ 或较大的单位 $bar=10^5Pa$；在工程制中则是 kgf/cm^2。

2. 液柱高单位

由相对压力 p_g 计算式 (2-9)

$$p_g=\gamma h$$

或

$$h=p_g/\gamma$$

重度 γ 对某种液体而言为一常数，则上式说明相对压力 p_g 与液柱高 h 成正比。因此，静止液体内任意一点的相对压力大小都可以相应的液柱高表示。说一点之压力为 h 米某液柱高时，实际上是指 h 米高的此种液柱由于自重而压在液柱底部上的 γh 大小的压力而言。如上所述压力大小可用液柱高表示，故相应引入液柱高压力单位，工程上常取用水、水银、酒精等为工作介质，因此相应的液柱高单位有米水柱、毫米汞柱、厘米酒精柱等。

当已知液体中某点压力为一工程大气压，用水柱高单位表示为多少？由于一工程大气压力 $p_{at}=9.806\times10^4N/m^2$、而水的重度 $\gamma=9806N/m^3$，所以与一工程大气压相当的水柱高为：

$$h=\frac{p_{at}}{\gamma}=\frac{98060}{9806}=10m\text{水柱高}$$

同理可得与一个工程大气压相应的汞柱高为 736mm 汞柱高。反之，若知液中某点 A 压力为 1.2m水柱高，则化成单位面积受力单位时为：

$$p_A=\gamma h=9806\times1.2N/m^2=11772N/m^2$$

3. 大气压单位

工程上常采用第三种压力单位是大气压单位，这是一种较大的压力单位，用于较高压力的表示中。

(1) 标准大气压 (p_{atm}) 在纬度为45度的海平面上15℃时所测得的大气压力值，叫标准大气压或物理大气压。其值用不同单位表示时如下所示：

$$1p_{atm}=760mmHg=1.033kgf/cm^2$$
$$=1.013bar=0.1013MPa$$

(2) 工程大气压 (p_{at}) 工程上为了方便，抹去小数点后面的数字，规定一大气压为：

$$1p_{at}=1kgf/cm^2=10N/cm^2=10^5Pa$$

p_{at} 称为工程大气压。

各压力单位的换算关系见表2-1。

[例2-2] 在图 2-11上：$h_1=1.2m$、$h_2=1m$、$h_3=0.8m$、$h_4=1m$、$h_5=1.5m$，大气压力 $p_a=101300N/m^2$ 并 $\gamma_水=9810N/m^3$、$\gamma_{乙醇}=7749.9N/m^3$。不计装置内空气重，求1、2、3、4、5、6各点绝对压力及 M_1、M_3、M_5 三个压力表之表压力 (或真空度)。

表2-1　压力单位换算表

帕(Pa) N/m²	巴(bar)	公斤力/厘米² (kgf/cm²)	水柱高 m	汞柱高 mm	大气压
10.13×10^4	10.13×10^{-1}	10.33×10^{-1}	10.33	760	$1p_{atm}$
0.98×10^5	0.98	1	10	735	$1p_{at}$
1	10^{-5}	10.19×10^{-6}	10.19×10^{-6}		$0.987\times10^{-5}p_{atm}$ $10.19\times10^{-6}p_{at}$

〔解〕 据题给条件，用静压算式即可求解。

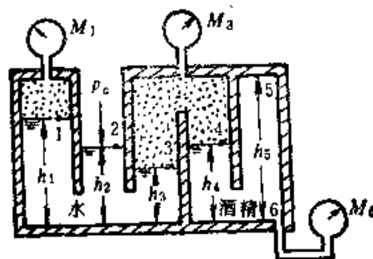


图2-11　压力计算图

对1、2两点：

$$p_2=p_1+\gamma_{水}(h_1-h_2)$$

则 $$p_1=p_2-\gamma_{水}(h_1-h_2)=p_a-\gamma_{水}(h_1-h_2)$$

$$=101300-9810\times(1.2-1)\text{N/m}^2=99338\text{N/m}^2$$

从而 $$p_{M_1}=p_a-p_1=(101300-99338)\text{N/m}^2=1962\text{N/m}^2 \ (\text{真空度})$$

$$p_2=p_a=101300\text{N/m}^2$$

对2、3两点： $$p_3=p_2+\gamma_{水}(h_2-h_3)=(101300+9810\times(1-0.8)\text{N/m}^2=103262\text{N/m}^2$$

$$p_{M_3}=p_3-p_a=(103262-101300)\text{N/m}^2=1962\text{N/m}^2(\text{表压力})$$

而 $$p_4=p_3=103262\text{N/m}^2$$

对4、5两点： $$p_4=p_5+\gamma_{乙醇}(h_5-h_4)$$

则 $$p_5=p_4-\gamma_{乙醇}(h_5-h_4)=[103262-7749.9\times(1.5-1)]\text{N/m}^2$$

$$=99387.05\text{N/m}^2$$

对4、6两点：

$$p_6=p_4+\gamma_{乙醇}h_4=(103262+7749.9\times1)\text{N/m}^2=111011.9\text{N/m}^2$$

$$p_{M_6}=p_6-p_a=(111011.9-101300)\text{N/m}^2=9711.9\text{N/m}^2(\text{表压力})$$

三、压力测量

流体压力的测量已有许多方法，相应的测压仪表种类亦很多，主要可分成金属式、电测式与液柱式三类。在这里我们主要介绍与液柱平衡法相应的液柱式测压计。

液柱式测压计，是用已知其密度的液体之液柱高（由于自重）所产生的压力与被测压力相平衡的原理，根据液柱高由静压算式确定被测压力的大小。这是一类既简单而精确度又较高的测压计，因而它的应用很广。这类测压计又可分成：测压管、U形测压计、差压计与微压计等数种，分别适用于各不同场合。

（一） 测压管

测压管就是一根简单的竖直玻璃管。将其一端连接到液体或气体中待测压处，另一端开口和大气相通（图2-12a）或插入液中（图2-12b），则液体将沿管上升一高度，测量出此高度h后，图2-12a液体内超过大气压的表压力 $p_g=\gamma h_g$；图2-12b 气体中小于大气压的真空度 $p_v=\gamma h_v$。

此种测压计须注意毛细现象的影响，为消除这类影响一般规定测压管内径不得小于5mm。

（二） U形测压计

此测压计实际为一根弯曲成U形的玻璃管，在弯曲部分盛以适当的工作介质（如汞）。测压时把一头接到流体中待测压处，另一头通大气（图2-13）。若待测压力大于大气压时(图2-13a)，设左右液面在同一水平面上。则对左管由静压算式知：

$$p_1=p+\gamma h_1$$

对右管同样可得：

$$p_2=p_a+\gamma_{汞}h_2$$

因管中左右液体是连通的、同一静止介质的水平面d-d上，故

$$p_1=p_2$$

把上面等式代入

$$p+\gamma h_1=p_a+\gamma_{汞}h_2$$

由此得待测点绝对压力为：

$$p=p_a+\gamma_{汞}h_2-\gamma h_1$$

表压力则为：

$$p_g=p-p_a=\gamma_{汞}h_2-\gamma h_1$$

如果待测点压力小于大气压（图2-13b），则其绝对压力为：

$$p=p_a-\gamma_{汞}h_2-\gamma h_1$$

该点的真空度则为：

$$p_v=p_a-p=\gamma_{汞}h_2+\gamma h_1$$

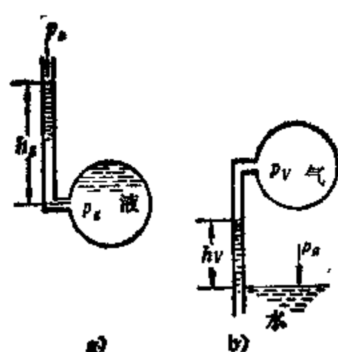


图2-12 测压管

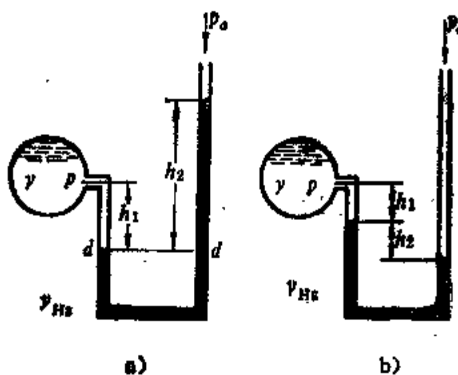


图2-13 U形测压计

(三) 差压计

测量流体中两点间压力差的仪器叫做差压计。最简单一种是把U形测压计的两端分别接在欲测其间压力差的A、B两点上，这时U形测压计便成了一个差压计了（图2-14）。

列出等压面d-d上1、2两点压力算式：

$$p_1=p_A+\gamma h_1$$

$$p_2=p_B+\gamma h_2+\gamma_{汞}h_3$$

因为 $$p_1=p_2$$

所以 $$p_A+\gamma h_1=p_B+\gamma h_2+\gamma_{汞}h_3$$

由此导出压力差

$$p_A-p_B=\gamma_{汞}h_3-\gamma(h_1-h_2)$$

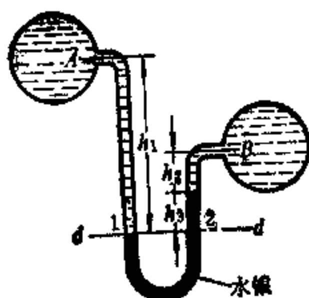


图2-14　差压计

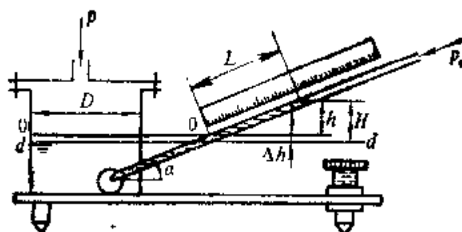


图2-15　斜管式微压计

(四)　斜管式微压计

在测量流体中微小压力或压力差时，为提高测读精度，不使用上述仪表，而采用微压计。斜管式微压计是其中常用的一种，这种微压计是由一根直径为d、具有可调倾角α的玻璃管和一与之连通的直径为D的宽广容器所组成（图2-15）。测压计中盛有重度为γ的工作液体（常用乙醇），原静止液面为0-0。

测压时把待测压力$p(>p_a)$引入容器顶部小孔，因测管自由端通大气，故容器液面下降Δh而测管中液面则上升了h高度。待液面重新静止后，对等压面d-d用静压算式可得：

$$p=p_a+\gamma(h+\Delta h)$$

测管与容器中在原始液面0-0上下变动的液体体积应相等，即

$$\frac{\pi}{4}d^2L=\frac{\pi}{4}D^2\Delta h$$

或改写得

$$\Delta h=\left(\frac{d}{D}\right)^2L$$

注意到

$$h=L\sin\alpha$$

把Δh及h代回压力表示式，则待测绝对压力为

$$p=p_a+\gamma L\left[\sin\alpha+\left(\frac{d}{D}\right)^2\right]\tag{2-11}$$

容易看出表压力则为

$$p-p_a=\gamma L\left[\sin\alpha+\left(\frac{d}{D}\right)^2\right]\tag{2-12}$$

一般管直径d远小于容器直径D，近似可取$\left(\frac{d}{D}\right)^2=0$，即忽略容器中液面变化，则式(2-11)、式(2-12)成为：

$$p=p_a+\gamma L\sin\alpha\tag{2-13}$$

$$p-p_a=\gamma L\sin\alpha\tag{2-14}$$

由上式看出，当α为一小角时，即使待测压力很小，但测管读数L仍相当可观（比液体垂直升高度h可放大若干倍）。尤其当工作液体重度γ较小时，斜管液面读数放大效果更显著。

如待测压力$p<p_a$时，可把压力p从自由端引入斜管而让容器顶通大气。这时绝对压力与真空度可分别用下式确定：

$$p=p_a-\gamma L\sin\alpha\tag{2-15}$$

$$p_v = p_a - p = \gamma L \sin\alpha \qquad (2\text{-}16)$$

如欲测流体中1、2两处的压力微差，则可把压力p_1与p_2（$p_1 > p_2$）分别引入容器与斜管，根据斜管读数L可由下式确定压差：

$$p_1 - p_2 = \gamma L \sin\alpha \qquad (2\text{-}17)$$

上面介绍了液柱式测压计，它构造简单、精度较高，只是量程不大。除液柱式测压计外，还有金属式与电测式测压计。金属式测压计是利用待测压力与金属弹性元件变形成比例的原理，来测量压力的。此种测压计量程较大。电测式测压计是把弹性元件的机械变形，转化成电阻、电容、电感等电学量，以达到测压目的的。此类测压计便于远距离测量与动态压力测量，且有精度与灵敏度高、体积小等优点，适于量测自动化。

［例2-3］ 有如图2-16所示之测压装置，容器A中水面上表压力 $p_g = 245\times10^4 \text{N/m}^2$，并$h = 500\text{mm}$、$h_1 = 200\text{mm}$、$h_2 = 100\text{mm}$、$h_3 = 300\text{mm}$，水的重度 $\gamma_{水} = 9806\text{N/m}^3$，乙醇重度$\gamma_{乙} = 7840\text{N/m}^3$，水银重度$\gamma_{汞} = 134000\text{N/m}^3$，试求容器$B$中空气之压力$p_B$＝？

［解］ 标出如图所示之液体交界面与自由界面，由于p_g与各液面高为已知，用静压算式可逐步算出p_B。

对界面1处表压力：

$$p_1 = p_g + \gamma_{水}(h + h_1)$$

对界面2处表压力为：

$$p_2 = p_1 - \gamma_{汞} h_1 = p_g + \gamma_{水}(h + h_1) - \gamma_{汞} h_1$$

界面 3 处表压力为：

$$p_3 = p_2 + \gamma_2 h_2 = p_g + \gamma_{水}(h + h_1) - \gamma_{汞} h_1 + \gamma_2 h_2$$

自由界面 4 上的表压力为：

$$\begin{aligned} p_4 &= p_3 - \gamma_{汞} h_3 = p_g + \gamma_{水}(h + h_1) - \gamma_{汞} h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_{汞} h_3 \\ &= p_g + \gamma_{水}(h + h_1) - \gamma_{汞}(h_1 + h_3) + \gamma_2 h_2 \end{aligned}$$

由于空气的重度小，所以B点表压力：

$$\begin{aligned} p_B &= p_4 = p_g + \gamma_{水}(h + h_1) - \gamma_{汞}(h_1 + h_3) + \gamma_2 h_2 \\ &= [2.45\times10^4 + 9806\times(0.5 + 0.2) - 134000\times(0.2 + 0.3) \\ &\quad + 7840\times0.1]\text{N/m}^2 \\ &= -34852\text{N/m}^2 \end{aligned}$$

即说明B点处于真空状态，其真空度为34852N/m^2。

四、帕斯卡原理

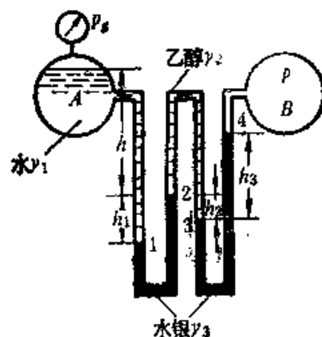


图2-16 测压装置图

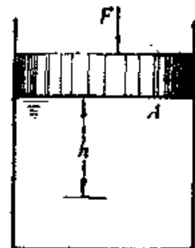


图2-17 帕斯卡原理

有一密封容器，内盛静止液体，上用活塞封口(图2-17)。在活塞上施一外力F，则与活塞接触之液体界面上将产生表面压力：

$$p_0=F/A(A\text{为活塞面积})$$

在距界面为h的液体中任意一点之静压力可应用式(2-7)来计算：

$$p=p_0+\gamma h$$

例如对距界面距离为h_1与h_2的两点1、2，它们的静压力分别为：

$$p_1=p_0+\gamma h_1$$

$$p_2=p_0+\gamma h_2$$

由于各点淹深不同，它们的静压力虽然各不相等，但从上式可以看出每个静压力中都包含了表面压力p_0。这个由所施外力决定的表面压力p_0，它将以同样的大小传递到液体中的各点上去。对这种压力在液体中的传递现象，法国人帕斯卡总结成帕斯卡原理：密封容器中的静止液体，由于部分边界面上承受外力而产生的静压力将以同一数量传递到液体内各点上去。

在帕斯卡原理的应用中，由外力所造成的液体界面压力p_0，常常是远大于式(2-7)中第二项γh的，因此就把它略掉了，这么一来整个液体中压力处处相等，就等于所施外力在液体界面上形成的压力p_0。

帕斯卡原理在工程技术上有着广泛的应用，如水压机、水力蓄能机、水压倍增器、液压传动机械等都是根据这一原理设计的。例如图2-18为水压机工作原理示意图，施加外力F_1于面积为A_1的右边小活塞上，则在活塞与液体的接触面上产生压力$p_0=\frac{F_1}{A_1}$，根据帕斯卡原理此压力将传至液体内各点，包括面积为A_2的左边大活塞的下面，于是在A_2上产生对外作功的力F_2：

$$F_2=p_0A_2=\frac{A_2}{A_1}F_1=\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2F_1 \tag{2-18}$$

d_2、d_1分别为大、小活塞直径。由式(2-18)可知，在小活塞上输入一力F_1，则可于大活塞上得到一个被放大了$\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$倍的力$F_2$。直径$d_2$比$d_1$越大，则力也被放的越大。水压机、千斤顶等各种力倍增器全是利用这一原理设计的。

五、水头的概念

设有一封闭容器，内盛静止液体，液面压力为$p_0(>p_a)$(图2-19)。在静止液体中的任意一点A，它在所取的基准面0-0以上的高度z，叫做该点的位置高度。

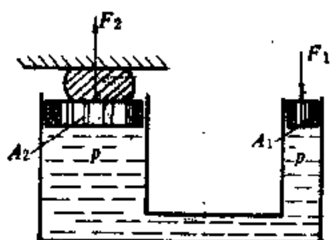


图2-18 水压机原理

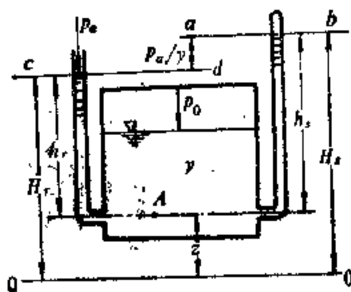


图2-19 水头用图

如在与A同高器壁上开两个孔接出两根竖直玻璃管，一根闭口并将其内抽成绝对真空、另一根开口通大气，则液体沿它们将分别上升一高度h_s与h_r。h_s称为静力高度，h_r则称为测管高度。如本节前面已推得$h_s=\frac{p_A}{\gamma}$，类似可得$h_r=\frac{p_A}{\gamma}-\frac{p_a}{\gamma}$。因此测管高度$h_r$，将比静力高度$h_s$低$\frac{p_a}{\gamma}$(见图2-19)。

在水力与水利工程中，把A点的位置高度z与其静力高度h_s之和用H_s表示，称为A点的静力水头；而把A点的位置高度与其测管高度之和记为H_r，并称为测管水头。H_s值代表A点处液体，相对0-0基准面的单位总势能；H_r值则代表的是A点处液体，相对0-0基准面但不包括大气压在内的单位总势能。且H_s、H_r值，在静止的重力液体内之所有点上全都一样。

将静止液体内各点的水头H_s与H_r的顶点连成的平面，叫静力水头面与测管水头面。由于它们在纸面上的投影为一直线，因而也称为静力水头线(如图上ab)与测管水头线（如图上cd)。它们都是与基准面0-0平行的直线，但静力水头线比测管水头线高出p_a/γ米。

第四节　绝对静止液体作用在平面壁上的总压力

上面讨论了绝对静止液体中一点静压力的计算问题，得到了压力的计算公式。工程中还常常碰到要求计算静止液体对接触固体壁的作用，即计算静止液体对固体壁面的总压力以及作用点问题。本节先讨论平面壁总压力及作用点的计算。

设有被淹没的平面壁A与自由界面成α角地斜置于绝对静止的液体中(图2-20)，同时与纸面垂直。图上只能见到一条投影直线。取壁面与自由界面的交线为x轴，在壁面上取与x轴垂直的直线为y轴，二轴交点o则为原点。为便于讨论，把壁面A绕y轴转90°，则它就面向读者(图2-20)。由于面上各点水深h不同，故静压力也不一样。但这些力的方向相同，皆垂直于壁面，组成平行力系。现就根据理论力学中平行力系的知识，来求壁面上的总压力和作用点的位置。

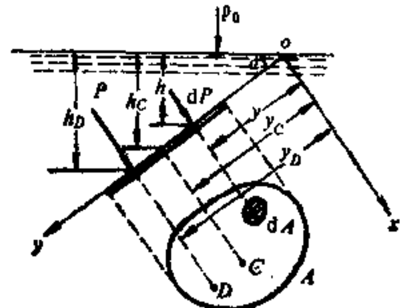


图2-20　平面壁上的总压力

一、总压力计算

设dA为壁面上任一面积元素，若其形心到x轴距离为y，淹没深度为h(图2-20)，则形心上的压力根据式(2-7)为：

$$p=p_0+\gamma h$$

p_0是自由界面上的压力。由于面积dA很小，其上压力可视为均匀分布，那么作用在面元dA上之微元总压力就是：

$$dP=p\,dA=(p_0+\gamma h)dA=p_0dA+\gamma h\,dA$$

由图2-20上所示几何关系可得：

$$h=y\sin\alpha$$

从而

$$dP=p_0dA+\gamma y\sin\alpha\,dA$$

作用在各个面元上之微元总压力全体，组成一垂直壁面的平行力系，因此作用在整个壁

面A上的总压力，就应该等于$\mathrm{d}P$对整个面积A的标量积分：

$$P=\int_A \mathrm{d}P=\int_A p_0 \mathrm{d}A+\int_A \gamma y \sin\alpha \mathrm{d}A$$
$$=p_0 A+\gamma \sin\alpha \int_A y \mathrm{d}A$$

积分$\int_A y\mathrm{d}A$是面积A对ox轴的静矩。由理论力学知道，它就应该等于面积A乘以形心c到ox轴的距离y_c：

$$\int_A y \mathrm{d}A=A y_c$$

把它代回总压表示式：

$$P=p_0 A+\gamma \sin\alpha A y_c=(p_0+\gamma y_c \sin\alpha)A$$

注意在上式中 $y_c \sin\alpha=h_c$

则总压表示式可写成

$$P=(p_0+\gamma h_c)A \tag{2-19}$$

h_c为平面壁形心的淹没深度。此式表明：作用在平面壁上的液体总压力，等于该平面壁的面积与其形心处的液体静压力的乘积。

当不计表面压力p_0时，式(2-19)变成

$$P=\gamma h_c A \qquad (2\text{-}19)'$$

二、压力中心的确定

总压力作用线与壁面之交点$D(x_D、y_D)$叫做总压力作用点，也叫压力中心。下面来确定它在平面壁上之位置，即确定坐标x_D、y_D。

根据理论力学中关于平行力系的力矩定理：平行力系诸分力对某轴的力矩之和，就等于它们的合力对同轴的力矩。考虑诸分力及合力对x轴的力矩则：

$$P y_D=\int_A y \mathrm{d}P$$

把P及$\mathrm{d}P$分别代以下式

$$P=(p_0+\gamma y_c \sin\alpha)A$$
$$\mathrm{d}P=(p_0+\gamma y \sin\alpha)\mathrm{d}A$$

则得

$$(p_0+\gamma y_c \sin\alpha)y_D=\int_A (p_0+\gamma y \sin\alpha) y \mathrm{d}A \tag{2-20}$$

右边分成两个积分处理，第一个积分为：

$$\int_A p_0 y \mathrm{d}A=p_0 y_c A$$

第二个积分为：

$$\int_A \gamma y^2 \sin\alpha \mathrm{d}A=\gamma \sin\alpha \int_A y^2 \mathrm{d}A=\gamma \sin\alpha I_x$$

I_x称为面积A对x轴的惯性矩，根据惯性矩的平行移轴定理

$$I_x=I_c+y_c^2 A$$

式中I_c代表面积A对过形心c而平行于x轴的轴线的惯性矩。把这关系式代回第二个积分则

$$\int_A \gamma \sin\alpha y^2 \mathrm{d}A=\gamma \sin\alpha (I_c+y_c^2 A)$$

把上述二积分的结果代回式(2-20)并经整理得

$$y_D=y_c+\frac{I_c \gamma \sin\alpha}{(p_0+\gamma y_c \sin\alpha)A} \tag{2-21}$$

如不计表面压力p_0则式(2-21)成为

表2-2 几种平面面积图形的I_c、y_c及A值

平面图形		对通过形心而与对称轴垂直的轴线的惯性矩 I_c	y轴与对称轴重合，坐标原点为y轴与图形上边交点时 y_c	平面图形的面积 A
名称	形状			
矩形		$\frac{1}{12}bL^3$	$\frac{1}{2}L$	bL
三角形		$\frac{1}{36}bL^3$	$\frac{2}{3}L$	$\frac{1}{2}bL$
梯形		$\frac{1}{36}\left(\frac{a^2+4ab+b^2}{a+b}\right)L^3$	$\frac{1}{3}\left(\frac{a+2b}{a+b}\right)$	$\frac{1}{2}(a+b)L$
圆形		$\frac{1}{4}\pi R^4$	R	πR^2
半圆形		$\frac{(9\pi^2-64)}{72\pi}R^4$	$\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$	$\frac{1}{2}\pi R^2$
环形		$\frac{1}{4}\pi(R^4-r^4)$	R	$\pi(R^2-r^2)$
椭圆形		$\frac{1}{4}\pi a^3b$	a	πab

$$y_D=y_c+\frac{I_c}{y_cA} \tag{2-21'}$$

不论式(2-21)还是式(2-21)′，都说明压力中心位于形心之下方。

对y轴使用力矩定理：

$$Px_D=\int_A x\mathrm{d}P$$

经过完全类似的计算，可确定出压力中心的横坐标值

$$x_D=\frac{p_0x_cA+\gamma\sin\alpha I_{xy}}{(p_0+\gamma h_c)A} \tag{2-22}$$

其中x_c为壁面形心的横坐标，而$I_{xy}=\int_A xy\mathrm{d}A$叫做面积$A$对坐标轴的惯性积。

当不计表面压力p_0时，上式可写成：

$$x_D=\frac{I_{xy}}{y_cA} \tag{2-22'}$$

通过平行移轴定理：

$$I_{xy}=I_{cxy}+x_cy_cA$$

式中I_{cxy}代表面积A，对过形心c而平行于x、y轴的轴线的惯性积。把上式代回式(2-22)′则：

$$x_D=x_c+\frac{I_{cxy}}{y_cA} \tag{2-22''}$$

当面积A对称于过形心c之y轴时，$I_{cxy}=0$那么

$$x_D=x_c$$

这是在工程实际上经常遇到的情形。为便于计算总压力及压力中心，现将在工程上常用到的几种对称的平面面积图形之惯性矩I_c、形心纵坐标y_c及图形面积A列于表2-2中。

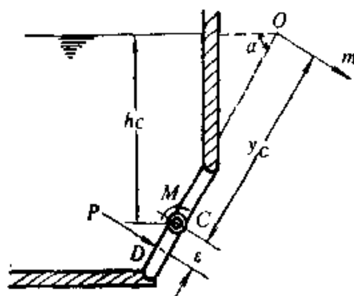


图2-21　水箱上的泄水阀

［例2-4］　图2-21为一水箱，在其底部$\alpha=60°$的斜面上，装有一个直径$d=0.5$m的圆形泄水阀，阀的转动轴通过圆心并与自由界面平行。试问须对阀轴施以多大锁紧力矩，方不致使水推开阀门外泄？

［解］　由于自由界面上作用着大气压，阀外侧也作用着大气压，故计算阀受水之总压力时，可用式(2-19)′：

$$P=\gamma h_cA=\gamma h_c\frac{\pi d^2}{4}$$

压力中心D到轴的距离Σ由式(2-21)′得

$$\Sigma=y_D-y_c=\frac{I_c}{y_cA}=\frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{h_c}{\sin\alpha}\frac{\pi d^2}{4}}=\frac{\sin\alpha d^2}{16h_c}$$

总压力对阀轴的力矩M为：

$$M=P\Sigma=\gamma h_c\frac{\pi d^2}{4}\frac{\sin\alpha d^2}{16h_c}=\frac{\gamma\pi\sin\alpha d^4}{64}$$

$$=\frac{9810\times\pi\times\sin60°\times0.5^4}{64}\mathrm{N\cdot m}=26\mathrm{N\cdot m}$$

所以为使水不外泄，应于阀轴上沿顺时针方向加26N·m的锁紧力矩。

第五节　绝对静止液体作用在曲面壁上的总压力

现在我们在平面壁总压力计算的基础上，来进一步讨论曲面壁总压力的计算问题。为了使问题不致过于复杂，这里先较仔细地讨论工程上常遇到的二向曲面问题，然后再把所得结果推广到任意曲面的一般情形中去。

图2-22所示为承受液体压力的二向曲面剖面图。它有垂直于纸面的母线(长度为b),并有对称平面，图2-22的cd即为对称截面。为讨论方便起见，取如图之右手坐标系$oxyz$。作用在曲面上的总压力为P，它的两个坐标分量P_x、P_z; 曲面对液体的反作用力记为R，其坐标分量R_x、R_z。

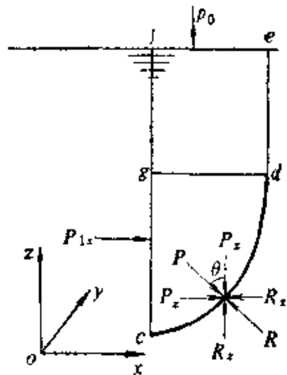


图2-22　曲面壁上的总压力

一、总压力的计算

先算出总压力的两个坐标分量 P_x、P_z，它们的算法不同，下面分别讨论。

(一)　水平分力P_x的计算

考虑由曲面 cd、过曲面上边沿的水平面 dg，和过下边沿的铅垂面gc所隔离出的、在垂直纸面方向宽度为 b 的液体块之静止。

设作用在gc平面上的总压力为 P_{1x}，曲面cd对液块的总作用力沿x轴方向分量(如上所述)记为R_x，由液块静止的条件，此二力应平衡：

$$P_{1x}-R_x=0$$

$$R_x=P_{1x}$$

但液体作用在曲面上的总水平分压力P_x大小，应与其反作用力R_x相等，则

$$P_x=P_{1x}$$

而P_{1x}是作用在平面gc上的总压力，根据式(2-19)

$$P_x=(p_0+\gamma h_c)A_{yoz} \quad (2-23)$$

A_{yoz}是曲面在坐标平面yoz上的投影面积，它恰等于gc平面面积，而h_c则为平面gc形心的水深。

在不计表面压力情况下，上式成为

$$P_x=\gamma h_c A_{yoz} \quad (2-23)'$$

此式与式(2-23)即为计算和液体接触的曲面壁所受总压力之水平分力的公式。

(二)　垂直分力P_z的计算

在静止的液体内重新划出隔离体，这个被隔离的液体块，其界面由下列诸面所组成：曲面cd(垂直纸面方向宽为b)本身、经过曲面边沿的四个垂直平面，以及液体的自由界面ef(图2-22)。

列出隔离液块沿z轴方向的平衡条件：

$$R_z-P_0-G=0$$

P_0为自由界面ef上的总压力，G为被隔离液块所受的重力。上式可改写成

$$R_z=P_0+G$$

自由界面ef的面积就等于曲面在xoy坐标平面上的投影面积(记成A_{xoy})，液体重度为γ，液块体积为V，则

$$P_0=P_0A_{xoy}$$
$$G=\gamma V$$

代回上面式子

$$R_z=p_0A_{xoy}+\gamma V$$

但作用在曲面上的总压力之垂直分量P_z，应与其反作用力大小相等，从而

$$P_z=p_0A_{xoy}+\gamma V \tag{2-24}$$

在不计表面压力时，上式成为

$$P_z=\gamma V \tag{2-24$'$}$$

上式中的体积V叫做曲面的压力体，曲面上总压力的垂直分量，是与这一体积的液体所受的重力相关联的。由于它在垂直分力计算中的重要性，下面对它做几点说明：压力体是指由1)所研究曲面，2)由曲面边沿所作垂直母线组成的柱面，3)液体自由表面或其延伸面，三个面所限定的空间体积。而且把和润湿面处于同一侧的压力体，叫实压力体。实压力体对应于朝下的总垂直分压力(图2-23a)；把和润湿面处于两侧的压力体，则叫虚压力体。虚压力体与朝上的总垂直分压力相对应。

由式(2-23)与式(2-24)分别得出P_x、P_z后，则可按下式算得曲面上总压力P的大小：

$$P=\sqrt{P_x^2+P_z^2} \tag{2-25}$$

二、压力中心的确定

总水平分压力P_x的作用线是过A_{yoz}的压力中心的水平直线；总垂直分压力的作用线是通过压力体之重心的铅垂线。总压力作用线为通过两个分力作用线交点而与铅垂线成θ角的直线（图2-22），θ角由下式决定：

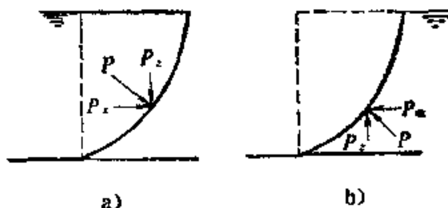


图2-23 实、虚压力体

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{P_x}{P_z} \tag{2-26}$$

总压力作用线与曲面之交点D，即为压力中心。

以上只考虑了二向曲面总压力的计算问题。对一般曲面还须考虑一个沿y轴方向的总水平分压力P_y，而它的计算与P_x完全类似：

$$P_y=(p_0+\gamma h_c)A_{xoz} \tag{2-27}$$

A_{xoz}为曲面在坐标平面xoz上的投影，h_c为此投影平面形心之水深。在一般情况下，我们无法把沿三个坐标轴方向的总压力再进一步合成一个单力，因而计算也只好到此为止了。只有在三个坐标轴方向之总压力，汇交于一点时才可以把它们合成一个单一的合力P：

$$P=\sqrt{P_x^2+P_y^2+P_z^2} \tag{2-28}$$

〔例2-5〕 图2-24所示为一贮水容器，其壁面上有三个半球形的盖，直径同为0.5m。如$h=1.5$m、$H=2.5$m试求作用在每个盖上的水的总压力。

〔解〕 对三个半球盖分别计算如下：

1） 底盖1

由于作用在半球上的水平分压力大小相等，而方向相反，故互相抵消。所以得：

$$P_{1x}=P_{1y}=0$$

总压力之垂直分压力：

$$P_{1z}=-\gamma V_1=-\gamma\left[\frac{\pi d^2}{4}\left(H+\frac{h}{2}\right)+\frac{\pi d^3}{12}\right]$$

$$=-9806\left[\frac{\pi\times0.5}{4}(2.5+0.75)+\frac{\pi\times0.5^3}{12}\right]\text{N}$$

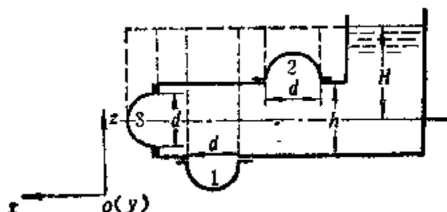


图2-24 贮水容器

$$=-6580\text{N}$$

总压力大小：

$$P=\sqrt{P_{1x}^2+P_{1y}^2+P_{1z}^2}=6580\text{N}$$

因球盖各点之水压力垂直球面，故作用线必汇交于球心，所以它们的合力之作用线也必经过球心，且与铅垂方向的夹角θ：

$$\theta=\text{arctg}\frac{\sqrt{P_{1x}^2+P_{1y}^2}}{P_{1z}}=\text{arctg}0$$

$$\theta=0$$

2） 顶盖2

它的总压计算可完全仿照底盖进行。水平分力：

$$P_{2x}=P_{2y}=0$$

垂直分力：

$$P_{2z}=\gamma V_2=\gamma\left[\frac{\pi d^2}{4}\left(H-\frac{h}{2}\right)-\frac{\pi d^3}{12}\right]$$

$$=9860\left[\frac{\pi\times0.5^2}{4}(2.5-0.75)-\frac{\pi\times0.5^3}{12}\right]\text{N}$$

$$=3040\text{N}$$

总压力大小：

$$P=3040\text{N}$$

合力作用线过球心与铅垂方向夹角：

$$\theta=180°$$

3） 侧盖3

总压力的水平分力：

$$P_{3x}=\gamma h_c A_{yoz}=\gamma H\frac{\pi d^2}{4}=9806\times2.5\times\frac{\pi\times0.5^2}{4}\text{N}=4805\text{N}$$

$$P_{3y}=0$$

总压力之垂直分力：

$$P_{3z}=-\gamma V_3=-\gamma\frac{\pi d^3}{12}=-9806\times\frac{\pi\times0.5^3}{12}\text{N}=-324\text{N}$$

总压力之大小：

$$P=\sqrt{P_{3x}^2+P_{3y}^2+P_{3z}^2}=\sqrt{4805^2+0^2+324^2}\ \text{N}=4815\text{N}$$

总压力作用线过球心、与铅垂方向夹角θ：

$$\theta=\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{P_{sx}^2+P_{sy}^2}}{P_{sz}}=\mathrm{arctg}\frac{4805}{324}=86^{\circ}$$

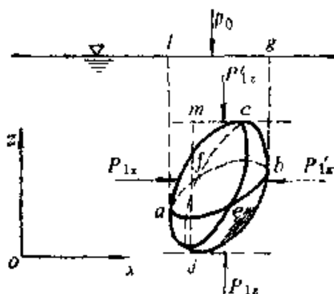


图2-25　阿基米德原理

［例2-6］ 如图2-25所示，为一淹没在静止液体中的固体，讨论此固体所受的总压力问题

［解］ 先计算总压力的水平分力。为此在固体的外轮廓上作平行X轴的水平切线，这些切线的切点将固体表面分成左、右两部分，dac与dbc。作用在dac上的总水平分压力P_{1x}，等于作用在它在yoz坐标平面上投影面积（为dm那么大）上之总压力；作用在dbc上总水平分压力P'_{1x}，等于它在坐标平面yoz上投影面积（也为dm那么大）上的总压力。P_{1x}与P'_{1x}大小相等、方向相反，故互相抵消。沿y轴方向的总水平分压力情况与X轴向的一样，也互相抵消了。故整个固体在水平方向不受力。

为计算总压力的垂直分力，在固体外轮廓上作垂直切线，切点把固体表面分成上、下两部分：acb与adb。作用于上表面部分的总垂直分压力P'_{1z}，等于压力体$acbgl$的液重γV_{acbgl}，方向朝下，即

$$P'_{1z}=-\gamma V_{acbgl}$$

作用于固体下表面部分的总垂直分压力P_{1z}，就等于压力体$adbgl$的液重，方向朝上，即

$$P_{1z}=\gamma V_{adbgl}$$

作用在整个固体上的总垂直分压力应为：

$$P_z=P_{1z}+P'_{1z}=\gamma(V_{adbgl}-V_{acbgl})=\gamma V_{adbc}$$

综上所述，静止液体作用在淹没固体上的总压力，方向朝上、大小等于固体所排开液体的重量。这就叫做阿基米德原理。

第六节　液体的相对静止

上面讨论了质量力只受单一的重力作用、相对于地面（惯性参考系）处于静止状态的液体之绝对静止问题.在工程上还常遇到所谓相对静止的问题：作用在液体上的质量力，除了重力还有其它力。而液体连同盛它的容器相对于地面在运动，但液体质点彼此之间，以及液体与容器之间却无相对运动．这时对与容器和液体固结在一起的参考系（非惯性系）来说，液体也处于静止状态．这种静止称为相对静止．本节讨论工程上常见到的两种液体的相对静止问题．分析其中压力的分布及等压面的形状等。

一、匀加速直线运动容器内液体的相对静止

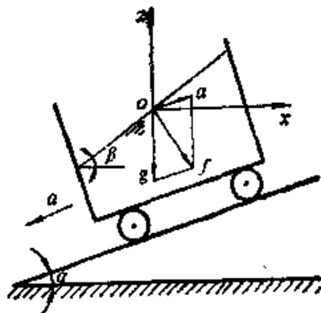


图2-26　匀加速直线运动容器中液体

盛有液体的容器，沿着与水平面成α角的斜面，以等加速度a作直线运动（图2-26）．取与容器一起运动的坐标系，并把原点o取在相对于容器静止的液体之倾斜自由界面，与绝对静止时之水平自由界面交线的中点。对这个坐标系，静止液体中每个质量为Δm的液体微团，受到两个质量力的作用：垂直朝下的重力$\Delta G=\Delta mg$和与加速度方向相反的惯性力$\Delta I=\Delta ma$。总质量力：

$$\Delta \mathbf{F}=\Delta m(\mathbf{a}+\mathbf{g})$$

作用于微团的单位质量力应为：

$$\mathbf{f}=\mathbf{a}+\mathbf{g}$$

参图2-26可得单位质量力之三个坐标分量

$$\left.\begin{array}{l} f_X=a\cos\alpha \\ f_Y=0 \\ f_Z=a\sin\alpha-g \end{array}\right\} \tag{2-29}$$

据此我们可求相对静止液体中之压力分布与等压面。

（一） 等压面

将单位质量力的三个坐标轴方向之分量式(2-29)，代入等压面微分方程(2-5)中得：

$$a\cos\alpha dx+(a\sin\alpha-g)dz=0$$

积分上式得等压面簇方程式：

$$a\cos\alpha x+(a\sin\alpha-g)z=c \tag{2-30}$$

这是一簇平行的平面，它们对水平面倾斜了一个角度β:

$$\mathrm{tg}\beta=\frac{dz}{dx}=\frac{a\cos\alpha}{g-a\sin\alpha}$$

$$\beta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{a\cos\alpha}{g-a\sin\alpha}$$

据自由界面条件：原点$x=z=o$落在其上，定出积分常数$c=0$代回式(2-30)得自 由界面方程：

$$a\cos\alpha x+(a\sin\alpha-g)z_s=0$$

或

$$a\cos\alpha x=(g-a\sin\alpha)z_s \tag{2-31}$$

式中 z_s——自由界面上各点的z坐标。

（二） 静压分布规律

把式(2-29)，代入式(2-4)得：

$$dp=\rho[a\cos\alpha dx+(a\sin\alpha-g)dz]$$

积分上式可得：

$$p=\rho[a\cos\alpha x+(a\sin\alpha-g)z]+c$$

然后利用边界条件：$x=0$、$z=0$时压力等于表面压力p_0，代入上式定出积分常数

$$c=p_0$$

代回上式得压力分布公式如下：

$$p=p_0+\rho[a\cos\alpha x+(a\sin\alpha-g)z] \tag{2-32}$$

可见液体中各点压力和表面压力p_0，该点x、z坐标及加速度a有关。

上式中x项可以通过式(2-31)，用自由界面上的垂直坐标z_s表示，则上式改写成：

$$p=p_0+\rho(g-a\sin\alpha)(z_s-z)$$

引入计压点在倾斜自由界面下的淹没深度$h=z_s-z$，压力公式成为：

$$p=p_0+\rho(g-a\sin\alpha)h \tag{2-32$'$}$$

式(2-32)′为绝对静止压力公式(2-7)的推广。因为绝对静止时$a=0$则式 (2-32)′就回到了式(2-7)，并且自由界面也恢复到了水平面。

把液体中各点至过原点的水平面之淹没深度记为h_0，自由界面至上述水 平 面水深记为h_s

（可正、可负），即$h=h_0+h_e$代入式(2-32)′得

$$p=p_0+\rho(g-a\sin\alpha)h_0+\rho(g-a\sin\alpha)h_e$$

由此可说，相对静止液体内一点压力，由三部分组成：自由界面上压力p_0、质量力垂直分量提供的部分$\rho(g-a\sin\alpha)h_0$及质量力水平分量部分$\rho(g-a\sin\alpha)h_e$。

〔特例1〕 若$\alpha=0$，即容器沿水平面作等加速直线运动（图2-27a）。此时，$\cos\alpha=1$，$\sin\alpha=0$，代入式(2-30)得等压面簇方程：

$$ax-gz=c \tag{2-33}$$

此为对水平面倾斜角$\beta=\text{arctg}\,\dfrac{a}{g}$的平行平面簇。加速度$a$越大，$\beta$也越大，即液面倾斜度也越大。

由式(2-32)′可得压力分布：

$$p=p_0+\gamma h \tag{2-34}$$

此式形状与绝对静止时完全一样，但注意由于惯性力的作用液面已变成倾斜平面了。

〔特例2〕 若$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，即容器垂直向下作等加速运动（图2-27b）。此时，$\cos\alpha=0$，$\sin\alpha=1$代入式(2-30)得等压面簇：

$$(a-g)z=c \tag{2-35}$$

式(2-35)表示等压面为水平平面簇。

由(2-32)′可得压力分布公式：

$$p=p_0+\gamma(1-\frac{a}{g})h \tag{2-36}$$

此式说明，压力小于绝对静止时之压力。实际由于此时作用在单位质量液体上之质量力$f=g-a$，小于重力，液体处于失重状态。此时尽管液面高度未变，但液面下单位截面上高度为h的液柱所受的重力却从γh降低为$\gamma h\left(1-\dfrac{a}{g}\right)$，因而液体中各点的压力均因液柱失重而有所降低。

〔例2-7〕 有一边长$b=0.6$m的方底柱形油箱，内盛$\gamma=8830\text{N/m}^3$的机油，深度$h=1$m，底面之半为带折页的活门（图2-28）。当油箱以$a=\dfrac{g}{2}$的加速度分别向左、向下运动时，试确定作用在活门上的总压力P及对活门枢轴的力矩M_s。

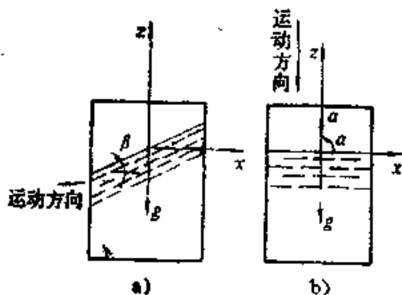


图2-27 均加速直线运动特例

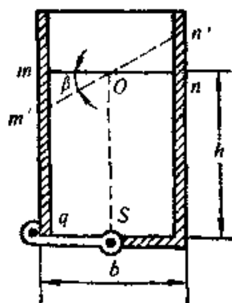


图2-28 方底柱形油箱

〔解〕

1. 向左运动时，液面为$m'n'$，它与水平面成夹角β：

$$\mathrm{tg}\beta=\frac{a}{g}=\frac{g/2}{g}=\frac{1}{2}$$

$$mm'=om\,\mathrm{tg}\beta=b\times\frac{1}{2}=b/2$$

A)活门qs上所承受之总压力，等于活门上方之液柱所受的重力：

$$P=\gamma(V_{somps}-V_{omm'o})=\gamma\left(\frac{b^2h}{2}-\frac{b^3}{16}\right)=1470\mathrm{N}$$

B)对活门枢轴s之力矩则为：

$$M_s=\gamma\left(\frac{b^2h}{2}\times\frac{b}{4}-\frac{b^3}{16}\times\frac{b}{3}\right)=215\mathrm{N\cdot m}$$

2. 向下运动时，液面为水平面mn

A)qs上所受总压力

$$P=\gamma\left(1-\frac{a}{g}\right)h\times\frac{b^2}{2}=\frac{1}{4}\gamma b^2h=795\mathrm{N}$$

B)对枢轴的力矩：

$$M_s=\gamma\frac{b^2h}{4}\times\frac{b}{4}=119\mathrm{N\cdot m}$$

二、等角速旋转容器中液体的相对静止

处于等角速旋转容器中的液体相对于容器的静止，也是相对静止。这里我们来讨论在与容器固结为一体的旋转坐标系里，相对静止液体中的等压面与压力分布问题。

首先分析相对静止液体中，作用在各液体质点上的质量力。然后把它代入静止微分方程，通过求积得出解答。下面讨论工程上常遇到两种情况：绕垂直轴旋转的容器中液体的相对静止与绕水平轴旋转的容器中液体之相对静止。

(一) 绕垂直轴旋转的容器中液体之相对静止

图2-29所示为一半径为R的圆柱形容器，内盛密度为ρ的液体。如令容器以等角速度ω绕中心轴旋转，起初液体被甩向四周形成凹陷的自由界面，然后液体就相对于容器静止了下来。取旋转轴为z轴，它和液面交点为原点o，x轴向右、y轴垂直纸面向内。使坐标系$oxyz$与容器固结在一起，也以角速度ω旋转。

这时作用在液体上的质量力，除沿负z轴方向之重力外还有沿容器半径方向之离心惯性力。按单位质量计算的这些力应为：

$$f_x=\omega^2x\quad f_y=\omega^2y$$
$$f_z=-g \tag{2-37}$$

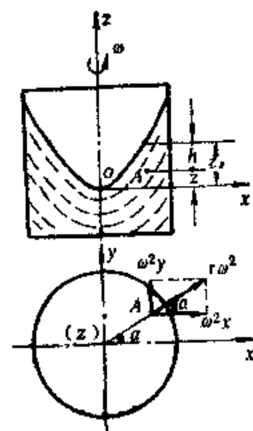


图2-29 绕垂直轴旋转的容器内之液体

1. 等压面

把质量力式(2-37)代入等压面微分方程(2-5)得

$$\omega^2x\mathrm{d}x+\omega^2y\mathrm{d}y-g\mathrm{d}z=0$$

积分后得：
$$\frac{\omega^2x^2}{2}+\frac{\omega^2y^2}{2}-gz=c$$

令$r^2=x^2+y^2$则上式可改写成：

$$\frac{\omega^2r^2}{2}-gz=c \qquad (2-38)$$

式(2-38)说明，等压面为一簇绕z轴的旋转抛物面。

因原点在自由界面上，故令$z=r=0$代入式(2-38)确定出对应常数$c=0$。把此结果代回式(2-38)，并用z_s记自由界面上z坐标则得自由界面方程为：

$$\frac{\omega^2r^2}{2}-gz_s=0 \qquad (2-39)$$

或

$$z_s=\frac{\omega^2r^2}{2g} \qquad (2-39)'$$

2. 静压分布规律

把式(2-37)代入式(2-4)得：

$$\mathrm{d}p=\rho(\omega^2x\mathrm{d}x+\omega^2y\mathrm{d}y-g\mathrm{d}z)$$

积分上式得：

$$p=\rho\left(\frac{\omega^2x^2}{2}+\frac{\omega^2y^2}{2}-gz\right)+c$$

$$=\rho\left(\frac{\omega^2r^2}{2}-gz\right)+c \qquad (2-40)$$

设液面压力为p_0，把边界条件$r=z=0$，$p=p_0$代入上式定出积分常数$c=p_0$，所以压力分布公式最后可写成：

$$p=p_0+\gamma\left(\frac{\omega^2r^2}{2g}-z\right) \qquad (2-41)$$

公式表明，此时静压随表面压力、水深并随角速度平方与半径的平方而增加。

由式(2-39)′知，式中$\frac{\omega^2r^2}{2g}=z_s$，为自由界面在坐标平面$oxy$以上的高度（图2-29），则式(2-41)可改写为：

$$p=p_0+\gamma(z_s-z)=p_0+\gamma h \qquad (2-41)'$$

可以看出，绕垂直轴等角速旋转容器中相对静止液体的压力公式(2-41)′与绝对静止液体中的压力公式(2-7)形式完全一样，但现在的淹没深度h是从抛物形液面算起的。

下面讨论两个特例：

〔特例1〕 有带盖的、满盛液体的容器，在盖中心处开口，如图2-30a。让该容器绕垂直轴作等角速度旋转时，液体虽因离心惯性力而有被向外甩的趋势，但由于受容器顶盖的限制，液面未能形成旋转抛物面。等压面簇依旧是绕z轴的旋转抛物面簇，只是比相同条件下的敞口容器中之同值等压面位置有所上移。

由于与上面具有同样的边界条件：$r=0$、$z=0$时$p=p_0$，故液体内各点的静压分布依旧

如式(2-41)。作用在顶盖上各点（$z=o$）压力，中心o点处为$p=p_a$，沿半径则$p=p_a+\frac{\omega^2r^2}{2g}$

边缘点B处压力最大$p=p_a+\gamma\frac{\omega^2R^2}{2g}$。可见旋转角速度$\omega$越大，边缘处液体静压力也越大。

作用在顶盖上各点的表压力为：

$$p_g=p-p_a=\frac{1}{2}\rho\omega^2r^2$$

沿半径成二次抛物线规律分布（图2-30a）。作用在整个顶盖上的总静压力，可通过积分求得：

$$P=\int_0^R p_g 2\pi r\mathrm{d}r=\int_0^R\left(\frac{\rho}{2}\omega^2r^2\right)2\pi r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}\rho\omega^2R^4$$

方向垂直顶盖向上。

［特例2］ 图2-30b为一盛满液体的、在顶盖边缘开口的旋转容器，它以等角速ω绕垂直轴旋转。液体虽因离心惯性而被向外甩，但因容器内同时产生的真空又把它吸住，所以液体并未从开口流出器外，而是同容器形成相对静止。

这时，等压面簇依旧是绕z轴的旋转抛物面簇，但是各面比相同条件下敞口容器中的同值等压面，位置沿z轴下降了一段距离。压力值等于p_a的等压面，为通过顶盖开口B处的ACB（图2-30b）。

把$r=R$、$z=0$时$p=p_a$代入式(2-40)定出积分常数c，可得压力分布规律：

$$p=p_a-\gamma\left[\frac{\omega^2(R^2-r^2)}{2g}+z\right]$$

如果只考虑顶盖上的压力分布，由上式可导出：

$$p=p_a-\gamma\frac{\omega^2(R^2-r^2)}{2g}$$

或

$$p_a-p=\gamma\frac{\omega^2(R^2-r^2)}{2g}$$

即顶盖处于真空状态，各点真空度按旋转抛物面规律分布（如图中箭头所示）。中心o真空度最大为$\gamma\frac{\omega^2R^2}{2g}$，且角速度$\omega$越大，真空度也越大。顶盖上总真空度为

$$P_v=\int_0^R p_v 2\pi r\mathrm{d}r=\int_0^R\frac{\rho}{2}\omega^2(R^2-r^2)2\pi r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}\rho\omega^2R^4$$

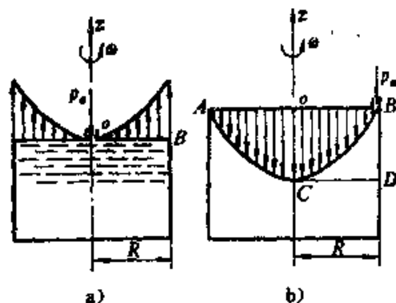


图2-30 顶盖开口容器中液体之相对静止

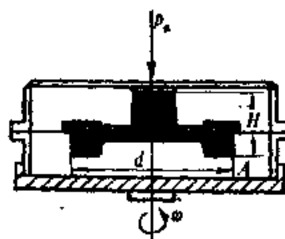


图2-31 离心铸造机

方向垂直顶盖朝下，为吸力。

［例2-8］ 在旋转容器内相对静止的液体中，压力随半径r与角速度ω的两次方而增大。根据这个原理，铸造工业为使铸件致密，应用离心铸造技术。图2-31所示，为铸造火车轮的装置。已知$\omega=20\pi 1/s$，$H=200mm$，$d=900mm$，铁水$\gamma=68600N/m^3$，试求车轮外缘A点的液体静压力。

［解］ 所述情况符合特例1的条件，故可用式(2-41)计算A点压力：

$$p=p_a+\gamma\left[\frac{\omega^2\left(\frac{d}{2}\right)^2}{2g}+H\right]=p_a+\gamma H+\gamma\frac{\omega^2 d^2}{8g}$$

$$=\left[101325+68600\times0.2+68600\times\frac{(20\pi)^2\times0.9^2}{8\times9.8}\right]\text{bar}=28.8\text{bar}=28.8\times10^5\text{Pa}$$

（二） 绕水平轴旋转的容器中液体之相对静止

设有一台正在运转的悬臂式离心泵，考虑处在叶轮外与泵壳内的空间c中的液体，可以认为它随叶轮像刚体似的以角速度ω转动着。如取与液体固结在一起的坐标系，则液体对此系处于相对静止状态，这正是绕水平轴旋转液体相对静止之一例。

如图2-32那样取坐标系，y轴沿泵轴取、z轴垂直向上、x轴与y、z轴组成右手系，原点取在旋转中心上。作用在液体上的质量力，仍旧是重力与离心惯性力。单位质量力沿坐标轴方向之分量，现在是

$$f_x=\omega^2 x \quad f_y=0 \quad f_z=\omega^2 z-g \tag{2-42}$$

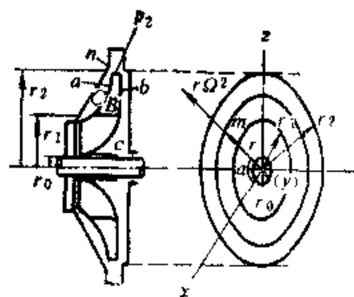


图2-32 离心泵简图

1. 等压面

把式(2-42)代入式(2-5)得：

$$\omega^2 x\mathrm{d}x+(\omega^2 z-g)\mathrm{d}z=0$$

积分后得等压面簇方程：

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2+z^2)-gz=c \tag{2-43}$$

或改写成：

$$x^2+\left(z-\frac{g}{\omega^2}\right)^2=c \tag{2-43$'$}$$

此式说明，等压面为其轴平行于y轴的圆柱面簇，公共轴线通过z轴上$\frac{g}{\omega^2}$点。

当转速较高时，重力比之离心惯性力可略去不计，则等压面方程成为：

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2+z^2)=c \tag{2-43$''$}$$

这是一簇公共轴线与y轴重合的圆柱面。

2. 静压分布规律

现在把式(2-42)代入式(2-4)得：

$$\mathrm{d}p=\rho[\omega^2 x\mathrm{d}x+(\omega^2 z-g)\mathrm{d}z]$$

积分后得压力分布规律：

$$p=\rho\left[\frac{\omega^2}{2}(x^2+z^2)-gz\right]+c \qquad (2\text{-}44)$$

如把液体所受的重力作用略去后，则得压力分布表达式

$$p=\rho\frac{\omega^2}{2}(x^2+z^2)+c=\rho\frac{\omega^2r^2}{2}+c \qquad (2\text{-}44)'$$

已知在$r=r_2$的工作轮出口处，压力$p=p_2$则可定出积分常数c：

$$c=p_2-\rho\frac{\omega^2r_2^2}{2}$$

把上式代回式(2-44)′得静压分布规律：

$$p=p_2-\frac{\rho\omega^2}{2}(r_2^2-r^2) \qquad (2\text{-}44)''$$

这是以y轴为旋转对称轴的旋转抛物面，可参看图2-33。

［例2-9］ 如图2-32所示，充满泵壳内空间c之相对静止的水施压力于叶轮的a、b两侧，因此在轴向产生一对叶轮的推力。按照下列数据求出这个轴向推力：

$r_0=30\text{mm}$、$r_1=77\text{mm}$、$r_2=154\text{mm}$、$p_1=-39240\text{N/m}^2$ 叶轮转速$\omega_0=152\text{s}^{-1}$，$p_2=225630\text{N/m}^2$、$\rho=1000\text{kg/m}^3$。

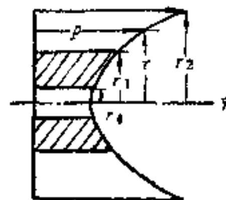


图2-33 压力图

［解］ 求解此题时，要作下列假定：

1°假 定c内水像刚体似地以角速度ω旋转，且设

$$\omega=\frac{1}{2}\omega_0$$

2°假定c内叶轮两面a、b压力分布规律相同。

在上述假定下，轴向推力应是半径r_1与r_0之间环形面积上前、后总压力之差。

在压力图2-33上，与r_1和r_0间环形面积对应部分，已用阴影线标出。

叶轮后面环形面积上的总压力：

$$P_{后}=\int_{r_0}^{r_1}\left[p_2-\frac{\rho\omega^2}{2}(r_2^2-r^2)\right]2\pi r\mathrm{d}r=\pi(r_1^2-r_0^2)\left[p_2-\frac{\rho\omega^2}{2}\left(r_2^2-\frac{r_1^2+r_0^2}{2}\right)\right]$$

$$=\pi(0.077^2-0.03^2)\left[22560-\frac{1000\times76^2}{2}\right]\left(0.154^2-\frac{0.077^2+0.03^2}{2}\right)\text{N}$$

$$=2638.51\text{N}$$

叶轮前面进口处环形面积上之总压力：

$$P_{前}=p_1(r_1^2-r_0^2)\pi=-39240\times(0.077^2-0.03^2)\pi\text{N}=-620\text{N}$$

轴向推力为上述二总压力之差：

$$P_{轴向}=P_{后}-P_{前}=[2638.51-(-620)]\text{N}=3258.51\text{N}$$

此力方向从叶轮后指向叶轮前。

习 题 二

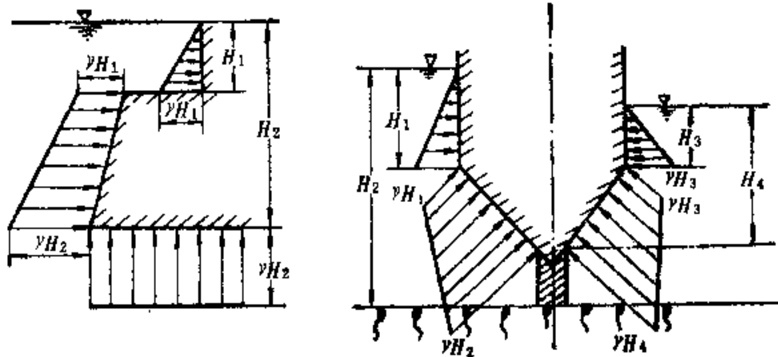
2-1 静止流体中应力的两大特点是什么？

2-2 静止流体的平衡微分方程的物理意义是什么？

2-3 静止流体的外力限制条件是什么？势函数与单位质量力有何关系？

2-4　什么是等压面，等压面的特征方程是什么？等压面与质量力有何关系？

2-5　根据静压力的两个特性和静压力计算公式，分析下图中压力分布图错在什么地方？



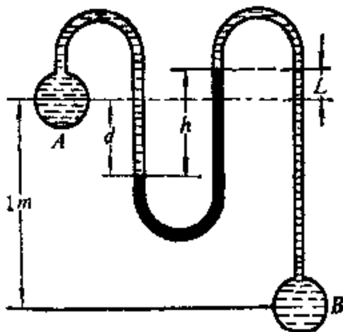
题2-5图

2-6　气压计压力为755mmHg柱时，求位于水面下7.6m深处的绝对压力。（$p=175280.55$Pa）

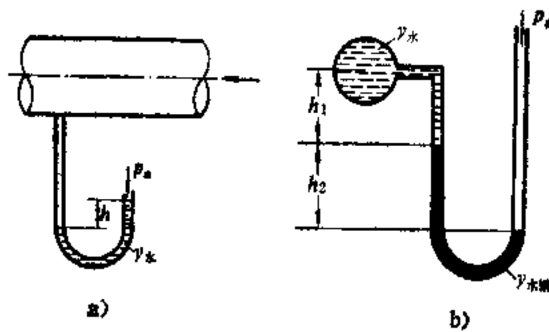
2-7　压差计中水银面高差$h=0.36$m其他液体为水A、B两容器高差为1m。试求A、B容器中心压力差p_A-p_B。

2-8　如图示，求 1）风管中气流的绝对压力。已知$h=85$cm　　　　（$p_A-p_B=34686$Pa）

2）吸水管中真空度。已知$h_1=20$mm，$h_2=50$mm。



题2-7图

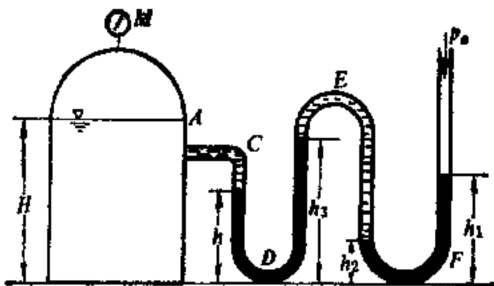


题2-8图

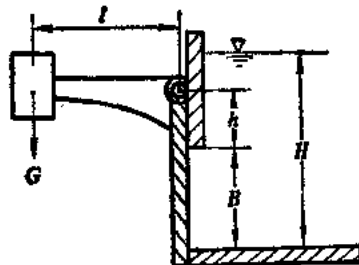
（1）$p_{绝}=106438.5$Pa　2）$p_A-p=6866.7$Pa）

2-9　圆筒A与多管压力计C、E两部分装的是水，D、F两部分装的是水银，压力计管口自由液面通大气，试求圆筒上压力表的读数。已知，$H=4$m，$h_1=1.1$m；$h_2=0.9$m；$h_3=1.3$m；$h_4=1$m。

（$p-p_a=33351$Pa）



题2-9图



题2-10图

2-10 贮水池中有一正方形闸门$B\times B=1\text{m}\times 1\text{m}$，铅垂放置借助荷重$G$，利用杠杆将闸门压紧，杠臂$l=1.6\text{m}$，$h=0.3\text{m}$为保持水位$H=2\text{m}$，求荷重$G$的数值。

($G=8436.6\text{N}$)

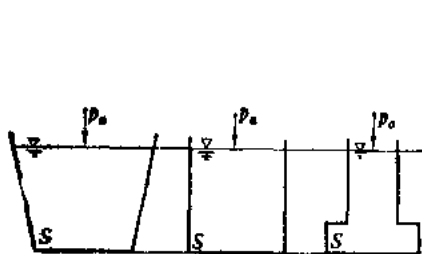
2-11 如图三容器中盛有水，其液面等高，底面积均同。试问三者底面上的总静压力是否相同？为什么？（试解释其压力与液体重力有无关系。）

2-12 盛水球体直径$d=2\text{m}$，求作用在螺栓上的力。

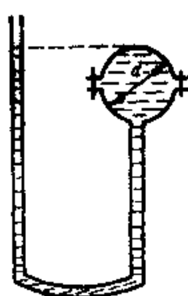
($P_{螺}=10273\text{Pa}$)

2-13 有一容器盛水如题图2-13所示，平壁$AB=CD=2.5\text{m}$。BC及AD为半个圆柱体，半径$R=1\text{m}$。自由表面处压力为一个大气压。高度$H=3\text{m}$。试分别计算各个壁面水作用力的大小及作用线的位置。

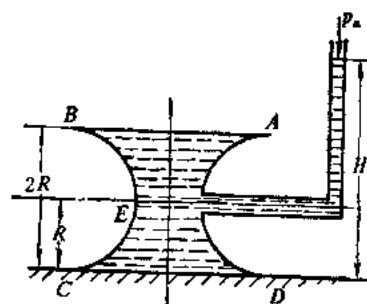
(AB面：$P=25000\text{N}$；DC面：$P=75000\text{N}$；BC面：$P=43000\text{N}$。)



题2-11图



题2-12图



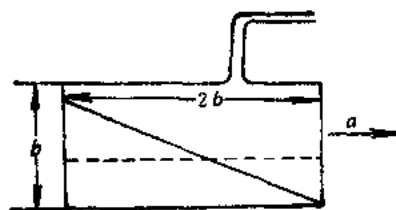
题2-13图

2-14 飞机汽油箱的尺寸$b\times 2b\times c$，油箱中装有其容积1/3的汽油，飞机以匀加速度a水平运动，试求能使汽油自由液面达箱底时的加速度数值。

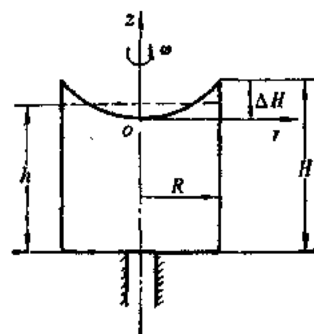
($a=\frac{g}{3}$)

2-15 如图一离心分离器其容器半径$R=15\text{cm}$，高$H=50\text{cm}$，水深$h=30\text{cm}$，若容器绕中心轴$o-z$等角速度旋转，试确定容器中水不溢出的极限转速。

($\omega=18.7\text{s}^{-1}$)



题2-14图



题2-15图

第三章　一元流动的理论基础

从本章起，我们开始讨论流体的流动问题。讨论流体流动的规律、流动流体与固体相互作用的规律，以及这些规律在工程实际中的应用。

表征流体流动的各种物理量，如密度、速度、压力（作用在流动的流体内部、单位面积上的压力，也叫流体动压力）等，总称为流动参数。流动参数的值，一般随着在流动空间（充满运动流体的空间）位置的不同而变化。即流动参数值是由流动空间中位置变量的值来确定的。如果有一个流动，其参数值只要一个空间变量就可被确定，则这个流动叫做一元流动。例如沿某管道的断面平均流动，就是一元流动。因为取管轴为坐标轴、取某起始断面中心作原点，则各断面流动参数（断面平均速度、压力等）值，可以用该断面沿坐标轴到原点的长度（一个空间变量）来确定。

从本章开始，我们用四章的篇幅，先来讨论比较简单的一元流问题。这一章介绍基础理论，后三章则属于实际应用。在基础理论部分，先介绍有关一元流的某些基本概念、然后根据物理学中的质量守恒原理、动能定理、动量定理与动量矩定理等，导出一元流中的几个非常重要的基本方程：连续性方程、伯诺里方程、动量方程和动量矩方程等，并举例说明它们的应用。

本章中所得（动力学方面）的结论，对理想流体与实际（粘性）流体是不一样的，必须注意区分。只有在那些不涉及到流体上的作用力的、流体流动（纯运动学）的问题中，所得结论才会对无论理想流体，还是实际流体都同样适用。

第一节　流体运动的描述方法

当有流体在流动空间运动时，我们的问题是如何描述流体运动的状态并把它用数学式子表达出来。在流体力学中，描述流体运动的方法共有两种：拉格朗日法和欧拉法。

一、拉格朗日法（随体法）

此法的基本点，是着眼于运动流体中的每个流体质点。随体跟踪每个运动流体质点，了解它们运动的全过程，描述出每一瞬时它们各自占据的空间位置。如果运动流体中，每个流体质点在空间中的位置随时间的变化规律都知道了，则整个流体的运动状况也就清楚了。

不难看出拉格朗日方法，是我们在理论力学中，研究质点或质点系运动时所经常采用的方法，只不过现在把它推广引用到流体中来而已。顺便指出，相应于此法常用到概念：流体质点、流体微团、流体系统等，它们均代表由流体质点所组成的物质实体。这些实体随着流体的运动，可以移位、变形，但它们将始终由同样的流体质点所组成并具有确定的质量。

现在我们把拉格朗日描述流体运动的方法，用数学式子表示出来。为此首先应设法把组成被考查运动的流体之各质点区别开来。通常采用初始时刻流体质点的坐标，作为区分不同流体质点的标志。设初始时刻$t=t_0$时，流体质点的坐标是$(a,\ b,\ c)$，则不同的a、b、c代

表不同的质点并在以后整个运动过程中皆以此标志区分它们。质点 (a, b, c) 在每一瞬时t占据的空间位置可表示为：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(a, b, c, t) \tag{3-1}$$

这就是描述流体运动的拉氏方法之数学表达式。$\boldsymbol{r}$为流体质点的矢径，在直角坐标系中，其分量为：

$$\left.\begin{aligned} x&=x(a, b, c, t)\\ y&=y(a, b, c, t)\\ z&=z(a, b, c, t)\end{aligned}\right\} \tag{3-1$'$}$$

如果固定a，b，c而令t变化，则从上式得到流体质点 (a, b, c) 的运动规律；如果固定t而叫a，b，c改变时，则上式表示的是同一时刻t、不同流体质点的位置分布。变数a，b，c，t称为拉格朗日变数。

流体质点的速度与加速度如记为$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{a}$，在拉格朗日方法中，可表示为：

$$\boldsymbol{v}=\frac{\partial \boldsymbol{r}(a,b,c,t)}{\partial t} \tag{3-2}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(a,b,c,t)}{\partial t^2} \tag{3-2$'$}$$

既然谈的是某一质点的速度与加速度，则a，b，c是固定的，因而上式中为质点矢径对时间的偏导数。在直角坐标系中，速度和加速度的坐标分量表达式为：

$$\left.\begin{aligned} v_x&=\frac{\partial x(a,b,c,t)}{\partial t}\\ v_y&=\frac{\partial y(a,b,c,t)}{\partial t}\\ v_z&=\frac{\partial z(a,b,c,t)}{\partial t}\end{aligned}\right\} \tag{3-3}$$

及

$$\left.\begin{aligned} a_x&=\frac{\partial^2 x(a,b,c,t)}{\partial t^2}\\ a_y&=\frac{\partial^2 y(a,b,c,t)}{\partial t^2}\\ a_z&=\frac{\partial^2 z(a,b,c,t)}{\partial t^2}\end{aligned}\right\} \tag{3-3$'$}$$

二、欧拉法（局部法）

用拉格朗日方法描述运动既烦且难，何况一般说来并无必要知道组成运动流体的全体质点，每一个的运动全过程。而常常是只需要知道在流动空间的某区域中，每个空间点上的流动和流动的变化规律。相应于上述情况，欧拉提出了较简便的流体运动的表示方法——欧拉法。

欧拉法着眼于流动空间中的每个点上，流体运动的描述。用不同时刻经过所考察流动空间中固定点的流体质点的速度，来描写该空间点处流体运动的状况。每一空间点处流体运动的情况都知道了，则整个空间的流体运动状况也就清楚了。在用欧拉法描述流动时，常用到

控制体概念。控制体是根据研究某流动问题的需要，而在流动空间中划分出的、具有固定的位置和形状的空间区域并把控制体的边界面称为控制面。

设在流动空间任意一点，它的矢径为$\boldsymbol{r}$。于某瞬时t该空间点处的流体运动状况，按欧拉的方法，可用下列数学式子表示：

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},\ t) \tag{3-4}$$

由于$\boldsymbol{r}$与t的任意性，上式实际也代表了被考虑整个流动空间中流体运动的状况。在直角坐标系中可写成：

$$\left.\begin{aligned} v_x&=v_x(x,y,z,t)\\ v_y&=v_y(x,y,z,t)\\ v_z&=v_z(x,y,z,t)\end{aligned}\right\} \tag{3-4$'$}$$

为了全面地描述运动流体的动力状态，可以类似地给出其它有关参数的表示法，如压力为

$$p=p(x,\ y,\ z,\ t)$$

当x，y，z固定，t变化时，上式表示流动空间中某固定点上速度、压力随时间的变化规律；t固定，x，y，z改变时，上式代表在某一瞬时速度与压力沿流动空间的分布规律。变数x，y，z，t叫做欧拉变数，而描写流动空间中流体运动的各参数（如速度、压力等）是欧拉变数的函数，也就是定义在流动空间中的向量与标量函数。因此充满运动流体的空间，就形成了各种流动参数场（速度场、压力场等），总称为流场。所以采用欧拉法描述运动时，就可以广泛地利用场论这个有力的数学工具。顺便指出，流场函数不依赖于坐标变量x，y，z $\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}=\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial z}=\cdots\cdots=0\right)$的称为均匀流场；反之叫做非均匀流场。若流场函数不依赖于时间变量t $\left(\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial t}=\cdots\cdots=0\right)$的则称为定常流场；反之叫做不定常流场。相应的流动则分别叫定常流动与不定常流动。

现在从欧拉法的运动表示式——速度公式出发，导出流体质点的加速度表达式。流体质点的加速度（记为$\boldsymbol{a}$）是流体质点在运动过程中，其速度对时间的变化率或导数，即

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

在欧拉法中速度是欧拉变数的函数，用式表出

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x,\ y,\ z,\ t)$$

这是在瞬时t、具有坐标（x，y，z）的流体质点之速度。在流体质点运动过程中，其坐标x，y，z是随时间而变化的，所以速度函数式中的x，y，z是时间t的函数。那么加速度式右端$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$，应作为复合函数求导数来做，并考虑到

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_x,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_y,\qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}v_z$$

则

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} \tag{3-5}$$

在直角坐标系中其分量形式为：

$$\left.\begin{aligned} a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{3-5'}$$

上式右端第一项是由于流场的不定常性引起的速度变化，称为局部加速度（导数）或就地加速度(导数)；右边其它项代表由于流场的不均匀性所引起的速度变化，称为位变加速度（导数）或对流加速度(导数)。

随着运动的流体求取的速度对时间的这种导数，叫做速度的随体导数。因此可以说，速度的随体导数就等于其局部导数与位变导数之和。这种可以将随体导数分解成局部导数与位变导数之和的论断，对任何矢量ζ及任何标量φ都是成立的：

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\zeta \tag{3-6}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \varphi \tag{3-7}$$

为了加强对随体导数的认识，兹引一流动简例加以说明。如图 3-1 为一水箱；底部装有由等径管段 AB 与变径管段BC组成的出水管路；后面装设溢水堰D及泄水孔E；上方为补水龙头 F。我们要研究的是管路中各截面上的平均流动，这是个一元流动。如果把管轴取为坐标轴、管进口截面中心A点取为原点，各截面坐标记为s。则速度v 可表示成s、t的函数：

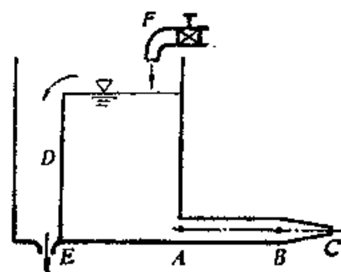


图3-1　流体的加速度

$$v = v(s,\ t)$$

由此导出加速度式为：

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s} \tag{3-8}$$

1）　开启进水龙头，超出堰顶的水将溢出、泄走，使水箱中水位保持恒定的堰顶高度。这时整个管流为定常流动，$v = v(s)$。从而局部加速消失$\frac{\partial v}{\partial t} = 0$，加速度式成为：

$$a = v\frac{\partial v}{\partial s}$$

在AB管段中，由于$v = \text{const}$则$\frac{\partial v}{\partial s} = 0$，那么$a = 0$，质点从$A$流向$B$时既无局部加速度，

也无位变加速度。故此管段中为定常的均匀流动；BC段中，因为$v=v(s)$则$\frac{\partial v}{\partial s}\neq 0$，那么$a\neq 0$。质点从$B$流向$C$时虽不存在局部加速度，但却存在位变加速度。此管段中为定常非均匀流。

2） 如果关闭水龙头，不给水箱补水，则箱中水位随着管路出流将逐渐降低。这时管路中将出现不定常流动，$v=v(s,\ t)$，加速度如式（3-8）。

在AB段中，$v=v(t)$则$\frac{\partial v}{\partial s}=0$，那么$a=\frac{\partial v}{\partial t}\neq 0$。质点从$A$流向$B$时，无位变加速度，但有局部加速度。此段中为非定常的均匀流；在BC段中，$v=v(s,\ t)$则$\frac{\partial v}{\partial t}\neq 0$ $\frac{\partial v}{\partial s}\neq 0$，$a\neq 0$，质点从$B$流向$C$时，既有局部加速度，也有位变加速度。此段中为非定常非均匀流。

上面介绍了描述流体运动的两种方法。欧拉法得到流场，使我们能利用场论这个工具进行流动的研究，而拉格朗日法则得不到流场。另外欧拉法中加速度$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$为一阶导数，相应的运动方程为一阶偏微分方程，而拉氏法中加速度$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t^2}$为二阶导数，相应的运动方程为二阶偏微分方程。显然一阶方程比二阶方程数学处理要容易些。况且在解决实际流动问题时，欧拉法常常显的更适用。比如要计算绕流时叶片的受力特性，解决这一问题只要知道叶片周围的速度和压力分布就可以了。由于上述原因，欧拉法在流体力学中获得了广泛的应用，也是本书中要采用的方法。在上述几方面拉格朗日法虽不如欧拉法优越，但用拉格朗日法研究流动可以得到比较多的结果，如直接得到质点的运动规律。另外在诸如点爆炸、计算流体力学的某些问题中，采用拉格朗日法更方便。即使在用欧拉场方法表示流动时，也常引用拉格朗日观点（即跟随流体质点或流体质点所组成的线、面、体考察运动的观点）于某些问题的处理中。例如随体导数概念，就是在应用拉格朗日观点基础上建立的。因此拉格朗日法也是不可忽视的。

第二节　关于流动的几个基本概念

一、迹线与流线

上一节介绍了流体运动的解析表示法。为了能几何直观地表示流体运动，这里我们引进迹线和流线两个概念，它们分别相应于拉格朗日法及欧拉法，是用这两个方法几何地描写流体运动的基础。

（一） 迹线

迹线是流体质点在运动过程中，于流动空间所描绘出的曲线，迹线也称轨迹。迹线表示流体质点运动所走的途径，它的切线方向，代表了流体质点在运动过程中，经过该点时的速度方向。所以迹线是流体质点运动规律的几何表示。迹线是在时间过程中形成的曲线。

在用欧拉法描写流体运动时，流体运动规律是用欧拉变数给定的：

$$v_x=v_x(x,y,z,t)$$
$$v_y=v_y(x,y,z,t)$$

$$v_z = v_z(x, y, z, t)$$

注意到流体质点的坐标是时间t的函数，并且三个坐标对时间的导数就应该分别等于速度沿三个坐标轴方向的分量，结合上述速度式，可以建立迹线微分方程：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=v_x(x,y,z,t),\qquad \frac{dy}{dt}=v_y(x,y,z,t),\\&\frac{dz}{dt}=v_z(x,y,z,t)\end{aligned}\right\}\tag{3-9}$$

式中 t——自变量；

x, y, z是t的函数。

上微分方程在积分后，消去时间t即得迹线方程。

在给定流场$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},\ t)$以后，迹线可用几何方法作出来。设在某一瞬时$t_1$，在运动流体中任取一个质点$A$位于图3-2a中1的位置，流场此时在该点速度为$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_1,\ t_1)$。经很小的时间间隔$\Delta t_1$后质点$A$于瞬时$t_2=t_1+\Delta t_1$，沿$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_1, t_1)$的矢量线运动到了位置2处。进而质点$A$在小时间间隔$\Delta t_2$中，将沿瞬时$t_2$、流场中2处的速度$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_2,\ t_2)$的矢量线，于$t_3=t_2+\Delta t_2$时刻运动到新位置3处，依此类推得一折线1，2，3……。令$\Delta t_i\to 0$时，折线趋向一条光滑曲线，就是在t_1时刻经过点1的流体质点之迹线。

若流场为定常时，由于整个流场中各点处速度不随时间改变，所以任何时刻经过点1处的任何流体质点都将沿线路1—2运动，并于时间间隔Δt_1后，到达2点处。继而该流体质点沿线路2—3向点3处运动……。则所得迹线仍为过1，2，3……等点的曲线。即说过点1(或流场中任一点）的迹线，位置与形状始终保持不变。反之，如流场为非定常的，由于流场各点速度是随时间而变化的，故经过流场中各点的迹线的位置，形状就也是随时间不断变化的。

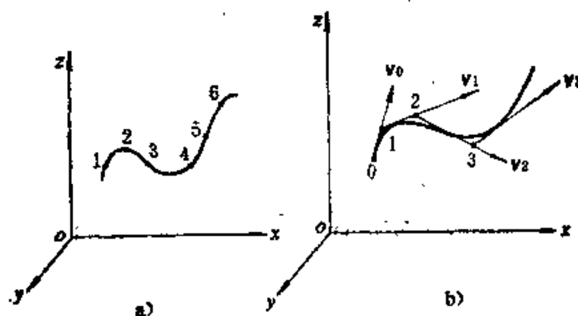


图3-2 迹线和流线

（二） 流线

流线是在某固定时刻流场中的瞬时曲线，曲线上任意点处的切线方向都与该瞬时处于那点上的运动质点的速度方向是重合的。流线给出那个瞬时，该线所经过流场中各点（串在该线上的诸流体质点）的运动方向。流线是流场的几何表示。我们指出流线是同一瞬时形成的曲线。

从流线定义出发，可以建立流线微分方程式。在流线上取有向线元$d\boldsymbol{r}=(dx,\ dy,\ dz)$，则$d\boldsymbol{r}\parallel\boldsymbol{v}$因此$d\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=0$，写成坐标轴分量的形式：

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ dx & dy & dz\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix}=0$$

即

$$\frac{dx}{v_x(x,y,z,t)}=\frac{dy}{v_y(x,y,z,t)}=\frac{dz}{v_z(x,y,z,t)}\tag{3-10}$$

这就是流线微分方程式。它是由两个常微分方程构成的方程组，x，y，z是自变量，t是参变

量。给定流场$v(x, y, z, t)$后，对x，y，z积分上式，即得流线方程。

流线也可采用几何作图的办法，把它在流场中作出。于某固定瞬时t，经过流场中任意一点o的流线可作出如下：首先绘出该瞬时o点的速度矢量v_0，在v_0矢量线上取与点0邻近的点1(图3-2b)，再于点1处作出流场在同一瞬时的速度矢量v_1，在v_1矢量线上邻近点1处取一点2，作同一瞬时点2速度矢量v_2，依此类推继续作下去可得一折线0，1，2，3…，令各节点间距离无限缩短而趋近于零时得一光滑曲线，此曲线即为瞬时t过流场中o点的流线。

由上述流线的作图法容易看出，当流场是定常时，过空间点o的流线之形状与位置是不随时间变化的，而且与过该点的迹线重合。但如流场为非定常时，过点o之流线一般说来其形状与位置是随时间而变化的并且不与迹线重合。除此之外，由于同一瞬时流场中各点上速度的唯一性所决定，流线不可能相交与折转（在流速为零的驻点与流速为无限大的奇点是例外）。

［例3-1］ 设有一流动，其流场为非定常：

$$v_x=x+t,\ v_y=-y+t,\ v_z=0$$

求$t=0$时刻过点（−1，−1）的流线与迹线。

［解］ 把速度分量代入式（3-10）得：

$$\frac{\mathrm{d}x}{x+t}=\frac{\mathrm{d}y}{-y+t}$$

式中t为参数，对x和y积分后可得：

$$(x+t)(-y+t)=c$$

c为积分常数，上式代表瞬时t流场中全体流线。$t=0$过点（−1，−1）的流线，只要把此数值代入积分结果中定出相应积分常数：

$$c=-1$$

则所求流线方程为：

$$xy=1$$

故流线为双曲线。

把流速的坐标轴各分量代入式(3-9)中得：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+t \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-y+t$$

这两个非齐次常系数线性常微分方程的通解为：

$$x=c_1e^{t}-t-1 \quad y=c_2e^{-t}+t-1$$

把$t=0$、$x=y=-1$代入上式，定出积分常数$c_1=c_2=0$则时刻$t=0$过流场中(−1，−1)点的流体质点之迹线为：

$$x=-t-1 \quad y=t-1$$

或消去t后得迹线方程：

$$x+y=-2$$

故迹线为直线(它与过同点之流线不同)。

二、流管、流束、元流与总流

下面在流线基础上引入一元流中常用到的一些概念与量，对它们加以定义和说明，为后面的讨论提前作好准备。

（一） 流管与流束

在流场中取一封闭曲线c(非流线)，在同一时刻过曲线c上各点作流线，则这些流线形成一管状曲面(图3-3)，称为流管。管内的全部流体则叫做流束。

由于流线不能相交，故流管内、外流体不能穿越流管流动，流管正象一个固壁的管子一样。流管与流束只有瞬时意义，因为在非定常流场中它们随时间改变形状及位置，只是在定常流场中它们才不随时间变化。

（二） 元流与总流

若把形成流管的封闭曲线c取为无限小时，则相应的流管也无限小，此微小流管中的流束，称为元流。元流情况简单，便于分析并且对元流所得结果是进一步分析复杂流动的基础。

在工程实际中所碰到的流动，如管道中、渠道中的流动或大气中的射流等，这种在边界面（固体界面或另一种流体界面）内的整股流动，称为总流。总流均可视为是由无数元流所组成的总体。

三、过水断面、流量与断面平均流速

（一） 过水断面

与元流垂直的横断面，叫做元流的过水断面。因其很小，其上流动参数的分布可认为是均匀的。与汇成总流的诸元流皆垂直的总流横断面，称为总流过水断面。在元流互相平行的地方，过水断面为平面，否则为曲面(图3-4)。

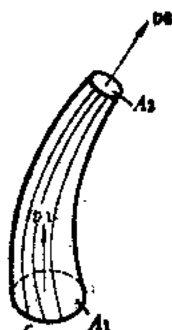


图3-3 流管与流束

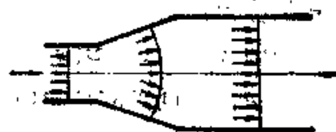


图3-4 总流过水断面

（二） 流量与断面平均流速

单位时间内通过某一过水断面的流体量，称为经过该断面的流量。流体量可用体积、与质量来计量，故流量可分成体积流量(m^3/s)和质量流量kg/s。通常说到流量多指体积流量。

对元流某过水断面面积dA，其上各点速度大小为v、方向与dA垂直，则该过水断面流量dq_V为

$$dq_V = v dA$$

对总流来说，通过过水断面A的流量q_V，等于通过组成它的诸元流之相应过水断面流量dq_V的总和，即可用下式表示

$$q_V = \int_A dq_V = \int_A v dA \tag{3-11}$$

对于元流在过水断面上流速均匀分布，故对其流动进行分析与计算时非常简便。但总流过水断面上的流速分布一般是不均匀的（如管道流动靠近管壁速度小，靠近管轴速度大），

这在总流的分析与计算中常常带来困难。比如在总流流量计算中，从式(3-11)知，必须先确定速度沿断面的分布规律，但即使象管流这么简单的总流，要确定速度在过水断面上之分布也不是很容易的事。故在工程计算中，为了简化问题引进断面平均流速的概念。所谓断面平均流速是指过水断面上的一个假想流速，断面上各点流体都以此速度运动时的断面流量，与该断面的真实流量相等。即

$$\bar{v}A=q_V$$

或

$$\bar{v}=\frac{q_V}{A} \tag{3-12}$$

式中 $\bar{v}$——断面平均流速。

断面平均流速有的地方比真实流速大，有的地方则比它小(图3-5)，用式子表示为：

$$v=\bar{v}+\Delta v$$

在过流断面的不同部位，Δv可正（图3-5中央部分）也可负(图3-5近壁部分)。

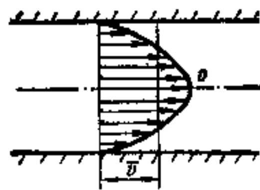


图3-5 过水断面流速图

第三节 流动的分类

自然界和工程实际问题中的流体流动，呈现出各种类型。不同类型的流动遵循不同的规律，而且对不同类型流动的研究，须采用不同的方法。所以把书中所涉及的流动加以分类，则更便于讨论。本节仅就与一元流动有关的流动分类加以说明。

一、定常流与非定常流

我们采用的描述流动的欧拉法，实际上是场的方法，各流动参数可被确定为欧拉变数(x, y, z, t)的函数，如$v=v(x, y, z, t)$，$p=p(x, y, z, t)$等。即是说在所考察区域内流动，一般是除随空间点的位置(x, y, z)变化外，还随时间t而变化的。但也有些流动是不随时间变化的，如在第一节中已叙述过的那样称为定常（稳定）流动。反之，随时间变化的流动，叫做不定常（不稳定）流动。

二、一元流动、二元流动与三元流动

一般流动都是在三维空间中的流动，流动参数是空间三个自变量的函数，这种流动称为三元流动。而流动参数只依赖于空间两个变量的流动叫二元流动，依赖于空间一个变量的流动则叫一元流动。

流动参数作为空间变量的函数，自变量的数目越少越容易处理。因而对工程实际问题，在保证一定精度条件下，尽可能把问题简化成低元问题来求解(参本章前言)。

三、缓变流动与急变流动

如果存在流动，其流线之间夹角很小、流线的曲率也很小（即流线为一些近乎平行的直线）时，这样的流动沿流程流动速度无论大小或方向变化都很缓慢，这种流动被称为缓变流动。反之，如果流线间夹角较大或流线曲率较大，则沿流程流速大小或方向变化就将剧烈，这种流动称为急变流动。在如图3-6所示管路流动中，既存在缓变流也存在急变流。

定常流中的缓变流过水断面近似为平面，且在其上，压力分布服从流体静力学规律。为

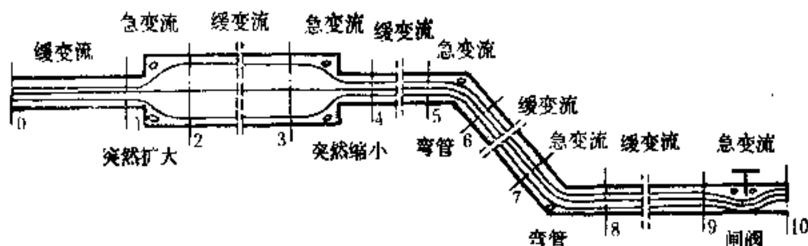


图3-6　缓变流与急变流

说明此问题，在两条穿过缓变流（过水）断面的相邻流线间、以缓变流断面为对称面，取出一微小流体圆柱(图3-7)，底面积dA、长为dh。应用达朗贝尔动平衡原理于柱轴方向：作用在圆柱上所有外力沿柱轴方向投影之和应为零。由于缓变流条件，惯性力可以略去不计，则只要考虑压力同重力的平衡，即

$$pdA-(p+dp)dA+\gamma dAdh\cos\alpha=0$$

$$-dp-\gamma dz=0$$

$$z+\frac{p}{\gamma}=c$$

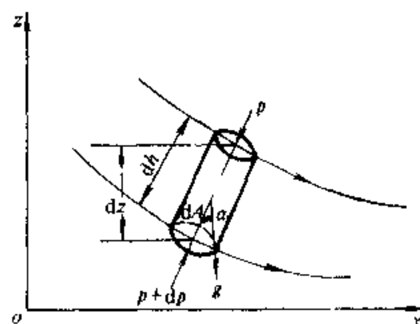


图3-7　缓变流中小柱体的受力

这正与流体静压力分布规律相同。

四、有压流动与无压流动

对于液流还可以根据边界面的情况分成有压流动与无压流动两种类型。

如果液流的每个过水断面的整个周界都为固体所限定，那么这种液体流动就叫做有压流动。各种管中充满液体的流动（自来水管与泵吸、压水管中的流动），都是有压流动。

如果液流每个过水断面的部分周界为固体所限定，而其余部分则是自由界面时，则把这种液体流动称为无压流动。如水槽中的液流、各种不满管的管中液体流动，都是无压流动的例子。

第四节　一元流的连续性方程

运动流体也象其它运动物质一样必须遵循质量守恒的普遍规律，这个规律在流体力学内是用一个方程式来表示的。因为在导出这个方程中，同时考虑到流体连续的特性，所以把这个方程就叫作连续性方程了。对不同类型的流动，连续性方程有不同的表现形式，下面让我们先来导出一元流的连续性方程。

一、元流连续性方程

在定常流中取出一元流(如图3-8)，dA_1、dA_2为元流上、下游两过水断面，ρ_1、ρ_2与v_1、v_2则分别代表两过水断面上密度与速度。单位时间内从两过水断面流进、流出元流段1-2的流体质量为$\rho_1v_1dA_1$、$\rho_2v_2dA_2$，由于流动定常则元流的形状与位置，元流段1-2中的流体质量均不会随时间改变，元流侧面不可能有流体穿越，因此根据质量守恒定律及流体的连续性导出：

$$\rho_1v_1dA_1=\rho_2v_2dA_2 \tag{3-13}$$

或

$$\rho v \mathrm{d}A = \mathrm{const} \qquad (3\text{-}13)'$$

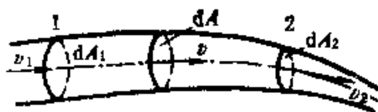


图3-8 元流连续性方程

这是在定常流条件下，元流的连续性方程式。它说明，在定常流中通过元流各个过水断面的质量流量不变。

如果流体还是不可压缩的，即 $\rho_1=\rho_2=\mathrm{const}$ 则式(3-13)与式(3-13)′可化成：

$$v_1\mathrm{d}A_1 = v_2\mathrm{d}A_2 \qquad (3\text{-}14)$$

$$v\mathrm{d}A = \mathrm{const} \qquad (3\text{-}14)'$$

这是不可压缩流体元流的连续性方程。它说明沿元流、各过水断面的体积流量即流速与过水断面乘积为一常数。在不可压缩条件下，对不定常元流式(3-14)与式(3-14)′也是成立的。

二、不可压缩总流的连续性方程

现有一不可压缩流体总流，在其上、下游各取一过水断面Ⅰ、Ⅱ，设其面积分别为 A_1 与A_2。总流可以看成是由无数元流汇集成的，每一元流在总流过水断面Ⅰ、Ⅱ上都截出一小过水断面，面积分别记 dA_1、dA_2，如果那里流速为v_1与v_2时，由上段所述，该元流的连续性方程即是

$$v_1\mathrm{d}A_1 = v_2\mathrm{d}A_2$$

把所有组成总流的元流之上述关系迭加起来，即沿过水断面积分起来，可导出总流的一关系式：

$$\int_{A_1} v_1\mathrm{d}A_1 = \int_{A_2} v_2\mathrm{d}A_2$$

由式(3-11)，上式可写成：

$$q_{V1} = q_{V2} \qquad (3\text{-}15)$$

或

$$q_V = \mathrm{const} \qquad (3\text{-}15)'$$

由式(3-12)，上式又可最后改写成：

$$\bar{v}_1 A_1 = \bar{v}_2 A_2 \qquad (3\text{-}16)$$

或

$$\bar{v} A = \mathrm{const} \qquad (3\text{-}16)'$$

式(3-15)与式(3-16)是不可压缩总流连续性方程的两种不同形式。式(3-15)说明沿总流各过水断面流量不变；式(3-16)则告诉我们沿总流过水断面面积与断面平均速度成反比，过水断面面积大的地方平均流速小，过水断面面积小的地方平均流速大。式(3-15)或式(3-16)是对一元总流进行分析、计算的最基本与最常用的公式之一，下举一例以示应用。

［例3-2］ 一输水管由两段直径不同的管子组成(图3-9)。已知 $d_1=40\mathrm{cm}$，$d_2=20\mathrm{cm}$，若在第一管段中平均流速为1m/s，试确定第二管段中的流速。

［解］ 管中水流为一总流，在第一管段与第二管段各取一过水断面A_1、A_2，断面平均流速记为 $\bar{v}_1$、$\bar{v}_2$，列出流动连续性方程：

$$A_1\bar{v}_1 = A_2\bar{v}_2$$

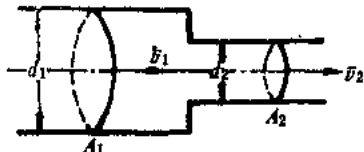


图3-9 不同直径水管

由此得出 $\bar{v}_2 = \bar{v}_1 \dfrac{A_1}{A_2} = \bar{v}_1\left(\dfrac{d_1}{d_2}\right)^2$

把题中所给数据代入上式则

$$v_2=1\times\left(\frac{0.4}{0.2}\right)^2\mathrm{m/s}=4\mathrm{m/s}$$

第五节　元流的伯努里方程

能量的转化与守恒定律是自然界物质运动的普遍规律。流体运动的能量方程，则是这一普遍规律在流体运动中的具体体现。由于这一方程是瑞士科学家伯努里于1738年首先提出来的，所以在流体力学中通常称它为伯努里方程。在这一节中，首先建立元流的伯努里方程，然后讨论它的应用。

一、伯努里方程的建立

根据一般力学中的动能定理：运动物体在某一时间段内动能的增量，等于同一时间段内作用在运动物体上的全体外力所作的功之总和。用数学式表达为：

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\Sigma W \tag{A}$$

式中　m——运动物体的质量；

v_0——运动物体的初速度；

v——运动物体的末速度；

ΣW——全部外力对运动物体作功之总和。

设有一定常、质量力只受重力作用的不可压缩流体元流，沿流取二过水断面1，2，其上流速与压力分别为v_1、v_2；p_1、p_2，断面积dA_1、dA_2，面积中心距基准面之高度分别为z_1与z_2（图3-10）。对断面间的流段1-2，动能定理可叙述如下：某时间段dt内流段动能之增量，应等于同时间段内诸外力对流段所作的功之总和。由此便可导出伯努里方程来了。

在时间段dt内设元流段1-2，运动到1′-2′的位置（参图3-10），现分别计算在时段dt内，元流段功能的增量及所有作用在流段上外力作功的总和。

(一)　动能增量

由于元流为定常，在dt时间内，流段1′-2内这部分流体的动能不会变化，所以该时间内整个流段的动能增量仅为流段2-2′与流段1-1′动能之差。

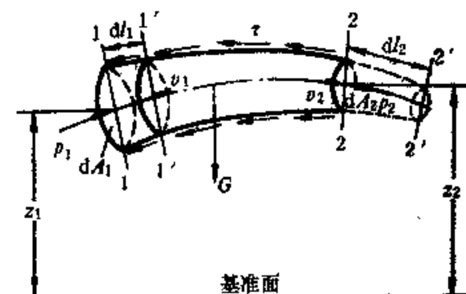


图3-10　元流伯努里方程

1-1′流段动能为$\frac{1}{2}dm_1v_1^2=\frac{1}{2}\rho dq_{V1}dtv_1^2$，$dq_{V1}$为断面1上的体积流量；同理2-2′流段之动能$\frac{1}{2}dm_2v_2^2=\frac{1}{2}\rho dq_{V2}dtv_2^2$。由不可压缩流体元流的连续性方程$dq_{V1}=dq_{V2}$记为$dq_V$，则整个流段在$dt$时间内动能增量为：

$$\frac{1}{2}dm_2v_2^2-\frac{1}{2}dm_1v_1^2=\frac{1}{2}\rho dq_V dt(v_2^2-v_1^2) \tag{B}$$

功

（二） 外力作功总和

在流段1—2上作用着力有：体积力 —重力；表面力 —压力与摩擦阻力。下面分析并计算各种力所作之功：

1． 重力作功W_1

一个在重力场中运动的物体，重力对它作的功就等于该物体位置势能的减少值。

所考察的流体段1—2在时间dt内位移到了1′—2′时，根据上述原理，重力对流段所作之功，如令E_Z代表位置势能并注意流动为定常则可计算如下：

$$
\begin{aligned}
W_1 &= E_{z1-2} - E_{z1'-2'} \\
&= (E_{z11'} + E_{z1'-2}) - (E_{z1'-2} + E_{z2-2'}) \\
&= E_{z1-1'} - E_{z2-2'} \\
&= \gamma \mathrm{d}q_V \mathrm{d}t (Z_1 - Z_2)
\end{aligned}
$$

式中 γ——流体重度；

$\mathrm{d}q_V$——元流体积流量。

2． 压力作的功W_2

元流侧表面上作用着的压力，因与运动方向垂直故不作功。元流过水断面1与2上作用的压力与运动方向平行，因此是作功的。

断面1上压力p_1，总压力则应为$p_1\mathrm{d}A_1$。断面1在dt时间内，从1运动到1′，移动距离dl_1，总压力作功$p_1\mathrm{d}A_1\mathrm{d}l_1$；断面2上压力$p_2$，总压力$p_2\mathrm{d}A_2$。断面2在d$t$时间内，从2运动到2′，移动距离d$l_2$，总压力与运动方向相反，作负功为$-p_2\mathrm{d}A_2\mathrm{d}l_2$。压力所作总功为：

$$W_2 = p_1\mathrm{d}A_1\mathrm{d}l_1 - p_2\mathrm{d}A_2\mathrm{d}l_2$$

而
$$\mathrm{d}A_1\mathrm{d}l_1 = \mathrm{d}A_2\mathrm{d}l_2 = \mathrm{d}q_V\mathrm{d}t$$

所以
$$W_2 = (p_1 - p_2)\mathrm{d}q_V\mathrm{d}t$$

3． 摩擦阻力作功W_3

流体摩擦阻力情况比较复杂，暂不作深入讨论。目前我们只要注意，它总是与流动方向相反，因而它总是对流体运动作负功。当所考虑的流体段，从原位置1—2移动至新位置1′—2′时，摩擦阻力对它所作之功W_3，对定常流动来说，就等于微流体段1—1′历经全程运动至2—2′时，沿程摩擦阻力对它所作之总功。因此，如令$-h'_w$表示摩擦阻力对微流段平均按单位重力流体计算沿全程1—2所作之功时，那么

$$W_3 = -h'_w\gamma\mathrm{d}q_V\mathrm{d}t$$

现在我们可以计算作用在整个运动流体段1—2上的总功了。即

$$
\begin{aligned}
\Sigma W &= W_1 + W_2 + W_3 \\
&= (z_1 - z_2)\gamma\mathrm{d}q_V\mathrm{d}t + (p_1 - p_2)\mathrm{d}q_V\mathrm{d}t - h'_w\gamma\mathrm{d}q_V\mathrm{d}t \qquad (C)
\end{aligned}
$$

把式(B)与式(C)代入动能定理式(A)中得：

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)\rho\mathrm{d}q_V\mathrm{d}t = (z_1 - z_2)\gamma\mathrm{d}q_V\mathrm{d}t + (p_1 - p_2)\mathrm{d}q_V\mathrm{d}t - h'_w\gamma\mathrm{d}q_V\mathrm{d}t$$

双边除以流体重力$\gamma\mathrm{d}q_V\mathrm{d}t$，则得单位重流体的关系式：

$$\frac{1}{2g}(v_2^2 - v_1^2) = (z_1 - z_2) + \frac{1}{\gamma}(p_1 - p_2) - h'_w$$

或经整理后，最后可写成：

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}+h'_w \qquad (3-17)$$

这就是在重力作用下的不可压缩流体、定常元流的伯努里方程。它表明沿元流各断面位置高度z，压力p及流速v三个运动参数之间的变化规律。伯努里方程是一元流动问题中的一个主要关系式，并且在整个定常、不可压缩流体力学领域内也具有根本的重要性。

二、伯努里方程的物理意义

在讨论流体静力学基本方程的物理意义时，我们已经弄明白了：z代表单位重流体的位置势能、$\frac{p}{\gamma}$代表单位重流体的压力势能，而$z+\frac{p}{\gamma}$则代表了单位重流体的总势能。

流体在运动情况下，除了具有势能以外，还具有动能。当流速为v、质量为m的流体在运动时，它（重力为mg）所具有的动能为$\frac{1}{2}mv^2$，按单位重流体来说，所具有的动能则应为$\frac{\frac{1}{2}mv^2}{mg}=\frac{v^2}{2g}$。故能量方程中$\frac{v^2}{2g}$项，代表单位重流体所具有的动能。而$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}$，代表单位重运动流体所具有的总机械能。

h'_w是单位重流体从断面1沿元流流到断面2过程中，为了克服流动阻力作功而消耗掉的机械能。这部分机械能转化为热，而散失掉了，叫作阻力损失。

式(3-17)的物理意义是：流体沿元流从一个断面流到另一个断面时，位能、压能与动能可以互相转化，但在流经前一个断面时流体所具有的单位总机械能，应等于它在流经后一个断面时所具有的单位总机械能，与流体在流经两断面之间过程中的单位阻力损失之和。换句话说，在定常条件下，沿元流方向流体单位总机械能总是减小的。式(3-17)反映了机械能既转化又守恒的关系，实质上它就是能量转化与守恒这一普遍规律。

三、伯努里能线图

伯努里方程中各项都具有长度的量纲，因此在每个断面上各项能量的大小，可以用线段的长短表示出来。如果沿元流诸断面把各项能量以相应的直线段用图画出，则可以一目了然地看出能量沿断面、沿流程的变化情况。表示伯努里方程中各项能量沿各断面和沿元流流程变化的这种图线，就叫做伯努里能线图。

伯努里能线图可以如下画出：选定水平基准面，由此面垂直向上画出z轴。沿元流取若干过水断面，标出每个断面的中心，并求出这些断面上的压力与流速。过各断面中心作垂直水平基准面的竖直线，由基准面至断面中心的竖直线段之长代表单位位置势能z值，由断面中心沿竖直线向上截取与单位压力势能$\frac{p}{\gamma}$相应的线段长度，然后继续向上截取与单位动能值$\frac{v^2}{2g}$相应的线段长(图3-11)。把各断面上表示不同单位能量的竖直线段之末端用线连接起来，便得到了沿元流的三条曲线(参上图)。

现在我们分别来说明三条线的意义：

(一) 位置势能线（位置水头线）

该线在选定的水平基准面之上的位置高程，是元流各断面的单位位置势能的度量。

（二） 总势能线（测管水头线）

该线在水平基准面以上之高程，用以度量元流沿程各断面的单位位置势能与单位压力势能之和（即总势能）的大小。至于单位压力势能本身的大小，则可用总势能线与位置势能线之间的竖直线段长短来度量。

（三） 总能线（动力水头线）

此线在水平基准面以上的高程，是单位总势能与单位动能之和的度量。而总能线与总势能线之间的竖直线段之长，表示各断面处单位动能的大小。由于沿程克服摩擦阻力作功而消耗了流体质点的一部分机械能，所以流体质点的单位总能沿着流动方向不断减小，故而总能线沿流动方向总是下降的。常把沿流程单位长度总能线下降的量h_w'叫作水力坡度（记为J）。J可以描写沿流程阻力损失分布情况。

从伯努里能线图上可以清楚地看出：在每个断面上各种能量的分配，以及它们和总能量沿流程的变化情况。应该注意到，沿流程总能量虽然在减小，但并不一定那种具体能量就肯定会减少，甚至某种能量局部地还可能增加。

四、伯努里方程应用举例

（一） 容器小孔射出水流的速度

图3-12为一水箱，在近底部的侧壁上开有一个小孔，水在重力作用下从小孔射出，现要求射流速度。

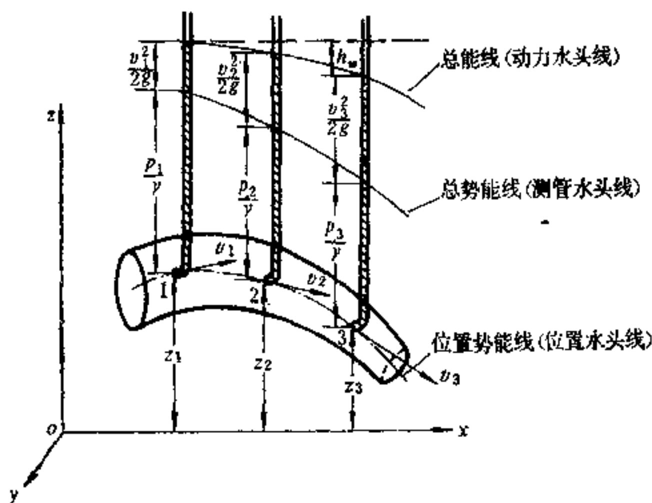
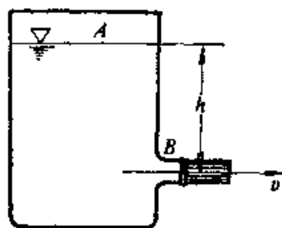


图 3-11 伯努里能线图


图 3-12 水箱小孔射流

追溯组成射流的诸元流，它们都通到自由界面上。当水从孔口外射时，自由界面则缓慢下降。自由界面与射出之水流皆受到大气压p_a的作用。

选取过小孔中心B处之元流，它起于自由界面上之A处。沿此元流对A、B处二断面写出伯努里方程。

$$z_A+\frac{p_a}{\gamma}+\frac{u_A^2}{2g}=z_B+\frac{p_a}{\gamma}+\frac{u_B^2}{2g}+h_w'$$

由于$u_A^2 \ll u_B^2$故可把$\frac{u_A^2}{2g}$略掉，并在这个问题中h_w'也为一小量，所以也可不必计及。则上方程简化成：

$$z_A=z_B+\frac{u_B^2}{2g}$$

所以

$$v_B=\sqrt{2g(z_A-z_B)}=\sqrt{2gh}$$

可见，从比自由界面低h的小孔出流的速度与质点从h高度自由落下所能达到的速度一样。这一关系式在物理学中叫做托里拆利定理。

（二） 皮托管原理

设在以均匀速度v水平流动的流体中有一障碍物（如图3-13），流动因而受阻，流体将绕过障碍物运动，但在受阻的中心区存在一点（驻点）流动就完全停止，记该点压力为p_0，叫做总压。在终止于驻点的元流上、障碍物远前方未受到扰动的一点处，流速为v、压力设为p，称为静压。水平基准面取过驻点，对元流上驻点与未受扰动点写成伯努里方程（不计阻力损失）为：

$$0+\frac{p_0}{\gamma}+\frac{0^2}{2g}=0+\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}$$

上式可导出速度计算公式

$$\frac{p_0}{\gamma}=\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g} \tag{3-18}$$

此式是液柱高形式的压力关系：总压等于静压与由运动转化来的动压之和。

$$v=\sqrt{2g\left(\frac{p_0-p}{\gamma}\right)} \tag{3-18)'}$$

不难理解p_0实际上代表元流上各点的总压，特别是它也代表未受扰动那点的总压。所以只要能设法测出流动中一点之静压与总压，则该点流速即可通过式（3-18）确定。

静压可以用一根测压管来测量。总压则可用一根弯成90°的管子来测，使管子一端开口正对来流（图3-14），当液体沿管上升一高度H后停止升高，管口处便形成一驻点。管中液高

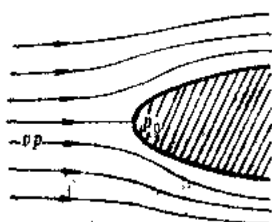


图 3-13 绕障碍物流动

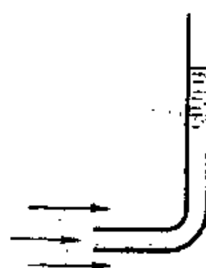


图 3-14 皮托管

给出液流中管口所在点的总压大小。用来测量总压的这种弯成90°的管子，叫做皮托管，是法国人皮托所发明，并于1773年被他首次用于测量塞纳河的流速。

在工程应用中多将静压管与皮托管合二而一，组成一个叫做皮托——静压管或普朗特测压管的仪器，可直接测出总压与静压之差$\frac{p_0-p}{\gamma}$。图3-15为皮托——静压管的结构示意图，静压管包含皮托管于其内。管端正中开一小孔（总压孔），通皮托管；距管端适当距离之侧壁四周开几个小孔，称静压孔。把皮托管与静压孔通道分别接到差压计的两端，则可从差压计测出总压与静压的液柱高差$\frac{p_0-p}{\gamma}$，把此值代入式（3-18）′则可确定测点流速v。考虑到流体粘性及仪器所引起的误差，式（3-18）′中应引入一修正系数c，

$$v=c\sqrt{2g\left(\frac{p_0-p}{\gamma}\right)} \tag{3-18}''$$

c值大小经过率定来确定。

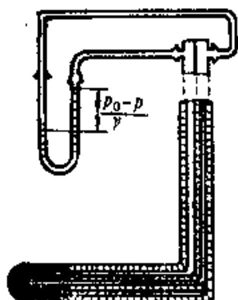


图3-15 皮托——静压管

顺便指出，由上述讨论知，$\frac{v^2}{2g}$可以用液柱高$\frac{p_0-p}{\gamma}$（即皮托—静压管所测出之液柱高）表示，且$\frac{v^2}{2g}$具有长度量纲，在水力学中常称它为速度水头。液体中一点，它的位置高度z叫做位置水头、压力高度$\frac{p}{\gamma}$叫做压力水头，而$z+\frac{p}{\gamma}$叫做测压管水头、$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}$则称为液体中该点的总水头或动力水头。

最后我们还要说明，伯努里方程是一元流动中的一个主要关系式，常常把伯努里方程与连续性方程穿插使用，这是在解决一元流实际问题时的一个行之有效的方法。

第六节　总流的伯努里方程

上一节讨论了元流的伯努里方程式，但它一般还不能直接用于解决工程实际问题。因为工程实际中所遇到的是总流（如管流、渠流等），过水断面大都有一定大小。所以有必要把元流的伯努里方程式，推广到总流上去，以解决实际问题。

一、总流伯努里方程的建立

设有在重力作用下的定常不可压缩流体总流(如图3-16)，沿总流在上、下游各取一过水断面1、2。总流可视为由无数元流所组成，现在其中任取一个(见图)， 它的过水断面为dA_1、dA_2，并在其上的流动参数分别为z_1、p_1、v_1与z_2、p_2、v_2。从此元流，上、下游过水断面流过的单位重流体所携带的能量关系，由式（3-17）得：

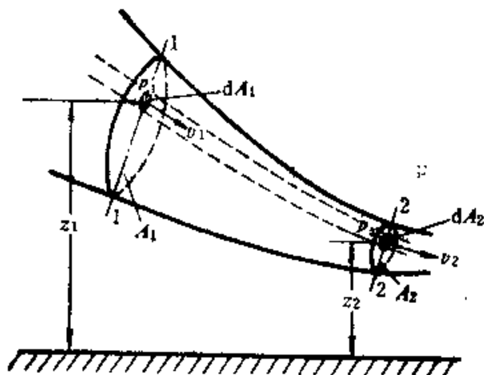


图 3-16　总流的伯努里方程

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}+h_w'$$

由于连续性，单位时间内从dA_1、dA_2将流过$\gamma v_1 dA_1$与$\gamma v_2 dA_2$同样多重的流体，则单位时间内流过二过水断面的流体的能量，应满足下列等式：

$$\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}\right)\gamma v_1 dA_1=\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}+h_w'\right)\gamma v_2 dA_2$$

把组成总流之每个元流的这种能量关系式迭加(积分)起来，即得到单位时间内流过总流过水断面A_1、A_2的流体之能量关系式：

$$\int_{A_1}\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}\right)\gamma v_1 \mathrm{d}A_1=\int_{A_2}\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}+h_w'\right)\gamma v_2 \mathrm{d}A_2$$

或

$$\int_{A_1}\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}\right)\gamma v_1 \mathrm{d}A_1+\int_{A_1}\frac{v_1^2}{2g}\gamma v_1 \mathrm{d}A_1=\int_{A_2}\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}\right)\gamma v_2 \mathrm{d}A_2+\int_{A_2}\frac{v_2^2}{2g}\gamma v_2 \mathrm{d}A_2$$
$$+\int_{A_2}h_w'\gamma v_2 \mathrm{d}A_2 \qquad \text{(a)}$$

总流的上述形式的能量方程尚不便于工程实际应用。为得到便于应用的方程形式，须对上等式中出现的三种类型的积分，作适当的处理：

第一个积分$\int_A\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)\gamma v \mathrm{d}A$：处理这个积分的办法是，使此积分求积成为可能。为此，今后约定断面A取为缓变流断面，在此种断面上$z+\frac{p}{\gamma}=\mathrm{const}$。那么

$$\int_A\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)\gamma v \mathrm{d}A=\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)\gamma\int_A v \mathrm{d}A=\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)\gamma q_v \qquad \text{(b)}$$

式中 q_v——总流的体积流量。

第二个积分$\int_A\frac{v^2}{2g}\gamma v \mathrm{d}A$：这个积分表示单位时间内，流过总流过水断面的动能。处理这个积分可用以断面平均流速$\bar{v}$计算的单位时间内流过总流过水断面的动能$\frac{\bar{v}^2}{2g}\gamma q_v$来代替它。代替过程所产生的误差，则用一个系数α（叫作动能修正系数）来修正。即令

$$\int_A\frac{v^2}{2g}\gamma v \mathrm{d}A=\alpha\frac{\bar{v}^2}{2g}\gamma q_v \qquad \text{(c)}$$

α是个大于1的系数，它的大小取决于流速沿过水断面分布的均匀程度，越均匀则其值越接近于1。

第三个积分$\int_A h_w'\gamma v \mathrm{d}A$：为处理这一积分，引进流体沿总流从$A_1$流到$A_2$时，单位重力流体阻力损失的平均值$h_w$，即

$$\int_A h_w'\gamma v \mathrm{d}A=h_w\gamma q_v \qquad \text{(d)}$$

把以上三个积分处理的结果(b)、(c)、(d)代回总流能量积分关系式(a)，则

$$\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}\right)\gamma q_v+\frac{\alpha_1\bar{v}_1^2}{2g}\gamma q_v=\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}\right)\gamma q_v+\frac{\alpha_2\bar{v}_2^2}{2g}\gamma q_v+h_w\gamma$$

约去公因子γq_v得

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1\bar{v}_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2\bar{v}_2^2}{2g}+h_w \qquad \text{(3-19)}$$

这就是总流的能量方程，也叫伯努里方程。它是处理实际总流问题时的最重要的方程。

二、应用总流伯努里方程的注意事项

总流伯努里方程在工程计算中得到了广泛的应用，它是分析一元流动问题时最常用的方程。所以正确地掌握和运用伯努里方程是非常重要的。

（一） 总流伯努里方程的应用条件

总流伯努里方程是在一定条件下导出的，因此它就有一定的适用范围，回顾在推导过程中所陆续引入的条件，总括起来可归纳为下列五条：

（1） 流体为不可压，流动为定常流。

（2） 作用在流体上的质量力仅为重力。

（3） 沿总流所取两过水断面，须是缓变流断面。但是在两过水断面间，并不限定非要缓变流动。

（4） 在两过水断面间，除了以热能形式扩散到周围空间去的阻力损失以外，再没有其它能量的输入与输出。

（5） 上、下游两过水断面须属于同一总流，两断面间没有总流的分出与汇入。

（二） 总流伯努里方程中各项的取值

（1） z取定基准水平面后，位置水头z原则上只要取在与$\frac{p}{\gamma}$为过水断面上同一点的值即可。

（2） $\frac{p}{\gamma}$ 须与z在断面上同一点处取值。压力p可采用绝对压力，也可采用相对压力，但在两个断面上要一致。

（3） $\frac{\alpha v^2}{2g}$ 动能修正系数α，对紊流取1，对层流取2。断面平均流速$v=\frac{q_v}{A}$。

(4)h_w 阻力损失包含沿程阻力损失（记为h_f）与局部阻力损失（记为h_j）两类，并且一般可写成$h_w=\Sigma h_f+\Sigma h_j$。至于$h_f$及$h_j$的计算，将在以后设专章讨论。

三、总流伯努里方程的扩充

总流伯努里方程式(3-19)，必须在满足前述五个条件时才成立，才能应用。但在第四、第五条件被破坏时，我们只要把式（3-19）加以补充、修正、就可得到能用于相应情况下的伯努里方程了。

（一） 两断面间有能量的输入或输出的情况

沿总流两断面间有能量输入或输出的情况，对水力机械专业常碰到的情形是在管路系统中装了水泵或水轮机。水泵对流体作功，向流体输入能量；流体对水轮机作功，流体向外输出了能量。

如果对流过总流两断面间每单位重的流体，输入或输出的能量记为H，则总流伯努里方程式（3-19）可扩充成如下形式：

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}\pm H=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_w \tag{3-20}$$

式中 H——水力机械的扬程，其前面的正、负号分别对应于水泵和水轮机。

（二） 两断面间有流量分出或汇入的情况

如图3-17所示，为在两断面间有流量分出和汇入的情况。就流量分出来说，由于通过断面1的流体，不是流向断面2、就是流向断面3，可以对断面1与2、1与3分别用式（3-19）列

出：

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_{w1-2}$$

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_3+\frac{p_3}{\gamma}+\frac{\alpha_3 v_3^2}{2g}+h_{w1-3}$$

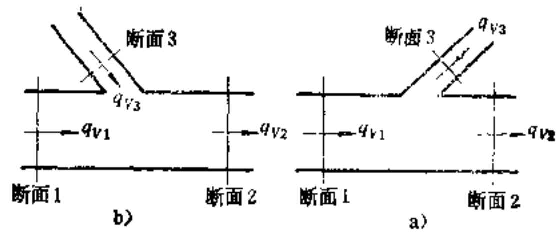


图 3-17 流量分出和汇入

给上二式分别乘相应的质量流量 ρq_{v2}、ρq_{v3}，然后相加得：

$$\rho(q_{v2}+q_{v3})\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}\right)=\rho q_{v2}\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}\right)+\rho q_{v3}\left(z_3+\frac{p_3}{\gamma}+\frac{\alpha_3 v_3^2}{2g}\right)+\rho q_{v2}h_{w1-2}+\rho q_{v3}h_{w1-3}$$

注意到连续性

$$q_{v2}+q_{v3}=q_{v1}$$

则最后可得分流情况下伯努里方程：

$$\rho q_{v1}\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}\right)=\rho q_{v2}\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}\right)+\rho q_{v3}\left(z_3+\frac{p_3}{\gamma}+\frac{\alpha_3 v_3^2}{2g}\right)+\rho q_{v2}h_{w1-2}+\rho q_{v3}h_{w1-3} \tag{3-21}$$

式中 h_{w1-2}、h_{w1-3}——分别代表从断面1至断面2、3时，单位重流体的阻力损失。

在有流量汇入的情况(如图3-17b)，类似地可得到下列能量关系式：

$$\rho q_{v1}\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}\right)+\rho q_{v3}\left(z_3+\frac{p_3}{\gamma}+\frac{\alpha_3 v_3^2}{2g}\right)-\rho q_{v1}h_{w1-2}-\rho q_{v3}h_{w3-2}=\rho q_{v2}\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}\right) \tag{3-22}$$

四、总流伯努里方程应用举例

(1)文吐里流量计　为了测定管道中的流量，可以在管道中安装一个文吐里流量计，它的构造实际上就是一个先收缩、后扩散的管段(图3-18)。流体流过流量计时速度增大、压力降低，通过测量压力差，确定出管道中的流量。

为求管中流量，先来确定其流速，为此对管流施用伯努里方程。过水断面1取在流量计收缩段前、过水断面2则取在其喉部，近似取 $\alpha_1=\alpha_2=1$ 并暂不考虑阻力损失 h_w，写成式(3-19)的形式：

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}=\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}\right)-\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}\right) \tag{a}$$

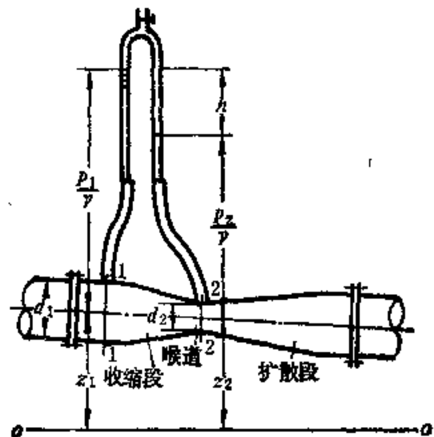


图3-18　文吐里流量计

由式(3-16)得：

$$v_1=\frac{A_2}{A_1}v_2=\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 v_2 \tag{b}$$

测管水头差$\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}\right)-\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}\right)$可由比压计两测管中的液面高差$h$给出，即

$$\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}\right)-\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}\right)=h \tag{c}$$

把式(b)、(c)代入式(a)得：

$$\left[1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right]\frac{v_2^2}{2g}=h$$

从而

$$v_2=\frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}}$$

流量为：

$$q_{VT}=v_2A_2=\frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}}\frac{\pi d_2^2}{4}\sqrt{h}=k\sqrt{h} \tag{d}$$

式中 $k=\frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}}\frac{\pi d_2^2}{4}$，因$d_1$、$d_2$已给定，故$k$为定值。

式(d)是未考虑粘性的理论流量，实际流量要比上式算出的小一些。所以通常在式(d)中乘一小于1的修正系数μ，则实际流量为：

$$q_V=\mu q_{VT}=\mu k\sqrt{h} \tag{3-23}$$

式中 μ——文吐里流量计的流量系数，其值由率定得出。

（2） 设有离心泵装置如图3-19。已知泵体积流量$q_V=20\text{m}^3/h$，安装高度$h_s=5.5\text{m}$，吸水管内径$d_2=100\text{mm}$，吸水管总损失$h_w=0.25\text{m}$水柱，水池面积足够大，求水泵进水口2-2处，以毫米汞柱表示的真空度。

［解］ 把池面选为A_1断面，进水口为A_2断面。取池面为水平基准面则$z_1=0$、池面作用着大气压$p_1=p_a$、由于池面足够大，故$v_1\approx0$。泵进水口A_2断面处，$z_2=h_s$、$p_2=p_a-\gamma_{Hg}h$（h为A_2处真空度汞柱高），$v_2=\frac{q_V}{\frac{\pi}{4}d_2^2}=0.71\text{m/s}$。对1-1、2-2断面写出伯努里方程：

$$0+\frac{p_a}{\gamma}+0=h_s+\frac{p_a-\gamma_{Hg}h}{\gamma}+\frac{(0.71)^2}{2\times9.8}+h_w$$

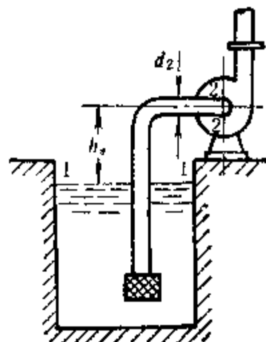


图3-19 离心泵抽水

把h_s、h_w值与水重度$\gamma=9806\text{N/m}^3$、$\gamma_{Hg}=133000\text{N/m}^3$代入得：

$$\frac{133000}{9806}h=\left(5.5+\frac{(0.71)^2}{19.6}+0.25\right)\text{mHg}$$

则

$$h=\frac{9806}{133000}(5.5+0.026+0.25)\text{mHg}=0.425\text{mHg}$$

$$=425\text{mmHg}$$

可见泵进水口真空度为425mmHg。

第七节　总流动量方程及其应用

动量理论是力学中的重要基本理论之一，在一般力学中动量定理表述为：某物体在运动时动量的时间变化率，等于作用在该物体上所有外力的矢量和。其数学式为：

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt}=\Sigma\boldsymbol{F} \tag{a}$$

式中　$\boldsymbol{K}$——物体的动量；

$\Sigma\boldsymbol{F}$——作用在运动物体上所有外力的矢量和。

把上述定理应用于流体，则可以导出具有自己特色的方程式——动量方程。这一方程在工程实际上应用非常广泛，因为它可以在不涉及运动流体内部结构的条件下，求解运动流体与固体边界之间的作用力问题。而这一问题，又是许多实际领域中需要解决的重要问题。本节将导出总流动量方程，并举几例应用。

一、总流动量方程

设有某一不可压缩理想总流，于瞬时 t 考虑过水断面 1 与2（面积分别为A_1、A_2）之间的流段1-2(图3-20)，经过微小时间间隔 Δt后，它移到了新位置 $1'$-$2'$，则在这过程中所考虑流段的动量变化为：

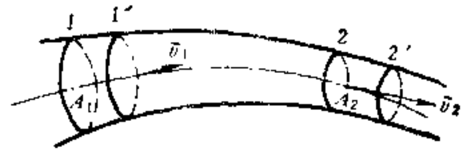


图3-20　总流动量方程

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{K}&=\boldsymbol{K}_{t+\Delta t}(1'\text{-}2')-\boldsymbol{K}_t(1\text{-}2)\\&=[\boldsymbol{K}_{t+\Delta t}(1'\text{-}2)+\boldsymbol{K}_{t+\Delta t}(2\text{-}2')]-[\boldsymbol{K}_t(1\text{-}1')+\boldsymbol{K}_t(1'\text{-}2)]\\&=[\boldsymbol{K}_{t+\Delta t}(2\text{-}2')-\boldsymbol{K}_t(1\text{-}1')]+[\boldsymbol{K}_{t+\Delta t}(1'\text{-}2)-\boldsymbol{K}_t(1'\text{-}2)]\\&=\Delta\boldsymbol{K}_A+\Delta\boldsymbol{K}_t\end{aligned} \tag{b}$$

式中　$\Delta\boldsymbol{K}_A=\boldsymbol{K}_{t+\Delta t}(2\text{-}2')-\boldsymbol{K}_t(1\text{-}1')$；

$\Delta\boldsymbol{K}_t=\boldsymbol{K}_{t+\Delta t}(1'\text{-}2)-\boldsymbol{K}_t(1'\text{-}2)$。

下面分别计算这两部分动量变化。

$\Delta\boldsymbol{K}_A$是在微小时间间隔Δt内，由于被考虑流段的位移而占据了空间新位置的流体动量，与补充进流段让出来空间中的流体动量之差。对于微小时段Δt，这个差可如下计算：

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{K}_A&=\boldsymbol{K}_{t+\Delta t}(2\text{-}2')-\boldsymbol{K}_t(1\text{-}1')\\&=\iint_{A_2}(\rho v_2\mathrm{d}A\Delta t)\boldsymbol{v}_2-\iint_{A_1}(\rho v_1\mathrm{d}A\Delta t)\boldsymbol{v}_1\\&=\rho\Delta t\left(\iint_{A_2}v_2\boldsymbol{v}_2\mathrm{d}A-\iint_{A_1}v_1\boldsymbol{v}_1\mathrm{d}A\right)\end{aligned} \tag{c}$$

由于在一般情况下，很难确定流速沿过水断面的分布规律，所以上式中面积分无法计算。但为了工程实际计算的需要，引进单位时间内流过断面的真实动量与按断面平均速度计算之动量的修正系数β后，就可以避开上述动量积分计算，而代之以平均流速动量的简单代数运算。动量修正系数定义如下：

$$\beta=\frac{\iint_A v^2\mathrm{d}A}{v^2A} \tag{d}$$

即是说，单位时间内流过过水断面的按平均流速计算的动量，须乘以动量修正系数β后，方等于真实动量的大小。

动量修正系数β值总是大于1的，其具体大小与过水断面上流速分布情况有关，分布越均匀则修正系数β值越接近于1，如对管中紊流$\beta=1.02$、对管中层流则$\beta=4/3$。因通常遇到的流动大多为紊流，故取$\beta\approx1$。

把式(d)代回式(c)得

$$\Delta \boldsymbol{K}_A=\rho\Delta t(\beta_2 q_{V2}\bar{v}_2-\beta_1 q_{V1}\bar{v}_1)$$

注意到流动的连续性，则上式可改写成：

$$\Delta \boldsymbol{K}_A=\rho\Delta t q_V(\beta_2\bar{v}_2-\beta_1\bar{v}_1) \tag{e}$$

式中 q_V——总流的体积流量。

再来计算ΔK_t，这是在时间Δt前、后位于$1'$-2段内各空间点上流体质点发生变换，而引起的$1'$-2段之动量改变。它可以如下计算：

$$\Delta\bar{v}_t=\bar{v}_{t+\Delta t}(1'-2)-\boldsymbol{K}_t(1'-2)$$
$$=\left(\iiint_V \rho\bar{v}\mathrm{d}V\right)_{t+\Delta t}-\left(\iiint_V \rho\bar{v}\mathrm{d}V\right)_t \tag{f}$$

式中 V——流段$1'$-2的体积。

把结果(e)、(f)代回式(b)得Δt时间内，所考虑流段的动量改变为：

$$\Delta K=\left[\rho\Delta t q_V(\beta_2\bar{v}_2-\beta_1\bar{v}_1)\right]+\left[\left(\iiint_V \rho v\mathrm{d}V\right)_{t+\Delta t}-\left(\iiint_V \rho v\mathrm{d}V\right)_t\right]$$

动量的时间变化率，则可从上式双边除Δt取极限得：

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta K}{\Delta t}=\rho q_V(\beta_2\bar{v}_2-\beta_1\bar{v}_1)+\lim_{\Delta t\to0}\frac{1}{\Delta t}\left[\left(\iiint_V \rho v\mathrm{d}V\right)_{t+\Delta t}-\left(\iiint_V \rho v\mathrm{d}V\right)_t\right]$$
$$=\rho q_V(\beta_2\bar{v}_2-\beta_1\bar{v}_1)+\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho v\mathrm{d}V \tag{g}$$

把式(g)代回动量定理公式(a)，得总流的动量方程式：

$$\rho q_V(\beta_2\bar{v}_2-\beta_1\bar{v}_1)+\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho v\mathrm{d}V=\Sigma F \tag{3-24}$$

ΣF为作用在总流段1-2上的所有表面力与质量力的矢量总和。

在工程实际中经常遇到的是定常总流的情况，由于这时$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho v\mathrm{d}V=0$，故式(3-24)成为：

$$\rho q_V(\beta_2\bar{v}_2-\beta_1\bar{v}_1)=\Sigma F \tag{3-25}$$

式(3-25)为定常，不可压缩总流动量方程。在实用情况下式(3-25)常被写成投影到某一方向上的标量方程，或在取定坐标系后，把式(3-25)写成标量形式：

$$\left.\begin{aligned}\rho q_V(\beta_2\bar{v}_{2x}-\beta_1\bar{v}_{1x})&=\Sigma F_x\\ \rho q_V(\beta_2\bar{v}_{2y}-\beta_1\bar{v}_{1y})&=\Sigma F_y\\ \rho q_V(\beta_2\bar{v}_{2z}-\beta_1\bar{v}_{1z})&=\Sigma F_z\end{aligned}\right\} \tag{3-25$'$}$$

把在时刻t，限制流段1-2的封闭表面取做控制面，则式(3-25)可用文字叙述如下：单位时间内，流出与流入控制面的流体动量之差，就等于作用在控制面内流体上的所有外力的矢

量和。

二、定常总流动量方程的应用举例

（1） 设有一渐缩管段，进口断面、出口断面(图3-21)。有密度为ρ的定常流体流从管中流过，在进、出口断面上断面平均流速分别为$\bar{v}_1$、$\bar{v}_2$；而压力则为p_1、p_2，试确定流体流沿管轴方向对管段的推力的大小。

［解］ 取由A_1、A_2与管段内壁所组成的封闭面为控制面，则单位时间内流出、流进控制面的流体动量差为：

$$\rho\bar{v}_2^2A_2-\rho\bar{v}_1^2A_1 \tag{a}$$

设管壁沿管轴方向，作用在总流段上的力为F，则总流段沿管轴方向所受诸力之总和为：

$$F+p_1A_1-p_2A_2 \tag{b}$$

把式(a)、式(b)代入动量方程得：

$$F+p_1A_1-p_2A_2=\rho(\bar{v}_2^2A_2-\bar{v}_1^2A_1)$$

由此得：

$$F=(p_2+\rho\bar{v}_2^2)A_2-(p_1+\rho\bar{v}_1^2)A_1$$

作用在管段上之推力R，与F大小相等、方向相反，则为：

$$R=-F=(p_1+\rho\bar{v}_1^2)A_1-(p_2+\rho\bar{v}_2^2)A_2$$

（2） 设有一引流弯管，断面积，在某处水平面内弯转了α角度。已知管中流过密度ρ、流量的液体并弯管前后压力为p_1、p_2，要求确定液流对弯管的作用力。

［解］ 如图3-22，取x轴与弯转后管段平行，垂直x轴取y轴。在弯管前、后流动稳定处，各取过水断面1、2，它们与弯管内表面一起组成封闭曲面，作为处理本问题的控制面。

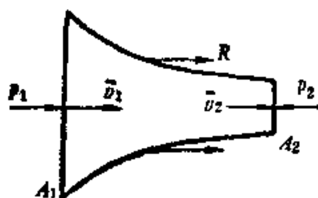


图3-21 渐缩管推力

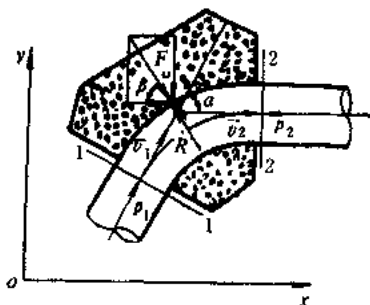


图3-22 液流对弯管的作用力

分别考虑沿x与y两个坐标轴方向，动量的投影方程：

$$\left.\begin{aligned}\rho q_V(\bar{v}_2-\bar{v}_1\cos\alpha)&=p_1A_1\cos\alpha-p_2A_2+F_x\\ \rho(0-\bar{v}_1\sin\alpha)&=p_1A_1\sin\alpha+0+F_y\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}F_x&=\rho q_V(\bar{v}_2-\bar{v}_1\cos\alpha)+A(p_2-p_1\cos\alpha)\\ F_y&=-\rho q_V\bar{v}_1\sin\alpha-p_1A\sin\alpha\end{aligned}\right\}$$

式中$\bar{v}_2$可如下确定：

$$\bar{v}_1=\bar{v}_2=\frac{q_V}{A}$$

合力大小与方向可确定如下：

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}$$

$$\beta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{F_y}{F_x}$$

β为F与x坐标轴夹角。

液流对弯管的作用力R，大小与F相等，方向与F相反，R完全被确定。

（三） 液体通常沿轴向进入泵叶轮，沿斜向流出(图3-23)。液流受到叶轮对它的作用力而流速发生了变化，同时液流给叶轮一个沿轴向指向叶轮后面的反作用力，称为动反力。设流过叶轮的流量为q_V、液体密度ρ、叶片前、后轴面速度$\bar{v}_{m0}$、$\bar{v}_{m3}$(见图)，求动反力。

［解］ 液流速度可分解成轴面与周向两个分速度，因为动反力沿轴向，所以只须沿轴向用动量定理，这时只要考虑轴面分速度即可。

在叶片进、出口前、后取控制面，控制面上流速分别为v_{m0}与v_{m3}、方向如图上所示，则流出、流进控制面的动量差，在轴向的投影为：

$$\rho q_V(\bar{v}_{m3}\cos\Sigma_3-\bar{v}_{m0})$$

并设叶轮作用在液流上的轴向分力F_2，沿轴向所有力的分量之和为

$$F_2+P_1-P_2\cos\Sigma_3$$

把上面结果代入动量方程得：

$$F_2+P_1-P_2\cos\Sigma_3=\rho q_V(\bar{v}_{m3}\cos\Sigma_3-\bar{v}_{m0})$$

则
$$F_2=\rho q_V(\bar{v}_{m3}\cos\Sigma_3-\bar{v}_{m0})+(P_2\cos\Sigma_3-P_1)$$

式中 P_1、P_2——液流上、下游控制面上的总压力。

液流作用在叶轮上的轴向力，应与F_2大小相等、方向相反

$$R_2=-F_2=\rho q_V(\bar{v}_{m0}-\bar{v}_{m3}\cos\Sigma_3)+(P_1-P_2\cos\Sigma_3)$$

在水力机械中，R_2只是组成轴向总力的分力之一，而R_2式中压力所提供的这部分轴向力$P_1-P_2\cos\Sigma_3$，是在计算轴向力的另一分力时已被计入，所以R_2中这一部分就被抹掉了，而记为：

$$A_2=\rho q_V(\bar{v}_{m0}-\bar{v}_{m3}\cos\Sigma_3)$$

把A_2称为动反力，方向指向叶轮后面。

（四） 设有速度为$\bar{v}$，从出口面积为A的喷咀射出的水平自由射流，冲向沿射流方向以速度$u(<\bar{v})$移动的曲面挡板(图3-24)，试确定射流对挡板沿射流方向的冲击力。

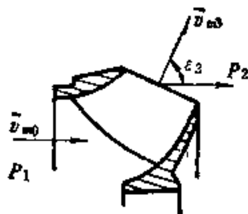


图3-23 叶轮的动反力

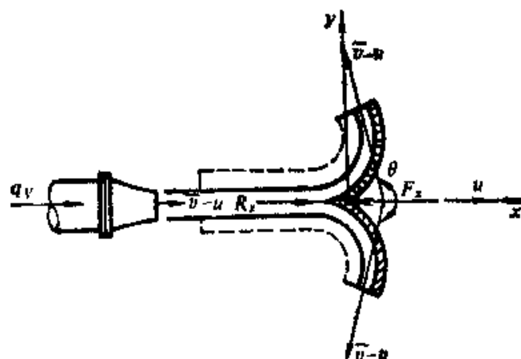


图3-24 射流对移动曲面的力

〔解〕 把坐标系取在移动的曲面上，则射流速度大小在挡板前为 $v-u$、流量 $q_{Vr}=(v-u)A$. 射出之液流压力处处相等为大气压，粘性与重力之作用可忽略不计，则由伯努里方程知：流速大小保持不变，挡板边缘处流速仍为 $v-u$。在挡板前与挡板边缘处各取一过水断面，它们与液流边界表面构成的封闭面，取作控制面。

沿射流方向x使用动量定理。单位时间内流出、流入控制面的动量差为：

$$\rho\left[2\frac{q_{Vr}}{2}\left(v-u\right)\cos\theta-q_{Vr}(v-u)\right]=\rho q_{Vr}(v-u)[\cos\theta-1]$$

作用在控制面内液流上的力、沿水平x方向分量，大气压力互相抵消、重力无水平分量，挡板对液流之作用力水平分量记为F_x，根据动量定理得：

$$F_x=\rho q_{Vr}(v-u)(\cos\theta-1)$$

而液流对挡板之作用力则为：

$$R_x=-F_x=\rho q_{Vr}(v-u)(1-\cos\theta)$$

这就是射流对挡板之冲击力。

冲击式水轮机受力，即可根据上式计算。并由此可计算水轮机转动功率P：

$$P=R_xu=\rho q_{Vr}u(v-u)(1-\cos\theta)$$

第八节　动量矩方程式

定常总流的动量矩方程式，是建立水力机械基本方程的基础。而且在要确定流动流体与固体边界之间总作用力的位置时，也常常要借助于动量矩方程式。当然，因为它给出的是运动流体动量矩变化率与所受外力矩之间的关系式，故它可直接应用于流体有关动量矩与力矩问题的分析中。本节建立定常总流的动量矩方程式，并作为其应用导出水力机械基本方程。

一、动量矩方程的建立

从一般力学知道，一物体在单位时间内对某轴动量矩的变化，就等于作用于此物体上所有外力对同一轴的力矩之和。这称为动量矩定理。对定常总流，我们可从动量方程式(3-25)出发，导出与此定理相应的方程式来。

对定常总流写出其动量方程式(3-25)形式：

$$\rho q_V(\beta_2 v_2-\beta_1 v_1)=\Sigma F$$

设有某固定点，令r_1、r_2与r分别代表从固定点到过水断面1、2中心与外力作用点的矢径，则根据动量矩定理

$$\rho q_V(\beta_2 r_2\times v_2-\beta_1 r_1\times v_1)=\Sigma r\times F$$

外力对固定点的力矩记为M：

$$M=r\times F$$

则得定常总流动量矩方程：

$$\rho q_V(\beta_2 r_2\times v_2-\beta_1 r_1\times v_1)=\Sigma M \tag{3-26}$$

式(3-26)说明，单位时间内流出、流进控制面的动量(图3-20)对某固定点的矩之差，等于作用在控制面内总流段上的所有外力对同一点的力矩的矢量和。

二、动量矩方程应用

把动量矩方程应用到水机的叶轮上（为了确定起见，譬如用到泵叶轮上），就可以导出

其基本方程式。

图3-25表示流过泵叶轮的液流。液体从叶轮内缘（叫进口）流入，经叶轮在外缘处（叫出口）流出，叶轮在以定角速度ω旋转，所以液体在叶轮中作复合运动。液体一方面相对于叶轮、沿着在叶片之间的流线方向作相对运动，其速度记为$\boldsymbol{w}$，为相对速度；另一方面液体被叶片夹持，随叶轮作等角速圆周牵连运动，速度记为$\boldsymbol{u}$，为牵连速度。则液体运动的绝对速度：

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}$$

图3-25中画出了进、出口$\boldsymbol{w}$、$\boldsymbol{u}$与$\boldsymbol{v}$的关系图，叫速度三角形(下标1、2分别表示进、出口速度)。

叶轮中液体的相对运动是定常的，由于叶轮在转动，所以液体绝对运动为非定常的。如果假设叶轮中叶片数为无限多时，则绝对运动就是定常的。现在假设液体无粘性、并设叶轮叶片数无限多，单位时间内流过叶轮密度为ρ的液体流量为q_V(略去重力的影响)，则叶轮作用在液体上对转轴的总力矩$\boldsymbol{M}$可用动量矩方程给出。

$$\boldsymbol{M}=\rho q_V(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{v}_1) \tag{a}$$

由进、出口速度三角形(参图3-25)知：

$$|\bar{r}\times\bar{v}|=rv\cos\alpha \tag{b}$$

把(b)式代回(a)式并写成标量形式得

$$M=\rho q_V(r_2v_2\cos\alpha_2-r_1v_1\cos\alpha_1) \tag{c}$$

叶轮对液体所做的功率则为：

$$P=M\omega=\rho q_V(v_2u_2\cos\alpha_2-v_1u_1\cos\alpha_1)$$

叶轮对单位重液体所做的功率(记为H)为

$$H=\frac{P}{\gamma q_V}=\frac{1}{g}(v_2u_2\cos\alpha_2-v_1u_1\cos\alpha_1) \tag{3-27}$$

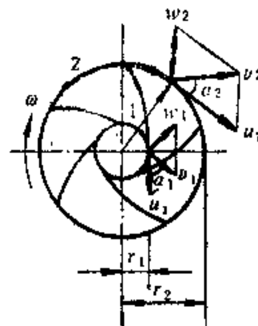


图3-25 泵轮中的液流

式(3-27)叫做水泵基本方程式。由于泵叶轮对液体作功，液体出口能量大于进口能量，所以$H>0$，H叫做泵的扬程。式(3-27)也适用于水轮机，不过这时由于液体对水轮机叶轮作功，液体出口能量小于进口能量，所以$H<0$，把$-H(>0)$称为水轮机的作用水头。

习 题 三

3-1 什么是迹线？什么是流线？

3-2 试比较在欧拉法和拉格朗日法中变量x、y、z有什么不同的含义。在求加速度时为什么欧拉法为$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$，而拉格朗日法为$a_x=\frac{\partial v_x}{\partial t}$？

3-3 用欧拉法表达的加速度表示式如何？它由几部分组成，各部分的意义如何？

3-4 已知流场的速度分布为

(1) $\boldsymbol{v}=xy^2\boldsymbol{i}-\frac{1}{3}y^3\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$

(2) $\boldsymbol{v}=x^2y\boldsymbol{i}-3y\boldsymbol{j}+2z^2\boldsymbol{k}$

(3) $\boldsymbol{v}=(4x^3+2y+xy)\boldsymbol{i}+(3x-y^3+z)\boldsymbol{j}$

试问它们为几元流动?

3-5　试举例说明稳定流动与非稳定流动的区别。

3-6　平面流场内任意点速度为

$$v_x=-\frac{by}{x^2+y^2}\qquad\qquad v_y=\frac{bx}{x^2+y^2}$$

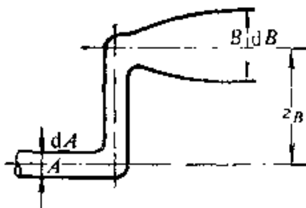
试求流场的流线及加速度。(流线：$x^2+y^2=\text{const}$)

3-7　图示为管径不同的两段管路，已知A点的参数为$d_A=0.25\text{m}$，$p_A=0.8\times9.81\times10^4\text{Pa}$，$B$点的参数为$d_B=0.5\text{m}$，$p_B=0.5\times9.81\times10^4\text{Pa}$，流速 $v_B=1.2\text{m/s}$，$z_B=1\text{m}$，试求A、B 断面能量差及判断水流运动的流向?

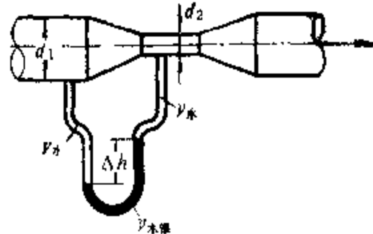
($E_A-E_B=3.1\text{m}$，由A至B流动)

3-8　有一文德里管，已知$d_1=15\text{cm}$，$d_2=10\text{cm}$，水银差压计液面高差$\Delta h=20\text{cm}$，若不计阻力损失，求通过文德里管的流量。

($q_v=6.158\times10^4\text{cm}^3/\text{s}$)



题3-7图

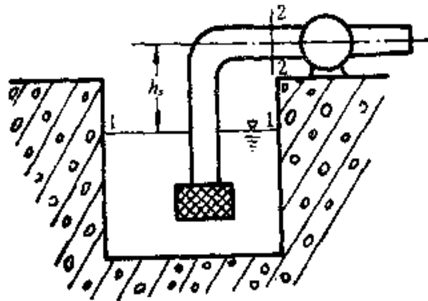


题3-8图

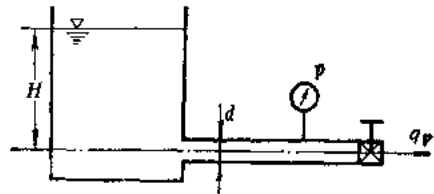
3-9　图示为一水泵进水管装置，已知$h_s=3\text{m}$，吸水管管径$d=0.25\text{m}$，从1-1断面至2-2断面总水头损失为 $h_w=8.5\frac{v^2}{2g}$，断面2-2处，真空高度$\frac{p_v}{\gamma}=4.08\text{m}$ H_2O，求吸水管流量。

($q_v=0.073\text{m}^3/\text{s}$)

3-10　有一容器的出水管管径$d=10\text{cm}$，当龙头关闭时，压力计读数为4900Pa (表压)，龙头开启后，压力计读数降至19600Pa (表压)，如果能量损失为2m，试求通过管路的水流流量。



题3-9图

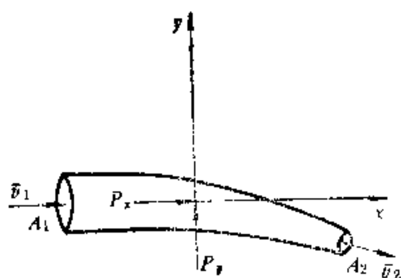


题3-10图

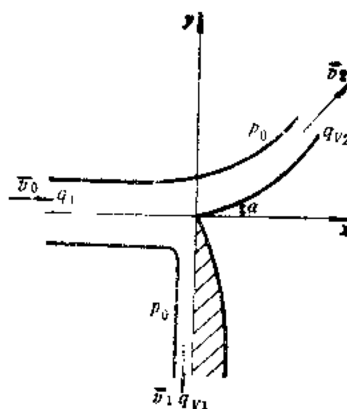
3-11　弯管的直径由20cm减少至15cm，弯管的偏转角为60°，设粗的一端压力为8000N/m²，当流量$q_v=0.08\text{m}^3/\text{s}$时，求水流对弯管的作用力及作用点的位置。

($F=407.1\text{N}$)

3-12　将一平板伸入水柱内如图所示，板垂直于水柱流来的方向，已知水柱流来的速度$v_0=30\text{m/s}$，总流量$q_v=30\text{kg/s}$，分流量$q_{v1}=12\text{kg/s}$。试求水柱作用在平板上的力和水流偏转角α。设液体的重力和粘性可略去不计，水柱四周的压力处处为大气压。　($F=4975.64\text{N}$，$\alpha=41°49'$)



题3-11图



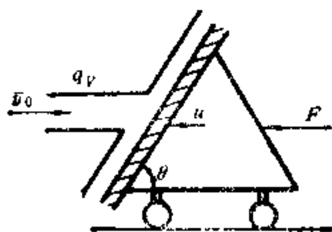
题3-12图

3-13　一射流初速为$\bar{v}_0$，流量为q_v，一平板向着射流以等速u运动（如图）导出使平板运动所需功率表达式。

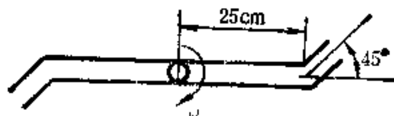
$$[\rho \bar{v}_0 u(\bar{v}_0+u)^2 \sin^2\theta]$$

3-14　具有对称臂的洒水器（如图），总流量为$5.6\times10^{-4}m^3/s$，每个喷嘴面积为$0.93cm^2$，不计摩擦，求其转速，如不让它转动须加多大转矩。

(8.521/s；0.3N·m)



题3-13图



题3-14图

第四章　流动阻力及水头损失

在上一章，我们建立了一元流连续性方程、能量方程、动量方程与动量矩方程，它们是分析一元流动的重要工具。实际流体都具有粘性，由于粘性作用在运动流体的动量及动量矩方程中会出现阻力项，而在能量方程中则会遇到阻力损失项。为了能够应用这些方程进行工程计算，我们首先必须研究实际流动中的阻力及阻力损失的确定问题。

实际流体流经固体壁面时，紧贴固体壁面的流体层将粘附于壁面，这层流体与固体壁面的相对速度为零。受固体壁面影响，存在一个由固体壁面的零流速到流体主流速度v的流速变化区域。由于速度分布的不均匀性，在流动的垂直方向上就会出现速度梯度，则在相对运动着的粘性流体层之间必定存在切向应力，并因而形成阻碍流体流动的阻力。为了克服阻力，维持粘性流体的流动，流体沿程就要不断地消耗机械能。消耗掉的这部分机械能，将不可逆地转化为热能而散失掉了，这就是阻力损失或能量损失。

损失的研究具有重大实际意义，因为只有正确地计算出损失hw，才有可能应用一元流动方程，算出待定参数，以及流体与固体的相互作用等。另外，通过对损失产生的物理原因的分析，可根据实际需要，合理地设计流道以便减小流体流动的阻力。顺便指出，由于阻力损失的复杂性，对其研究大量采用实验的方法。

本章讨论流动型态、圆管中的流动、阻力损失产生的物理原因及其计算方法、应用举例等。本章中心是阻力损失问题。

第一节　流动阻力与水头损失的类型

流体流动中的阻力一般是指流动流体与固体边界相互作用，而产生的平行于流动方向的作用力。对于固体边界与流动流体，阻力是大小相等、方向相反的一对力。流体若在固体边界外部流过时叫绕流，如机翼周围的空气流与水机叶片周围的水流。流体若在固体边界里面流过时叫过流，如管道、渠道等中的流动。在绕流问题中，关心的是固体边界（机翼、叶片）所受的阻力；而在过流问题中，则关心的是流动流体所受的阻力。绕流阻力问题，我们将在后面讨论，这一章讨论的是过流阻力问题。

图4-1是一个由管路与管路附件（弯管、阀门等）所组成的、输送流体的系统，考虑通过其中流动的总流，沿程能量的变化情况。通过实验，得到如图上折线所示的能线图（它清楚地表明了，沿流程流体能量减少的情况）。参照此图，来讨论过流问题中的阻力与水头损失。

过流问题中的阻力与水头损失可以分成两大类，当流体在截面不变的通道中流动时，流体沿程将遭遇到均匀的摩擦阻力作用，这类阻力叫作沿程阻力。流动流体克服沿程阻力要损失掉一部分机械能，这部分能量损失称为沿程能量损失。因为流体机械能可以用水头形式表示，所以把沿程能量损失，也常常叫作沿程水头损失（如图4-1：0-1、2-3、…8-9等段中水头损失）。沿程水头损失记为h_f，它是沿全流程均匀产生的，与流程长度成正比。另外，当

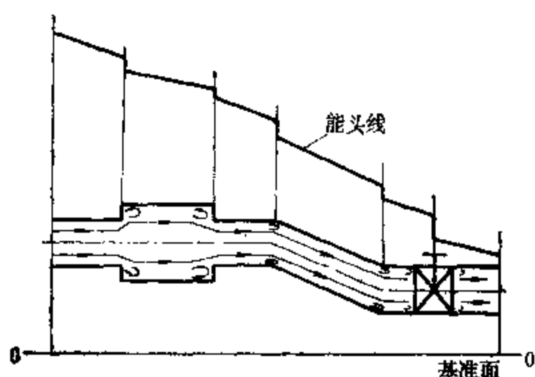


图4-1　总流水头损失示意图

通道截面在局部区域发生急剧改变时，则流体速度方向和大小也将发生急剧变化。流体质点要进行剧烈的动量交换，并产生旋涡。因此给流动造成巨大阻力，由于它出现在局部区域（如变管径、弯管、阀门等附近区域），故叫作局部阻力。流动流体为了克服局部阻力，也要损失掉一部分机械能，这部分损失掉的能量就称为局部能量损失或局部水头损失，记为h_j。局部水头损失，是在通道截面发生急剧变化的局部区域内产生的。产生损失的区域虽小，但水头损失却常常是很可观的。

流动的总水头损失h_w一般就等于上述两类损失的总和，即$h_w=\Sigma h_f+\Sigma h_j$。下面我们将首先讨论沿程水头损失，然后再讨论局部水头损失。由于水头损失与流体流动的型态有密切关系，所以下面先来介绍流体流动的两种型态，进而讨论水头损失的计算方法。

第二节　流动的两种型态

流动的阻力和流动型态存在密切的关系，人们为了探索阻力的规律，对流动型态作了大量观察与研究。英国科学家雷诺于1883年在他的论著中，发表了对圆管中粘性流体运动的实验研究结果。雷诺不仅发现了流体运动存在着两种不同的型态——层流和紊流，而且还测定了在不同流态下沿程水头损失所遵循的规律。

一、两种流动的型态

雷诺实验的装置如图4-2所示。D为一水箱，装有溢流隔板F，底部开有进、排水孔，侧壁下方开孔B。在孔B处安装了一根水平玻璃管T，管出口前设阀门K，管出口下方置一集流容器C。E为装有颜料液的容器，从E底部接出一根带有控制阀P的细弯管至管T进口断面处。

打开T管阀门K，让玻璃管中有水流过；同时打开颜料液控制阀P，让颜料液经细管注入T管进口处，随水流经T管流入集流容器C。当流体速度不大时，颜料色液在管流中呈一条与管轴平行的、清晰可见的有色细线（图4-3a），而且不论从进口断面哪点注入色液，都同样可得到经过该点的上述色线。这说明，此时管中流体运动是沿着以管轴为轴线的一系列圆柱面流层规则地、互不掺混地流过圆管，流体质点的轨迹是平行的直线，把这种类型的流动就叫做层流。开大阀门K，逐渐增大管内流体的速度，当流速增至某一定大小后，色线出现波浪并开始振荡（图4-3b），流动处于不稳定过渡状态。如继续增大管内流速，则色线的波浪数目及其振幅也将增加，并且振荡加剧。当流速增大到某一数值时，色线突然破裂并与周围流体相掺混而消失不见，色液扩展至整个圆管使流体蒙上一层淡漠的颜色。这时流体各部分间互相剧烈掺混，质点轨线紊乱、运动杂乱无章，这种型态的流动称为紊流（或湍流）。

雷诺曾对不同直径d的圆管、不同运动粘性系数ν的流体，以各种流速v通过圆管的流动做了大量实验，发现管内流动呈现层流还是紊流取决于雷诺数$Re=\dfrac{vd}{\nu}$值的大小。由层流

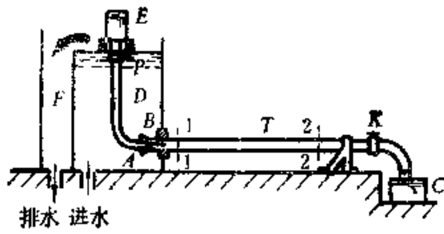


图4-2 雷诺实验装置图

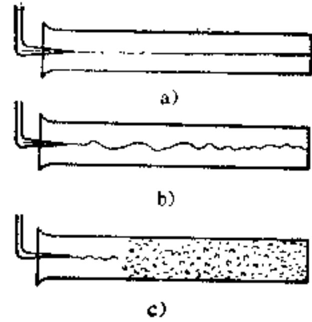


图4-3 雷诺流态实验

过渡到紊流的雷诺数叫做临界雷诺数，记为R_{ecr}。实验表明临界雷诺数不是一个固定常数，它依赖于进行实验时的外部条件及圆管进口条件等。如实验时外部扰动小、圆管进口扰动亦小，则临界雷诺数就较大；反之，若实验时的外部扰动大、并进口扰动亦大，则临界雷诺数就较小。但临界雷诺数有一下界，可由实验测得，通常取为2320。即当圆管流动雷诺数R_e ≤2320时，不管扰动多大，管内总能保持稳定的层流型态。临界雷诺数没有上界，因为改善实验条件，减少扰动影响，临界雷诺数的数值就可以不断提高。不同的实验者曾经得到过的临界雷诺数上界值有13800、20000、40000，至今已经达到的最高临界雷诺数值是50000。但这时的层流状态是极不稳定的，稍有扰动就立即变成紊流。由于实验流动中，扰动是不可避免的，所以临界雷诺数上界值在判断实际流动的型态中，无实用意义，通常采用临界雷诺数下界值作为判断流动型态的准则，而且工程上一般取圆管的临界雷诺数下界值为：

$$R_{ecr}=2320$$

当流动雷诺数$R_e \leqslant 2320$时，流动为层流；当$R_e > 2320$时，即认为流动已经是紊流。

对非圆形截面通道中之过流，雷诺在圆管中作实验所得的结论仍然成立。在计算其雷诺数时，直径d须代以当量（水力）直径d_H：

$$d_H=4\frac{\omega}{\chi}$$

式中 ω——通道过水断面面积；

χ——过水断面上与流体接触的固体周界长度，称为湿周。

故对非圆形通道流动雷诺数为：

$$R_e=\frac{v d_H}{\nu}$$

为判断流动型态所需的临界雷诺数，不同截面形状的通道都有各自的临界值，均由实验来测定。下举几例列表4-1中。

表4-1 非圆形管道的临界雷诺数

管截面形状	R_{ecr}	管截面形状	R_{ecr}
正三角形	1930	同心圆环	1100
正方形	2070	偏心圆环	1000

二、沿程水头损失与流态的关系

雷诺还曾经在图4-2装置的T管上，相距为l的两截面1与2处分别接出测压管，研究了沿

程水头损失h_f随流速v变化的规律。

取1、2断面为控制面，列出伯努里方程：

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_w$$

由此得

$$h_w=(z_1-z_2)+\frac{p_1-p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2-\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

因1、2断面间无局部损失故$h_w=h_f$，在圆管轴线上取z、p，则$z_1=z_2$，并注意$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$则上式成为：

$$h_f=\frac{p_1-p_2}{\gamma} \tag{4-1}$$

由式(4-1)可知，测压管液面高度差即为流体由断面1运动至断面2时的沿程水头损失。

雷诺曾分别在两种流态下，改变流速v时逐次测量了对应沿程水头损失h_f的大小，并把实验所得的v值及对应的h_f值，绘在对数坐标纸上，得如图4-4所示的实验曲线。

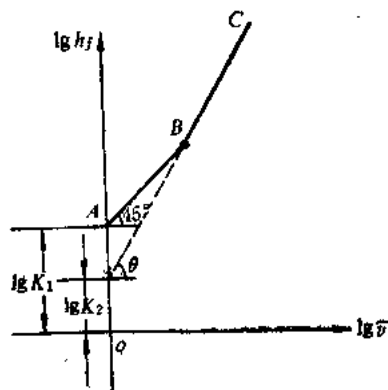


图4-4　层流与紊流的沿程水头损失

层流情况下所得实验数据，绘出的实验曲线为一条与水平轴成45°的直线(如图上AB)，写出此直线方程：

$$\lg h_f=\mathrm{tg}45°\lg v+\lg K_1=\lg K_1 v$$

所以

$$h_f=K_1 v \tag{4-2}$$

这说明在层流情况下，沿程水头损失与平均流速v的一次方成正比。而紊流情况下的实验曲线则为一条与水平轴成$\theta>45°$角的直线（图上BC），写出其方程式为：

$$\lg h_f=\mathrm{tg}\theta\lg v+\lg K_2=m\lg v+\lg K_2=\lg K_2 v^m$$

所以

$$h_f=K_2 v^m \tag{4-3}$$

式中$m=\mathrm{tg}\theta$为大于1的数，实验表明$1.75\leqslant m\leqslant 2$。即在紊流中沿程水头损失与平均流速$v$的1.75～2次方成正比。

由上述讨论知，沿程水头损失在不同流态下所遵循的规律不一样。因此计算各种流道的沿程损失时，必须先判别流动的型态。

［例4-1］　设有内径$d=0.1$m的圆管，分别令运动粘性系数$\nu=1\times10^{-6}\mathrm{m^2/s}$的水与$\nu=31\times10^{-6}\mathrm{m^2/s}$的油，以同样速度$v=0.5$m/s流过管中时，它们将各呈现何种流态？

［解］　分别计算管中水流与油流的雷诺数

$$R_{e水}=\frac{vd}{\nu_水}=\frac{0.5\times0.1}{1\times10^{-6}}=5\times10^4=50000$$

$$R_{e油}=\frac{vd}{\nu_油}=\frac{0.5\times0.1}{31\times10^{-6}}=1613$$

与圆管临界雷诺数$R_{ecr}=2320$比较可判别流态

$R_{e水}=50000>2320=R_{ecr}$故水在管中呈紊流状态

$R_{e油}=1613<2320=R_{ecr}$故油在管中呈层流状态

第三节 圆管中的层流及其沿程损失

在工程技术上所遇到的流动，当雷诺数较小时将出现层流。诸如石油输送、地下水渗流、液压传动与机械润滑等大多属于液体的层流运动。本节只限于讨论定常不可压缩粘性流体，在水平圆管中的层流运动及其沿程损失。

一、运动微分方程

在圆管内作层流运动的流体中，隔离出一个以管轴为对称轴的管状流体层（图4-5），其内径r、厚度dr、长度为δl。流层沿管轴向右作等速运动，则该流层上所有作用力，沿流动方向投影之和应等于零，由此便可建立管中流体层流运动的微分方程式。

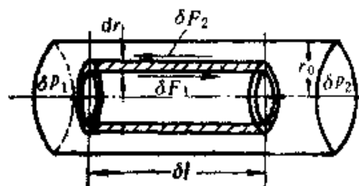


图4-5 管状流体层上的作用力

下面来看，有哪些力在流动方向是有投影的。首先在管状流体层内表面上，顺流方向作用着摩擦力δF_1，设摩擦切应力为τ则

$$\delta F_1=2\pi r\delta l\tau \tag{a}$$

在流层外表面上则作用着逆流方向的摩擦力δF_2

$$\delta F_2=\delta F_1+\frac{\partial}{\partial r}(2\pi r\delta l\tau)dr=\delta F_1+2\pi\delta l\frac{\partial}{\partial r}(r\tau)dr \tag{b}$$

流层两端环状表面上，作用着总压力分别为

$$\delta P_1=2\pi r\,\mathrm{d}r\,p_1 \tag{c}$$

$$\delta P_2=\delta P_1+\frac{\partial}{\partial l}(2\pi r\,\mathrm{d}r\,p)\delta l=\delta P_1+2\pi r dr\frac{\partial p}{\partial l}\delta l \tag{d}$$

P_1与P_2代表相应端面形心上的压力。

上面列出了全部在流动方向有投影的作用力，则这些力沿流动方向投影之和应为零。

$$\delta F_1-\delta F_2+\delta P_1-\delta P_2=0 \tag{e}$$

把式(a)(b)(c)(d)代入(e)得

$$-2\pi\delta l\frac{\partial}{\partial r}(r\tau)dr-2\pi r\,\mathrm{d}r\frac{\partial p}{\partial l}\delta l=0$$

或由上式整理得

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau)+\frac{\partial p}{\partial l}=0 \tag{f}$$

对圆管中层流、根据牛顿内摩擦定律

$$\tau=-\mu\frac{\partial v}{\partial r} \tag{g}$$

式中负号使τ取正值。流体在等径直圆管内流动时，沿程压力降是均匀的，所以压力梯度$\frac{\partial p}{\partial l}$可以用下式代替

$$\frac{\partial p}{\partial l}=\frac{p_2-p_1}{l}=-\frac{p_1-p_2}{l}=-\frac{\Delta p}{l} \tag{h}$$

Δp为相距l的两断面间之压降。把式(g)、(h)代回式(f)得

$$-\frac{\mu\partial}{r\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)-\frac{\Delta p}{l}=0$$

或
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)=-\frac{\Delta p}{\mu l}$$

由于圆管中的流动将是轴对称的，那么$v=v(r)$所以上式偏微分可改写为常微分，最后得

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)=-\frac{\Delta p}{\mu l} \tag{4-4}$$

这就是等径直圆管中，定常不可压缩粘性流体运动微分方程式。

二、流速分布规律

由式(4-4)得

$$d\left(r\frac{dv}{dr}\right)=-\frac{\Delta p}{\mu l}r\,dr$$

积分后得

$$r\frac{dv}{dr}=-\frac{\Delta p}{\mu l}\frac{r^2}{2}+c_1$$

或
$$\frac{dv}{dr}=-\frac{\Delta p}{2\mu l}r+\frac{c_1}{r}$$

再积分一次后得

$$v=-\frac{\Delta p}{4\mu l}r^2+c_1\ln r+c_2 \tag{a}$$

式(a)中c_1、c_2为积分常数。

管流中速度处处应为有限值，包括在管轴上也应如此。但在管轴上$r=0$，那么$\ln r$将成为无限大，为了维持速度是有限的，就要求$c_1=0$才行。这样，第一个积分常数就确定了。再根据管壁上流动的边界条件：$r=r_0$时须$v=0$，确定出$c_2=\frac{\Delta p}{4\mu l}r_0^2$。把$c_1$、$c_2$代回式(a)得圆管中流动的速度分布规律：

$$v=\frac{\Delta p}{4\mu l}(r_0^2-r^2) \tag{4-5}$$

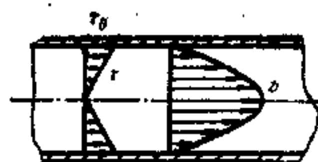


图4-6 圆管层流速度与切应力分布

上式表明，当不可压缩粘性流体在圆管中作定常层流运动时，沿管断面的速度分布是以管轴为旋转轴的旋转抛物面（图4-6），管壁上速度最小、管轴上速度最大。

管中最大流速在管轴$r=0$处，由式(4-5)得

$$v_{max}=\frac{\Delta p}{4\mu l}r_0^2 \tag{4-6}$$

三、流量与断面平均速度

单位时间内流过管断面的流体体积流量q_V，就等于（图4-6）管截面与抛物面之间的旋转抛物体的体积。由几何知，旋转抛物体的体积等于它的外切圆柱体体积之半，因此得：

$$q_V=\frac{1}{2}(\pi r_0^2\times v_{max})=\frac{\pi\Delta p r_0^4}{8\mu l}$$

或改写成管直径 d 的形式

$$q_V=\frac{\pi\Delta pd^4}{128\mu l} \tag{4-7}$$

此式理论上是由德国人韦德曼1856年得出的，但早在这之前，从实验方面已被德国人哈根和法国人泊谡叶同时发现，所以式（4-7）也叫哈根——泊谡叶定律。式（4-7）在粘性流体动力学理论上具有重要意义，在实际应用方面则它可用以测定流体粘性系数。

总流断面平均流速是其体积流量 q_V 与过水断面面积 A 之比。因此，断面平均速度可由式（4-7）确定如下：

$$v=\frac{q_V}{A}=\frac{\dfrac{\pi\Delta pd^4}{128\mu l}}{\dfrac{\pi d^2}{4}}=\frac{\Delta pd^2}{32\mu l} \tag{4-8}$$

比较式（4-6）与式（4-8）知

$$v=\frac{1}{2}v_{max} \tag{4-9}$$

可见，断面平均速度恰为管轴上最大速度的一半。据式（4-9）可知，只要测出管轴上流速，则很容易确定管中流量。

四、动能与动量修正系数

在第三章中讨论总流能量与动量方程时，曾引进动能与动量修正系数 α、β。对圆管中的层流，根据流速公式（4-5）与式（4-8），可以从理论上计算出这两个系数值：

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{\int_0^{r_0}v^3\mathrm{d}A}{v^3A}=\frac{\int_0^{r_0}\left[\dfrac{\Delta p}{4\mu l}(r_0^2-r^2)\right]^3 2\pi r\mathrm{d}r}{\left(\dfrac{\Delta pr_0^2}{8\mu l}\right)^3\pi r_0^2}=2\\ \beta&=\frac{\int_0^{r_0}v^2\mathrm{d}A}{v^2A}=\frac{\int_0^{r_0}\left[\dfrac{\Delta p}{4\mu l}(r_0^2-r^2)\right]^2 2\pi r\mathrm{d}r}{\left(\dfrac{\Delta pr_0^2}{8\mu l}\right)^2\pi r_0^2}=\frac{4}{3}\end{aligned}\right\} \tag{4-10}$$

上面即为圆管内，充分发展了的层流中的两个修正系数值，正是我们在第三章中所指出的大小。

五、沿程阻力与沿程水头损失

沿程阻力由流动流体内部摩擦切应力 τ 所引起，把式（4-5）代入牛顿摩擦公式计算则

$$\tau=-\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{\Delta p}{4\mu l}(r_0^2-r^2)\right]=\frac{\Delta p}{2l}r \tag{4-11}$$

可见，τ 随 r 按线性规律分布，在管轴上最小（等于零）；在管壁上为最大

$$\tau_{max}=\tau|_{r=r_0}=\frac{\Delta p}{2l}r_0$$

τ 分布图参看图4-6，呈K字形分布。

不可压缩粘性流体在等径圆直管中作定常流动时，由于克服沿程摩擦阻力，使单位重力流体的能量沿程逐渐降低。降低的这部分能量叫做沿程水头损失，记作 h_f。对相距为 l 的两过水断面，应用伯努里方程得

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_f$$

式中 h_f 为从 1 断面流至 2 断面时的沿程水头损失。改写上式知：

$$h_f=\left(z_1+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}\right)-\left(z_2+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}\right)+\frac{\Delta p}{\gamma}$$

在现条件下 $\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$，并取 $z_1=z_2$，注意 $\Delta p=p_1-p_2$ 则

$$h_f=\frac{\Delta p}{\gamma} \tag{4-12}$$

可见在水平管流中，沿程水头损失就等于两断面间的压力水头损失，以式（4-8）中平均速度 v 代替压降 Δp 则得

$$h_f=\frac{1}{\gamma}\frac{32\mu l v}{d^2} \tag{4-12$'$}$$

式（4-12）′结果与雷诺实验所得出的层流沿程水头损失与平均流速的一次方成正比的结论是一致的。

上式还可改写成

$$h_f=\frac{64\gamma}{vd}\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}=\frac{64}{R_e}\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

或写成达西的形式

$$\left.\begin{aligned}h_f&=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}\\ \lambda&=\frac{64}{R_e}=f(R_e)\end{aligned}\right\} \tag{4-13}$$

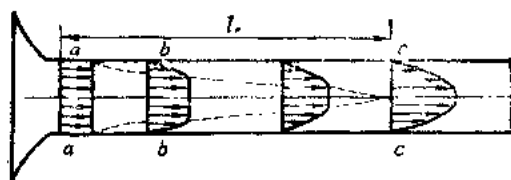


图 4-7　层流起始段

λ 称为沿程阻力系数，式（4-13）这个结果与哈根的实验数据吻合的很好。上式是在工程上计算沿程损失最常用的一个公式。

六、层流起始段

圆管中的层流，从进口到形成流速的抛物面分布是有一段过程的。一般在管之圆滑入口处，沿管断面流速几乎是均匀分布的（图4-7a-a）。进管后，由于粘滞性，管壁上流速迅速降为零，又由于内摩擦管壁附近流动受到阻滞、流速减小；但由于流动的连续性，管中心部分流动势必加快（图4-7b-b）。这么一来，在管进口后一段范围内，断面流速分布不断改变，直到距进口断面一段距离 l_e 的c-c断面上，流速分布才开始不再变化，形成稳定的抛物面流速分布。流动从管进口到 c-c 断面完全形成层流的抛物面速度分布的这一段，叫做层流起始段，其后的流动则称为完全发展了的层流流动。

从管进口至 c-c 断面这一段长 l_e，叫层流起始段的长度。席勒利用动量方程，并按管轴上最大流速 v_{max} 达到平均流速 v 之两倍时为起始段终了的标准，导出层流起始段长度 l_e 的计算公式：

$$l_e=0.02875dR_e \tag{4-14}$$

式中　d——圆管直径；

R_e ——管流雷诺数。

在起始段内，除了粘性摩擦水头损失外，还有由于流体加速所引起的附加水头损失。水头损失仍可按式（4-13）计算，但须取 $\lambda=\frac{A}{R_e}$（$A>64$），即

$$h_f=\frac{A}{R_e}\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} \tag{4-15}$$

A 的实验值可查表 4-2。

表4-2　层流起始段的A值表

$\frac{l}{dR_e}$	0.0025	0.005	0.01	0.0125	0.015	0.02	0.025	0.02875
A	122	105	88	82.4	79.16	74.38	71.5	69.56

实际上，$l\gg l_e$ 时，起始段影响可以忽略；如 $l<l_e$ 时，则须计及起始段的影响，h_f 按式（4-15）计算。液压传动中，许多油管内流动均处于层流起始段内，故沿程阻力系数应取 $\lambda=\frac{A}{R_e}$。不过为了避免麻烦常取 $\lambda=\frac{75}{R_e}$，这样既达到简化计算的目的，同时也适当计及了起始段的影响。

第四节　圆管中的紊流及其沿程损失

从第二节雷诺实验我们已经知道，当 $R_e>R_{ecr}$ 时，流动出现紊流型态，流体质点作杂乱无章的运动。紊流运动的结构十分复杂，运动极不规则、极不稳定。每一点的速度瞬息万变，随时间和空间随机地变化着。但每点瞬息变化的速度总存在着某一时均值，每刻的速度在时均值附近做不大的但频繁的上、下跳动，叫做紊流脉动。脉动频率在每秒10^2～10^5次之间，振幅则不超过时均速度的10%。由于脉动，使紊流与层流的运动性质（如速度分布、摩擦阻力、热传导等）大不相同。而在自然界和工程实践中的流动，又大多属于紊流。因此，对紊流进行研究是十分必要的。

关于紊流的研究存在着两条途径：一为紊流统计理论，试图利用统计数学的方法及概念来描写流动，研究紊流内部结构与紊流脉动规律。沿此途径虽也取得了一些成果，但距离实际应用还相差甚远。另一途径是紊流半经验理论，它根据一些假设与实验结果建立脉动与平均运动之间的关系式，以求解流动。半经验理论虽在理论上有局限性，但在一定条件下往往得出与实际符合的结果，因此在工程实际中得到广泛应用。本书只介绍半经验理论。

一、几个基本概念

（一）时均紊流

紊流运动极不规则，瞬息万变。在空间每个点流动参数，随时间随机地变化着。因此，紊流就其实质而论，属于非定常流动。对圆管中一固定点，我们用仪器测量并记录下该点瞬时轴向速度 v 随时间 t 的变化曲线如图 4-8 所示。可以看出，紊流速度变化很不规则、带有随机的性质，研究真实运动十分困难。况且工程实际上，对这种随机现象并不很感兴趣，而对紊流的平均运动则更有兴趣。因此应设法把流场中每点的瞬时速度作统计平均，然后去研

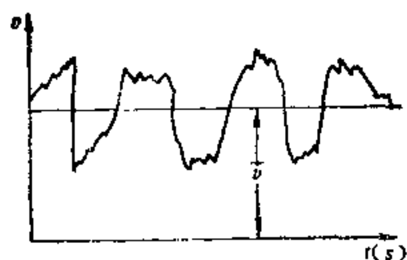


图 4-8　紊流中一点的瞬时速度

究它所对应的平均运动的变化规律。由于通常工程上所需要的和实验中所测量到的流动参变量（如速度、压力、阻力等），也都是平均意义下的数值，因此这样处理是完全能满足实际需要的。

从图 4-8 中可以看出，尽管紊流中一点的流速不规则地变化，但它却是围绕某一平均值（图 4-8 中水平直线）上、下跳变。如果对该点在时间间隔T内，取如下的速度平均值：

$$\bar{v}_T=\frac{1}{T}\int_0^T v\mathrm{d}t \tag{4-16}$$

则 $\bar{v}_T$ 就叫做该点时均速度、T叫时均周期，其长短须取为能得到稳定的时均值 $\bar{v}_T$。对不同紊流T大小不一样，在风洞中取 $T=1\text{s}$ 即可。瞬时速度超过时均速度的值 v'，叫做脉动速度。从而瞬时速度可表示为时均速度与脉动速度之和：

$$v=\bar{v}_T+v' \tag{4-17}$$

另外，管道紊流中，流体质点除了有沿管轴方向的在时均速度左右的纵向脉动外，还有在垂直于轴的断面内的横向脉动，横向脉动速度记为w'。

类似地，紊流中流动的其它参数也处于脉动状态。瞬时参数值皆可表示为其时均值与脉动值之和。如对压力可表示为：

$$p=\bar{p}_T+p' \tag{4-18}$$

引进紊流参数的时均值后，在通常情况下我们描述紊流运动用到的参数都指的是这种时均参数（为简便起见时均参数上面的“—”和下标“T”省掉，$\bar{v}_T$ 记为 v、$\bar{p}_T$就记为p等），而这种时均化后的紊流则称为“时均紊流”。并把其时均参数值不随时间改变的紊流，仍叫定常流动；时均参数值随时间变化的，叫不定常流动。

（二）　圆管紊流流动区域的划分

流体在圆管中作紊流运动时，虽然管中绝大部分区域处于混杂的紊流状态；但实验表明在贴近管壁的地方，受壁面影响总保持有一薄层流体处于层流状态。据此可将管中紊流的流动划分成三个流动区域：紧贴管壁的一薄层层流区域，叫层流底层区域；紊流充分发展了的管轴中心区域，称为紊流核心区域；在层流底层与紊流核心两个区域之间，还有一个界限不很分明的薄层过渡区（图4-9）。过渡层区一般不单独考虑，而把它并在紊流核心区范围内。

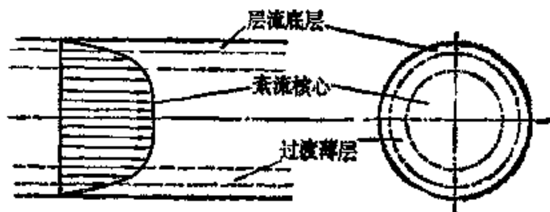


图 4-9　管中紊流的三个流区

层流底层的厚度 δ 很小，通常只有十分之几毫米。当雷诺数加大，管内紊流程度加剧，紊流核心区向管壁方向扩展，则层流底层厚度 δ 将减小。设管直径为 d、沿程阻力系数 λ，则层流底层厚度 δ 可按下列半经验公式计算：

$$\delta=\frac{32.8d}{R_e\sqrt{\lambda}} \tag{4-19}$$

层流底层厚度，对紊流沿程水头损失与管壁间流体之间的热交换有重要影响，是不容忽视

的。

（三） 水力光滑管与水力粗糙管

出厂的管子由于材料和加工等原因，管壁不可能绝对光滑；再加上使用过程中的沉渍与锈蚀等原因，管壁总是粗糙不平的。我们把管壁上粗糙凸起的平均高度Δ，叫做管壁的绝对粗糙度（图4-10）；而把它与管径 d 的比值 $\frac{\Delta}{d}$，则称为管壁的相对粗糙度。常用管壁的绝对粗糙度列表 4-3 中，以便参考。

表4-3 管壁的绝对粗糙度

管壁情况	绝对粗糙度 Δ/(mm)	管壁情况	绝对粗糙度 Δ/(mm)
干净的铜管、铅管	0.0015～0.01	干净玻璃管	0.0015～0.01
普通钢管	0.19	橡皮软管	0.01～0.03
使用数年后的整体钢管	0.19	水泥管道	0.25～1.25
涂柏油钢管	0.12～0.21	陶土排水管	0.45～6.0
精制镀锌钢管	0.25	纯水泥表面	0.25～1.25
普通镀锌钢管	0.39	水泥浆砌砌体	0.80～6.0
普通新铸铁管	0.25～0.42	混凝土槽	0.80～9.0
干净铸铁管	0.45	水泥与普通石块砌体	6.0～17.0
旧生锈钢管	0.60	刨平过的木槽	0.25～2.0
污秽的金属管	0.75～0.90	非刨平的木槽	0.45～3.0

层流底层对粗糙凸起的相对厚度，对沿程损失有重大影响。当 $\delta>\Delta$ 时，层流底层完全掩盖住了壁面的粗糙凸起（图4-10a）。紊流核心不受管壁粗糙度的影响，沿程损失较小，流体好象在完全光滑的管中流过一样。这时的管道对管中流动来说，叫做水力光滑管。当 $\delta<\Delta$ 时，管壁的粗糙凸起之一部分或大部分与紊流核心区接触。紊流经过粗糙凸起，引起旋涡，从而将加大沿程损失，管壁粗糙度对紊流发生了影响。这种管道对管中流动来说，就称为水力粗糙管。

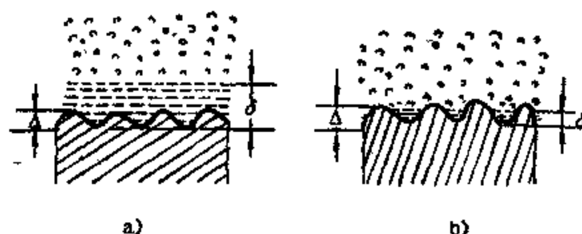


图 4-10 水力光滑管与水力粗糙管

管子是水力光滑的还是水力粗糙的，决定于两个因素δ与Δ的相对大小。δ大小决定于流动情况；Δ大小则决定于管子情况。所以管道为水力光滑还是水力粗糙，要由当时的流动与管子两种情况来共同决定。由于对确定的管子流动可以不同，对同样的流动可以发生在不同的管中，因此管道的水力光滑与水力粗糙也不是固定不变的。譬如一定的管路，当管流的 R_e 较小时是水力光滑的；但当管流的 R_e 增大时就可能是水力粗糙的了。同一管路，在新投入使用时是水力光滑管；但当用旧时却可能成为水力粗糙管了。

二、切应力及其分布

以下的讨论只限于圆管内对称于管轴的定常紊流。

（一） 紊流中的切应力

引进时均流动后，真实流动可以视为时均流动与脉动流动之和。相应地，紊流中的切应力也可看由两部分组成：一部分是由于粘性，在时均相对运动着的流体层之间产生切应力，

称为粘性切应力；另一部分则是由于脉动运动、流团掺混产生的切应力，叫做雷诺切应力。所以紊流中的总切应力可用下式表示：

$$\tau=\tau_{\mu}+\tau_{t}$$

式中 τ_{μ}——粘性切应力；

τ_{t}——雷诺切应力。

粘性切应力 τ_{μ} 可以用牛顿公式计算：$\tau_{\mu}=\mu\frac{dv}{dr}$；雷诺切应力 τ_{t} 的计算放在下段讨论。

（二） 勃朗特混合长度理论

在圆管的时均紊流中，分出一个半径为 r 的流体圆柱（图4-11）。由于横向脉动速度 w，经过圆柱侧面不停地有流体微团的进出。根据流动连续性的要求，流体圆柱的质量保持不变，所以进出圆柱体的流团只能是质量对等地交换。但由于从圆柱体内流出的流体流团沿轴向的速度，大于流进圆柱体内的流团轴向速度，所以圆柱体轴向动量将减少，根据动量定理在流体圆柱侧面上必作用着和流动方向相反的外力——由脉动引起的摩擦力。单位面积上的这种摩擦力，就是雷诺切应力 τ_{t}。以下我们根据勃朗特混合长度理论，建立雷诺应力和时均流场之间的关系。

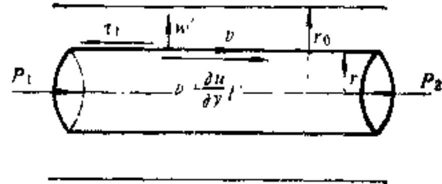


图 4-11 紊流中的动量交换

在图4-11中所示，原来具有轴向时均速度 v 的流体微团，由于横向脉动穿过圆柱体侧面潜入柱体内能达到的距离假设为 l'，来到具有轴向时均速度为 $v+\frac{dv}{dr}l'$ 的地方，同时发生流团交换。如以 w' 表示流出圆柱侧面流团的横向脉动速度，则单位时间内带出侧面单位面积的流体质量为 $\rho w'$，相应地单位时间内由于穿过此单位面积的流团交换所引起的圆柱的流轴方向的动量减少值等于：

$$\rho w'\frac{dv}{dr}l'$$

而这个量（根据动量定理）就应该等于流体圆柱侧面该单位面积上和流动方向相反的表面应力——雷诺切应力 τ_{t}，所以

$$\tau_{t}=\rho w'\frac{dv}{dr}l' \tag{4-20}$$

l' 这个量称为混合长度，是流团与周围的紊流掺混之前在垂直管轴方向所走的路程长度。

以下我们希望把 w' 与时均流速 v 联系起来。为此，设有两个流团由于横向脉动而分别从 $r-l'$ 与 $r+l'$ 的流体层内进入 r 层中。$r-l'$ 层内流团速度为 $v+\frac{dv}{dr}l'$，进入 r 层时使该层流体产生沿流轴正方向的脉动速度为：$v'=\frac{dv}{dr}l'$

$r+l'$ 层内流团进入 r 层后使该层流体产生沿流轴负方向的脉动速度

$$v'=\frac{dv}{dr}l'$$

这么一来，这两个流团就以相对速度$2v'$向相反方向远离而去，结果是使二流团间空出一部分空间。为了填补这个空间，旁边流体朝空当移动过来，于是便产生了横向脉动速度w'。因为v'愈大，空间出现的愈快、填补过程便也进行的愈迅速，即填补速度w'也愈大。因此

$$w' \propto v' = \frac{dv}{dr} l'$$

即

$$w' \propto l' \frac{dv}{dr}$$

结合式（4-20）得：

$$\tau_t \propto \rho l'^2 \left(\frac{dv}{dr} \right)^2$$

或写成等式：

$$\tau_t = \alpha \rho l'^2 \left(\frac{dv}{dr} \right)^2$$

α为比例系数，如令$\alpha l'^2 = l^2$则上式成为：

$$\tau_t = \rho l^2 \left(\frac{dv}{dr} \right)^2 \tag{4-21}$$

在式（4-21）中，l仍旧称为混合长度。上式即是勃朗特1925年建立的雷诺应力与时均流速关系式。这一公式，是分析紊流切应力、速度分布与阻力计算的基本公式。

由于紊流切应力是粘性切应力与雷诺切应力之和，即

$$\tau = \tau_\mu + \tau_t$$

把牛顿公式与式（4-21）代入则

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dr} + \rho l^2 \left(\frac{dv}{dr} \right) \tag{4-22}$$

上式中每项在紊流的不同流域中，所起的作用也不同。在层流底层区域里，第一项起主要作用，第二项可忽略不计；在紊流核心区域中，则正相反。

（三） 切应力分布

在圆管的定常时均紊流中隔出一半径为r、长l的流体圆柱段，沿管轴方向作用着压力p_1、p_2及切应力τ（图4-11）。由于流动是定常的，所以诸力平衡：

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 - \tau(2\pi r l) = 0$$

由此得

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{2l} r \tag{4-23}$$

由上式可以看出，沿管断面在管壁上$r = r_0$时切应力达到最大值τ_0。

$$\tau_0 = \frac{p_1 - p_2}{2l} r_0 \tag{4-24}$$

将此式与上式比较可得

$$\tau = \frac{r}{r_0} \tau_0 \tag{4-25}$$

由式（4-25）可见，在所述圆管紊流中，切应力沿管半径方向类似层流也是按直线规律分布的，图示则呈K字形分布。

（四） 运动微分方程

把式（4-25）代回式（4-22）即可得到圆管紊流的运动微分方程式：

$$\frac{r}{r_0}\tau_0=-\mu\frac{dv}{dr}+\rho l^2\left(\frac{dv}{dr}\right)^2 \tag{4-26}$$

由它可以确定速度沿半径方向的分布规律，

顺便指出，紊流讨论中常出现比值 $\frac{\tau_0}{\rho}$，记为v_*^2或

$$v_*=\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \tag{4-27}$$

因它具有速度的量纲，故把它叫作切应力速度。由式（4-24）可得

$$v_*^2=\frac{\tau_0}{\rho}=\frac{p_1-p_2}{2\rho l}r_0 \tag{4-28}$$

对某一确定紊流来说v_*为一常数。v_*是紊流最重要的特性之一。

三、流速分布

从式（4-26）出发，我们可以讨论圆管紊流速度沿管截面的分布规律。但由于在不同流区内速度分布规律不一样，所以应分区讨论。在这之前让我们改写式（4-26），引进从管壁算起、垂直壁面指向管轴的y坐标轴，则

$$y=r_0-r$$

把上式代入式（4-26），则运动微分方程变为：

$$\tau_0\left(1-\frac{y}{r_0}\right)=\mu\frac{dv}{dy}+\rho l^2\left(\frac{dv}{dy}\right)^2 \tag{4-26$'$}$$

（一） 层流底层区（$y\leqslant\delta$）

在层流底层内y很小，$\frac{y}{r_0}$与1相比可忽略不计；另外，在层流底层内雷诺应力 $\rho l^2\left(\frac{dv}{dy}\right)^2$很小，也可忽略不计，则式（4-26）′可近似表示为：

$$\tau_0=\mu\frac{dv}{dy}$$

两边除以密度ρ，则上式成为：

$$\frac{\tau_0}{\rho}=\frac{\mu}{\rho}\frac{dv}{dy}$$

$$v_*^2=\nu\frac{dv}{dy}$$

积分上式并利用边界条件：$y=0$时$v=0$定出积分常数后，可得下列速度分布公式：

$$\frac{v}{v_*}=\frac{v_*y}{\nu} \tag{4-29}$$

由此可得结论：层流底层中的速度v与离开壁面的距离y成线性关系。这是层流速度分布的抛

物线规律在层流底层中的近似结果。

（二） 紊流核心区（$y>\delta$）

在紊流核心区粘性切应力很小，相对于雷诺切应力可以略去不计，则式（4-26）′成为

$$\left(1-\frac{y}{r_0}\right)\tau_0=\rho l^2\left(\frac{dv}{dy}\right)^2 \tag{4-30}$$

为了求积必须确定混合长度l与y的关系。卡门根据实验作出混合长度l的分布曲线（图4-12）。此曲线可近似地用下列解析式表示

$$l=\kappa y\sqrt{1-\frac{y}{r_0}} \tag{4-31}$$

κ为一常数。

把式（4-31）代入式（4-30）并注意$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}=v_*$为切应力速度，则得

$$\frac{dv}{v_*}=\frac{1}{\kappa}\frac{dy}{y}$$

积分可得

$$\frac{v}{v_*}=\frac{1}{\kappa}\ln y+c \tag{4-32}$$

式（4-32）说明，在紊流核心区速度v与y成对数关系，称为紊流速度的对数分布规律。如图4-13所示。图中$v=v(y)$曲线比层流时要饱满的多，这是由于脉动混杂所导致的动量交换，使流速分布趋于均匀的结果。式（4-32）中常数尚未定出，因对水力光滑与水力粗糙管常数取值不同，故下面分别讨论。

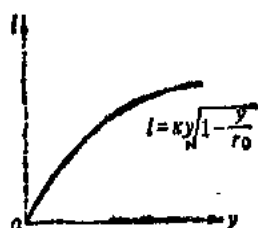


图4-12 混合长度分布

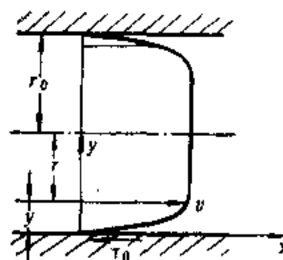


图4-13 紊流速度的分布

1. 水力光滑管

式（4-32）可以改写下列形式：

$$\frac{v}{v_*}=\frac{1}{\kappa}\ln\frac{v_*y}{\nu}+c_1$$

尼古拉兹对不可压缩粘性流体在细长光滑管内的定常紊流运动进行了大量实验研究，得出$\kappa=0.40$、$c_1=5.5$，把它们代入上式，并把自然对数换成常用对数，则得速度分布公式：

$$\frac{v}{v_*}=5.75\lg\frac{v_*y}{\nu}+5.5 \tag{4-33}$$

上式和实验结果是完全吻合的。

当$y=r_0$在管轴上速度最大：

$$\frac{v_{max}}{v_*}=5.75\lg\frac{v_* r_0}{\nu}+5.5 \tag{4-33}'$$

2. 水力粗糙管

为了把对流动起作用的管壁粗糙度Δ显含在式内，把式（4-32）改成下面形式：

$$\frac{v}{v_*}=\frac{1}{\kappa}\ln\frac{y}{\Delta}+c_2$$

尼古拉兹对水力粗糙管的实验研究得出$\kappa=0.40$、$c_2=8.5$，代入上式并改自然对数为常用对数得速度分布公式：

$$\frac{v}{v_*}=5.75\lg\frac{y}{\Delta}+8.5 \tag{4-34}$$

当$y=r_0$时速度最大：

$$\frac{v_{max}}{v_*}=5.75\lg\frac{r_0}{\Delta}+8.5 \tag{4-34}'$$

上面讨论了圆管紊流的速度分布规律，但对数分布规律用起来比较复杂，所以常利用纯经验的幂次规律：

$$\frac{v}{v_{max}}=\left(\frac{y}{r_0}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{4-35}$$

式中的v_{max}表示管截面上的最大速度，从前面的速度分布公式不难看出v_{max}出现在管轴上。n为正数，当R_e增加时n也增大。表4-4给出光滑管紊流速分布指数n随R_e变化情况。

表4-4　n随R_e变化表

雷诺数R_e	4×10^3	2.3×10^4	1.1×10^5	1.1×10^6	$(2\sim3.2)\times10^6$
n	6	6.6	7	8.8	10
$\frac{v_{max}}{v}$	1.26	1.24	1.22	1.17	1.16
α	1.11	1.07	1.06	1.03	1.03
β	1.04	1.03	1.02	1.01	1.01

表4-4中还列出了最大速度与平均速度之比$\frac{v_{max}}{v}$、动能修正系数α与动量修正系数β的数值。根据比值$\frac{v_{max}}{v}$，测出管轴流速v_{max}，便可求出平均流速v与流量Q。另外，从表中看出α、β只略大于1，故对紊流此二系数均可近似取为1。

四、平均速度

根据上面得到的圆管紊流速度分布公式，我们可以导出断面平均速度的相应表达式。由断面平均速度的定义，可写出下列表示式：

$$\begin{aligned}v&=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}v2\pi(r_0-y)\mathrm{d}y\\&=2\int_0^{r_0}v\left(1-\frac{y}{r_0}\right)\mathrm{d}\frac{y}{r_0}\end{aligned}$$

或
$$\frac{\bar{v}}{v_*}=2\int_0^{r_0}\frac{v}{v_*}\left(1-\frac{y}{r_0}\right)d\frac{y}{r_0} \tag{4-36}$$

因为层流底层区非常小，求断面平均速度时积分号下 $\frac{v}{v_*}$ 可就用紊流核心区对数分布式代入，由此引起之误差可忽略不计。但光滑管与粗糙管速度公式有所不同，故下面分开讨论。

（一） 光滑管情形

把式（4-33）代入式（4-36）并求积得：

$$\frac{\bar{v}}{v_*}=2\int_0^{r_0}\left(5.75\lg\frac{v_*y}{\nu}+5.5\right)\left(1-\frac{y}{r_0}\right)d\frac{y}{r_0}$$

$$=2\int_0^{r_0}\left(5.75\lg\frac{v_*y}{\nu}\right)\left(1-\frac{y}{r_0}\right)d\frac{y}{r_0}+2\int_0^{r_0}5.5\left(1-\frac{y}{r_0}\right)d\frac{y}{r_0}$$

$$=2\times5.75\int_0^{r_0}\lg\left(\frac{v_*r_0}{\nu}\cdot\frac{y}{r_0}\right)\left(1-\frac{y}{r_0}\right)d\frac{y}{r_0}+5.5$$

$$=2\times5.75\left[\int_0^{r_0}\left(\lg\frac{v_*r_0}{\nu}\right)\left(1-\frac{y}{r_0}\right)d\frac{y}{r_0}+\int_0^{r_0}\left(\lg\frac{y}{r_0}\right)\left(1-\frac{y}{r_0}\right)d\frac{y}{r_0}\right]+5.5$$

$$=5.75\lg\frac{v_*r_0}{\nu}+5.5+2\times5.75\int_0^{r_0}\left(\lg\frac{y}{r_0}\right)\left(1-\frac{y}{r_0}\right)d\frac{y}{r_0}$$

$$=5.75\lg\frac{v_*r_0}{\nu}+5.5-3.75$$

即得光滑管平均速度公式：

$$\frac{\bar{v}}{v_*}=5.75\lg\frac{v_*r_0}{\nu}+1.75 \tag{4-37}$$

由式（4-33）′光滑管紊流最大速度知：

$$\frac{v_{max}}{v_*}=5.75\lg\frac{v_*r_0}{\nu}+5.5$$

把上式与式（4-37）相减得：

$$\frac{v_{max}-\bar{v}}{v_*}=3.75 \tag{4-38}$$

（二） 粗糙管情形

不难看出在粗糙管情形下，即当速度按式（4-34）分布时：

$$\frac{v}{v_*}=5.75\lg\frac{y}{\Delta}+8.5$$

式（4-38）仍然成立，因此

$$\frac{\bar{v}}{v_*}=\frac{v_{max}}{v_*}-3.75$$

把式（4-34）代入上式得：

$$\frac{\bar{v}}{v_*}=\left(5.75\lg\frac{r_0}{\Delta}+8.5\right)-3.75$$

$$=5.75\lg\frac{r_0}{\Delta}+4.75 \tag{4-39}$$

五、沿程水头损失

为确定圆管中定常紊流在流经上、下游二断面间的沿程水头损失，类似于层流时那样写出这二断面间的伯努里方程式，则可知式（4-12）对紊流仍然成立

$$h_f=\frac{\Delta p}{\gamma}$$

由式（4-24）知：

$$\Delta p=p_1-p_2=\frac{2l\tau_0}{r_0}=\frac{4l\tau_0}{d}$$

式中 τ_0——管壁上切应力；

d——管直径；

l——二断面间距离。

把上式代回h_f式，则

$$h_f=\frac{4l\tau_0}{\gamma d}$$

由此不难看出
$$h_f\propto\frac{l}{d}$$

另外，在雷诺实验中我们得到紊流情况下，沿程损失h_f与平均速度 v 的关系式（4-3），即

$$h_f\propto v^m$$

式中，$m=1.75\sim2$。

综合上面两个关于h_f的比例式可得：

$$h_f\propto\frac{l}{d}v^m$$

为了便于分析比较，可把上面关系改写成和层流沿程损失公式（4-13）同样的达西形式：

$$\left.\begin{aligned}h_f&=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}\\ \lambda&=f\left(R_e,\frac{\Delta}{d}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}40)$$

式中λ是包含了修正写成达西形式时进入式内的那些人为因素的一个系数，叫作紊流沿程阻力系数。因此可以说，不论层流还是紊流其沿程水头损失均可用达西公式计算，关键在于确定相应的沿程阻力系数λ。

对于层流，其沿程阻力系数通过理论分析的方法已经推导了出来：$\lambda=\frac{64}{R_e}$，并已为实验所证实。对于紊流则由于流动的复杂性，不可能单纯依据理论导出一个阻力系数 λ 的通用公式。实验研究表明，紊流阻力系数一般情况下与雷诺数及管壁相对粗糙度有关，故式（4-40）中 $\lambda=f\left(R_e,\frac{\Delta}{d}\right)$。人们在紊流的各具体情况下，综合实验结果，经过分析归纳出了一些λ的半经验公式，这些我们将在下面分别介绍。

为了导出紊流情况下，沿程阻力系数λ的半经验计算公式，先来建立λ与平均速度v的关

系。由式 (4-28) 知：

$$v_*^2=\frac{\Delta p}{2\rho l}r_0=\frac{\Delta p}{4\rho l}d$$

$$=\frac{gd}{4l}\cdot\frac{\Delta p}{\gamma}$$

$$=\frac{gd}{4l}h_f$$

式中 d——圆管直径；

g——重力加速度；

h_f——沿程水头损失。

h_f代入达西表达式后，上式成为：

$$v_*^2=\frac{gd}{4l}\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

即

$$\lambda=8\left(\frac{v_*}{v}\right)^2 \tag{4-41}$$

（一） 光滑管紊流的λ

由式 (4-41) 改写得：

$$\frac{v}{v_*}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\lambda}}$$

将式 (4-37)代入上式

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\lambda}}=5.75\lg\frac{v_*r_0}{\nu}+1.75$$

$$=5.75\lg\left(\frac{vd}{\nu}\cdot\frac{v_*}{2v}\right)+1.75$$

$$=5.75\lg\left(R_e\frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{8}}\right)+1.75$$

$$=5.75\lg(R_e\sqrt{\lambda})-5.75\lg2\sqrt{8}+1.75$$

$$=5.75\lg(R_e\sqrt{\lambda})-2.5773$$

由此得到

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2.03\lg\left(R_e\sqrt{\lambda}\right)-0.91$$

为使上式与实验结果更吻合，0.91应修改为0.8，因此最后得到：

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2.03\lg(R_e\sqrt{\lambda})-0.8 \tag{4-42}$$

上式叫做阻力系数的勃朗特光滑管公式，在整个光滑管范围内与实验结果一致。但由于它是隐函数形式，用起来不太方便。

（二） 粗糙管紊流的λ

由式(4-41)得

$$\lambda=8\left(\frac{v_*}{v}\right)^2$$

把式(4-39)代入上式得

$$\lambda=8\left(5.75\lg\frac{r_0}{\Delta}+4.75\right)^{-2}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^{-2}\left(5.75\lg\frac{r_0}{\Delta}+4.75\right)^{-2}$$

$$=\left(\frac{5.75}{\sqrt{8}}\lg\frac{r_0}{\Delta}+\frac{4.75}{\sqrt{8}}\right)^{-2}$$

即

$$\lambda=\left(2.03\lg\frac{r_0}{\Delta}+1.68\right)^{-2}$$

为能和实验结果符合的更好，须把1.68改为1.74，从而有：

$$\lambda=\left(2.03\lg\frac{r_0}{\Delta}+1.74\right)^{-2} \tag{4-43}$$

上式称为尼古拉兹粗糙管公式，在整个粗糙管范围内与实验结果甚为吻合。

六、紊流起始段

和层流的情况类似，圆管紊流从进口断面的均匀流速分布到形成稳定的断面流速对数分布规律，是在管中经历了一段过程的。流速从管进口的均匀分布到形成对数分布的这个流段，称为管流的紊流起始段，这段管长叫起始段的长度，记为l_e。在起始段中，流速的断面分布不断变化；起始段后则流速成为稳定的对数分布，并称起始段后的流动为充分发展了的紊流流动。

紊流起始段的长度较层流短。这是因为，一方面流速从均匀分布到较平坦的对数分布，容易过渡；另一方面紊流横向混杂也加速了这种过渡。根据尼古拉兹实验，紊流起始段长度为：

$$l_e=(25\sim40)d$$

系数取值大小，依据入口前流动受扰程度及管入口形状而定。根据边界层理论，当$R_e=\frac{vd}{\nu}\leqslant10^5$时，导出起始段长度计算公式为：

$$l_e=1.36R_e^{1/4} \tag{4-44}$$

在起始段中沿程水头损失，除摩擦损失外还有由于流体加速所引起的附加损失。在紊流情况下，当$R_e<10^5$时，在水头损失的达西公式(4-13)中应取$\lambda=\frac{0.3164}{R_e^{1/4}}$。但在起始段中考虑到附加损失，沿程阻力系数应取为：

$$\left.\begin{aligned}&\lambda=\frac{A}{R_e^{1/4}}\\&A=0.3164+\sigma/\left(\frac{l}{dR_e^{1/4}}\right)\end{aligned}\right\} \tag{4-45}$$

附加损失系数σ，对圆管光滑进口，可以确定如下：

$$\left.\begin{aligned}\sigma&=0.07\left(\frac{l}{dR_e^{1/4}}\right)^{0.30} &&\left(当\ \frac{l}{dR_e^{1/4}}\leqslant 1.36\right)\\ \sigma&=0.07 &&\left(当\ \frac{l}{dR_e^{1/4}}>1.36\right)\end{aligned}\right\}\tag{4-46}$$

因为紊流起始段较短，且附加损失也较小，故在圆管紊流计算中，一般不单独计算而就按充分发展紊流处理，特别是当雷诺数较大时。

第五节　圆管的沿程阻力系数

圆管中流动的沿程水头损失，不论流动的型态如何都可以按达西公式进行计算。但是对不同的流态，沿程阻力系数不一样；在紊流情况下，光滑管与粗糙管的沿程阻力系数公式也是各自不同的。对于层流，沿程阻力系数公式，已经用纯理论的方法推导出来；对于紊流，经过半理论半经验的方法，也已经分别建立了光滑管和粗糙管的沿程阻力系数算式。本节我们将通过实验的办法，对圆管中流动的阻力系数进行全面的、系统的研究，并介绍几个对实际计算是非常有用的沿程阻力系数的经验公式。

一、尼古拉兹实验曲线

尼古拉兹约在1930年，对圆管的沿程阻力作过系统的实验研究。他把不同粒径的砂粒均匀地粘到内壁刷了漆的圆管中，造成$\frac{\Delta}{d}=\frac{1}{30}\sim\frac{1}{1014}$六种不同相对粗糙度的管子，对它们在$R_e=400\sim10^6$广阔雷诺数范围内做过流实验，测算出对应的阻力系数$\lambda$。尼古拉兹于1933年发表了他的实验曲线，这就是有名的尼古拉兹曲线——阻力系数λ随雷诺数R_e与管相对粗糙度$\frac{\Delta}{d}$而变化的关系曲线。为清楚起见，把曲线绘在对数坐标系中，如图4-14（图中是用R_e及λ值标出的）所示。下面就把尼古拉兹曲线分成几个区域来分析和讨论，并介绍相应的λ经验公式。

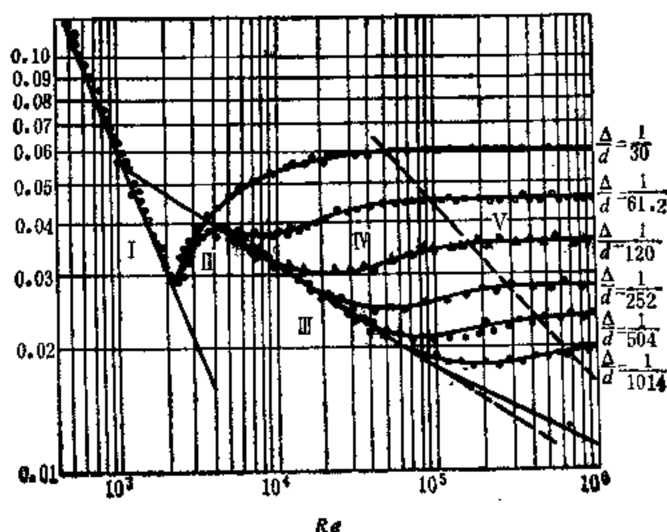


图4-14　尼古拉兹曲线

（一） 层流区

当$R_e<2320$时，管流为层流。图上表明，这时所有实验点都落在直线Ⅰ上：$\lambda=\frac{64}{R_e}$。这说明λ只与R_e有关 而与$\frac{\Delta}{d}$无关，且在此区

$$\lambda=\frac{64}{R_e}$$

这表明，在此区理论分析与实验结果的完全一致。

（二） 层流到紊流的过渡区

$2320<R_e<4000$，这是个由层流过渡到紊流的不稳定区。由图上看出，此区实验点分布在曲线Ⅱ上、下。实用上，由于该区狭窄且流态也不稳定，所以常归入下一区处理。

此区有扎依钦科经验公式可供参考：

$$\lambda=0.0025R_e^{1/3} \tag{4-47}$$

（三） 光滑管紊流区

$4000<R_e<40\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{\frac{8}{7}}$，对具有不同相对粗糙度的管流，只要它的雷诺数在上述区间内，则在图上它们的实验点就全落在倾斜直线Ⅲ上。直线Ⅲ的方程为：

$$\lambda=\frac{0.3164}{R_e^{0.25}} \tag{4-48}$$

此式由勃拉修司得到，故称为勃拉修司公式。

由阻力系数公式(4-48)看出，这时λ只是R_e的函数而与$\frac{\Delta}{d}$无关。这说明管壁粗糙度被掩盖在层流底层内，尚未触及紊流核心，故未对沿程损失产生影响。这正是光滑管紊流情形，这时$h_f\propto v^{1.75}$。

在此区域λ的半经验公式有勃朗特式（4-42）。经验式在$4000<R_e<10^5$时，勃拉修司λ公式是较准确的，但当$10^5<R_e<3\times10^6$时，尼古拉兹建议采用下列经验公式：

$$\lambda=0.0032+\frac{0.221}{R_e^{0.237}} \tag{4-49}$$

由实验测得，当管流为光滑管紊流时有

$$\frac{\Delta}{\delta}<0.4 \tag{a}$$

层流底层与紊流核心之流速，由式(4-29)、式(4-33)得：

$$\frac{v}{v_*}=\frac{v_* y}{\nu}$$

$$\frac{v}{v_*}=5.75\lg\frac{v_* y}{\nu}+5.5$$

在交界$y=\delta$处，上二式算出之流速应相等

$$\frac{v_*\delta}{\nu}=5.75\lg\frac{v_*\delta}{\nu}+5.5$$

$$\delta=11.5\frac{\nu}{v_*} \tag{b}$$

把式(b)代入式(a')可得：

$$\frac{v^*\Delta}{\nu}<5$$

即
$$R_e<5\left(\frac{V}{v_*}\right)\left(\frac{d}{\Delta}\right)$$

把$\frac{V}{v_*}$用式(4-41)代入则

$$R_e<\frac{14.142}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{d}{\Delta}\right)$$

阻力系数λ用式(4-48)代入上不等式得到：

$$R_e<40\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{\frac{8}{7}}$$

这就是光滑管紊流区上限取为$40\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{\frac{8}{7}}$的根据。

（四） 紊流粗糙管过渡区

$40\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{\frac{8}{7}}<R_e<396\left(\frac{d}{\Delta}\right)\lg\left(\frac{3.7d}{\Delta}\right)$，对具有大小不同的$\frac{\Delta}{d}$之管流，当其雷诺数在所述区间内时，实验点先后离开直线Ⅲ，而各自散落到直线Ⅲ与虚线之间的某一曲线段上。

上述情况说明，随着雷诺数R_e的增大层流底层厚度δ逐渐减薄，不再能掩盖粗糙突起了，按相对粗糙度$\frac{\Delta}{d}$的大小，管流先后从水力光滑管紊流进入水力粗糙管紊流，粗糙度也依次开始对沿程水头损失发生影响。把图上与曲线段对应的雷诺数区间，叫做紊流粗糙管过渡区（简称区Ⅳ）。

在Ⅳ区中，管流的沿程阻力系数λ既与雷诺数R_e有关也与相对粗糙度$\frac{\Delta}{d}$有关，即$\lambda=f\left(R_e,\frac{\Delta}{d}\right)$。由于情况复杂，不象其它区均有理论的、或半理论的$\lambda$计算公式，而本区只有一些经验公式。如库尔布鲁克公式：

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=-2\lg\left(\frac{\Delta}{3.7d}+\frac{2.51}{R_e\sqrt{\lambda}}\right) \tag{4-50}$$

此式为λ的隐函数形式，用起来不方便。它有一个简化形式，叫阿里特苏里公式：

$$\lambda=0.11\left(\frac{\Delta}{d}+\frac{68}{R_e}\right)^{0.25} \tag{4-50'}$$

本区域的上限$396\left(\frac{d}{\Delta}\right)\lg\left(\frac{3.7d}{\Delta}\right)$是按下述原则确定的：根据实验，当$0.4<\frac{\Delta}{\delta}<6$时管流为紊流粗糙管过渡区。类似于(三)中，这相当于要求

$$5<\frac{v_*\Delta}{\nu}<70$$

为确定上限，只要考虑右不等式。改写后得

$$R_e<70\left(\frac{v}{v^*}\right)\left(\frac{d}{\Delta}\right)$$

代入式(4-41)得：

$$R_e<\frac{198}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{d}{\Delta}\right)$$

阻力系数λ代入尼古拉兹粗糙管公式(4-43)则

$$R_e<396\left(\frac{d}{\Delta}\right)\lg\left(\frac{3.7d}{\Delta}\right)$$

这样就得到了粗糙管紊流过渡区的上限。

（五） 紊流粗糙管阻力平方区

$R_e>396\left(\frac{d}{\Delta}\right)\lg\left(\frac{3.7d}{\Delta}\right)$，相对粗糙度$\frac{\Delta}{d}$大小不同的各管流，当雷诺数在所述范围内时，它们的实验点依次分布在虚线右边从上到下的各条水平直线上。把虚线右侧各平行直线对应的雷诺数区域，称为紊流粗糙管阻力平方区（简称阻力平方区Ⅴ）。

此区，对一定相对粗糙度$\frac{\Delta}{d}$=const的管流，阻力系数λ=const，即λ与雷诺数R_e无关，而只决定于相对粗糙度$\frac{\Delta}{d}$。这是由于，此区雷诺数R_e较大、层流底层厚度δ很薄，粗糙突起全都高出层流底层，伸入紊流核心区，阻力损失几乎全部由粗糙突起所引起，因而粘性损失可忽略不计的缘故。

由达西公式可以看出，在此区$h_f\propto v^2$，故本区又叫阻力平方区。另外，在该区做模型实验时，不论模型流动与实际流动雷诺数是否相等，它们的粘性力会自动保持力学相似，因此Ⅴ区也叫自动模型区。

阻力平方区中，$\lambda=f\left(\frac{\Delta}{d}\right)$，具体说此区有半经验算式，尼古拉兹公式(4-43)。实际计算中，常引用的经验公式，叫作希夫林松公式：

$$\lambda=0.11\left(\frac{\Delta}{d}\right)^{0.25} \tag{4-51}$$

下面把五个阻力区的阻力系数计算公式汇总列于表4-5中。

用表中公式进行实际工业管道计算时，需要确定粗糙度Δ的值。但工业实用管道的粗糙度由于大小、形状和分布均很不规则，故难以直接测定，通常是由实验测算出阻力系数λ值，再用尼古拉兹公式(4-43)反算出对应的Δ值，将此Δ值作为该管壁的绝对粗糙度，并称为当量绝对粗糙度。实际计算时，采用的就是这种当量粗糙度。表4-6给出一部分管材的当量绝对粗糙度Δ值，以供参考。

尼古拉兹实验曲线是对管道紊流研究作出的一大贡献，具有重要的理论意义和实用价值。尼古拉兹的实验不但验证和发展了勃朗特混合长度理论，而且也是进行管道设计与计算

表 4-5 五个阻力区的λ计算公式

阻力区	R_e的范围	λ的理论或半理论公式	λ的经验公式
层流区	$R_e<2320$	$\lambda=\frac{64}{R_e}$	—
层流到紊流的过渡区	$2320<R_e<4000$	—	$\lambda=0.0025R_e^{1/3}$
光滑管紊流区	$4000<R_e<40\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{\frac{8}{7}}$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\lg(R_e\sqrt{\lambda})-0.8$	$R_e<10^5$: $\lambda=\frac{0.3146}{R_e^{0.25}}$ $10^5<R_e<3\times10^6$: $\lambda=0.0032+\frac{0.221}{R_e^{0.237}}$
紊流粗糙管过渡区	$40\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{\frac{8}{7}}<R_e<396\left(\frac{d}{\Delta}\right)\lg\left(\frac{3.7d}{\Delta}\right)$	—	$\lambda=0.11\left(\frac{\Delta}{d}+\frac{68}{R_e}\right)^{0.25}$ $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=-2\lg\left(\frac{\Delta}{3.7d}+\frac{2.51}{R_e\sqrt{\lambda}}\right)$
紊流粗糙管阻力平方区	$R_e>396\left(\frac{d}{\Delta}\right)\lg\left(\frac{3.7d}{\Delta}\right)$	$\lambda=\frac{1}{\left[2\lg\left(3.7\frac{d}{\Delta}\right)\right]^2}$	$\lambda=0.11\left(\frac{\Delta}{d}\right)^{0.25}$

表 4-6 管材的绝对粗糙度

管 材	Δ/mm	管 材	Δ/mm
铜、铝管	0.0015	新铸铁管	0.25
玻璃、塑料管	0.001	普通铸铁管	0.5
橡胶软管	0.01～0.03	旧铸铁管	1～3
无缝钢管	0.04～0.17	沥青铁管	0.12
新钢管	0.12	镀锌铁管	0.15
普通钢管	0.2	混凝土管	0.33
旧钢管	0.5～1	木材管	0.25～1.25

的依据。

二、莫迪图

库尔布鲁克公式(4-50)，是在总结了大量工业实用管道之实验资料的基础上提出来的。它实际上是溶合了勃朗特光滑管公式(4-42)和尼古拉兹粗糙管公式(4-43)的一个综合公式。在光滑管情况下$\frac{\Delta}{3.7d}$项可以忽略，式(4-50)回到式(4-42)；在粗糙管情况下，相对来说可把$\frac{2.51}{R_e\sqrt{\lambda}}$舍去，则式(4-50)就变成式(4-43)了。所以库尔布鲁克公式不仅适用于紊流粗糙管过渡区Ⅳ，而是适用于R_e数从4000到10^6的整个紊流的Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ三个阻力区的一个公式。正因如此，式(4-50)在实际计算中具有很大的优越性。

在应用库尔布鲁克公式计算阻力系数λ时，公式结构稍嫌复杂。莫迪依据工业管道实验数据和库尔布鲁克公式绘制了$\lambda=f\left(R_e,\frac{\Delta}{d}\right)$曲线图，叫做莫迪图（图4-15)，该图系按对数坐标绘制。

比较莫迪曲线与尼古拉兹曲线可以看出，两者除了过渡区外是相同的。但在过渡区曲线形状不同，工业实用管道曲线λ随R_e数增加而减少，并且过渡区λ值比平方区λ值大。

知道了管流雷诺数R_e及管壁当量粗糙度$\frac{\Delta}{d}$，就可以立刻从莫迪图或尼古拉兹图上查取到相应的阻力系数λ值。但莫迪曲线更能反映工业实用管路的真实情况，特别是在过渡区应以莫迪图为准。

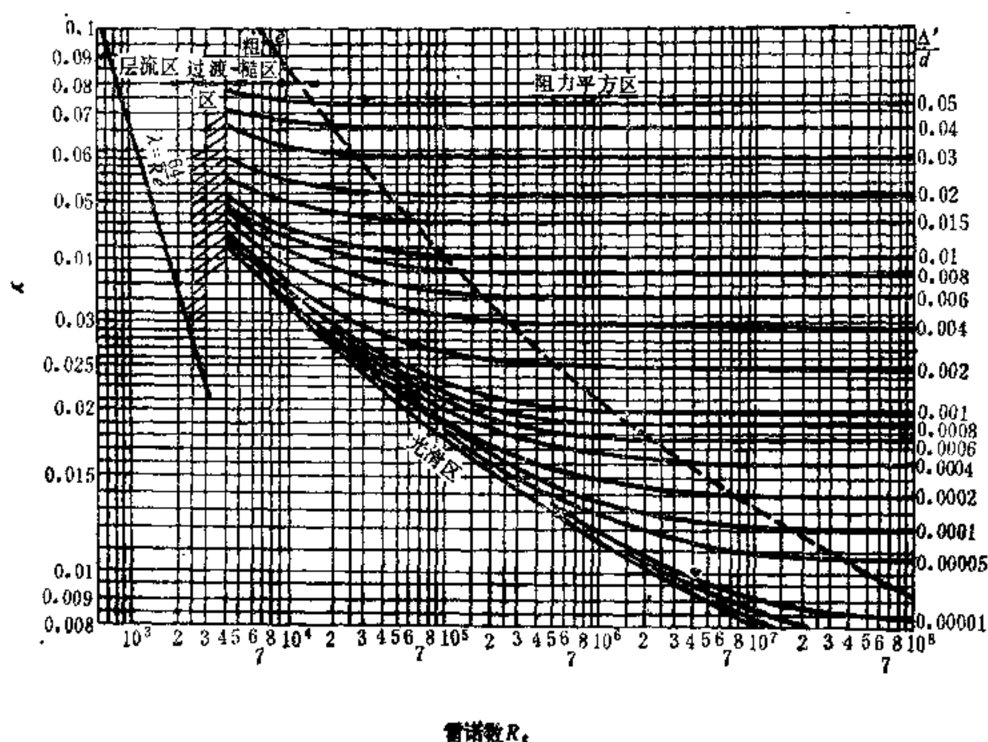


图4-16 莫迪图

第六节 非圆形管道的沿程水头损失

在工程实际上所遇到的流体输送管道并非全是圆形截面的，水槽、通风管道等截面大多是矩形，有些场合还会遇到圆环形或其它更复杂的形状。对非圆形截面的流体输送管道，应怎样计算它的沿程水头损失呢？

对计算非圆形截面管道沿程水头损失，大量实验说明达西公式仍然适用，只是圆管直径d均应代以当量直径d_H(参第二节)，则

$$h_f=\lambda\frac{l}{d_H}\frac{v^2}{2g} \tag{4-52}$$

式中阻力系数λ，对层流与紊流分别介绍如下。

一、层流阻力系数λ

非圆形截面管道的阻力系数，可通过给圆形截面阻力系数加一个修正系数后得到：

$$\lambda=K\frac{64}{R_{eH}} \tag{4-53}$$

式中 $R_{eH}=\frac{vd_H}{\nu}$ d_H为管道过水断面的当量直径；

K称为形状系数，对不同形状过水断面取值不同。

(一) 圆环形截面管道

$$K=\frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}{1+\left(\frac{r}{R}\right)^2+\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]/\ln\frac{r}{R}}$$

式中 r ——内圆半径（图4-16a)；

R ——外圆半径。

a)　　b)

图4-16　环形与矩形截面的尺寸

（二）　等边三角形截面管道

$$K=\frac{5}{6}$$

（三）　正方形截面管道

$$K=0.888$$

（四）　矩形截面管道

矩形截面管道的形状系数K值与长、宽比$\frac{h}{b}$(图4-16b)有关。兹将K值列表4-7如下：

表 4-7　矩形截面的 k 值表

$\frac{h}{b}$	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10
K	0.888	0.919	0.970	1.070	1.137	1.193	1.230	1.278	1.285	1.322

二、紊流阻力系数λ

对非圆形截面管道中之紊流，阻力系数可采用下列通用公式：

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=-2\lg\left[\frac{\Delta}{3.7d_H}+\left(\frac{6.8}{R_{eH}}\right)^{0.9}\right] \tag{4-54}$$

第七节　管路中的局部水头损失

在管路上由于输送流体的各种具体需要，必须安装形形色色的管路附件，如弯管、阀门、变管径段、三通、管道进出口等。不论何种附件，均为使流动边界发生急剧变化，并引起在附件附近的局部地区内流体流动结构的变化，从而招致局部水头损失。下面分别讨论各种局部水头损失产生的物理原因及其计算方法。

一、突然扩大

流体从小管径管道流进大管径管道时，在管截面突然变化的附近将产生局部水头损失，称为突然扩大水头损失。图4-17为一突然扩大管段的流动图案，当流体从小管流进大管时，主流与管壁脱离，并在拐角处形成旋涡区。旋涡由于旋转摩擦不断地消耗能量，主流又不停地把能量传递给旋涡补充它消耗掉的能量维持着它的转动；另外，在管段中突然扩大的流速分布沿程不断地在调整，这也将引起附加的能量损失。上述两方面是产生突然扩大局部水头损失的主要原因。

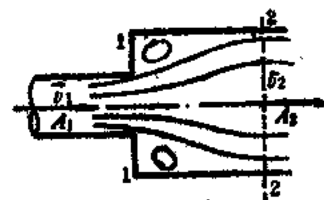


图4-17　突然扩大流动图

突然扩大水头损失计算公式可以用解析的方法导出。为

此取小管出口断面 1-1 为上游控制面（面积）；在离扩大起点足够远（大于 $8d_2$）的地方取下游控制面 2-2（面积）。按上述所取二断面，将为缓变流断面，对它们列出伯努里方程：

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}+h_j$$

注意在管轴上$z_1=z_2$则

$$h_j=\frac{p_1-p_2}{\gamma}-\frac{v_1^2-v_2^2}{2g} \quad (a)$$

为了把压力项改用速度表示，我们对以断面1-1、2-2及它们之间管壁为控制面的流段，在管轴方向使用动量方程。单位时间内流出、流进控制面的动量差：

$$\rho q_V(v_2-v_1)=\rho A_2 v_2(v_2-v_1)$$

根据实验得知，扩大管段拐角处压力分布服从静水力学规律，再忽略掉摩擦力，则作用在控制面内流段上外力，在管轴方向投影之和为：

$$\Sigma Fa=p_1A_2-p_2A_2=a_2(p_1-p_2)$$

代入动量方程得：

$$A_2(p_1-p_2)=\rho A_2 v_2(v_2-v_1)$$

或
$$p_1-p_2=\rho v_2(v_2-v_1) \quad (b)$$

把式（b）代入式（a）：

$$h_j=\frac{\rho v_2(v_2-v_1)}{\gamma}+\frac{v_1^2-v_2^2}{2g}$$

$$=\frac{v_2(v_2-v_1)}{g}+\frac{v_1^2-v_2^2}{2g}$$

$$=\frac{(v_1-v_2)^2}{2g}$$

根据连续性方程式$v_1A_1=v_2A_2$，则上结果可写成两种表示形式：

$$\left.\begin{aligned}h_j&=\zeta_1\frac{v_1^2}{2g}\\&=\zeta_2\frac{v_2^2}{2g}\\\zeta_1=\left(1-\frac{A_1}{A_2}\right)^2&;\quad \zeta_2=\left(\frac{A_2}{A_1}-1\right)^2\end{aligned}\right\} \quad (4-55)$$

式（4-55）即为突然扩大局部水头损失计算公式，为速度水头与系数ζ的乘积。ζ叫突然扩大局部阻力系数，由式（4-55）知，与扩大前、后速度水头搭配时，取值不同。式(4-55)对一般局部水头损失计算具有普遍意义。

二、弯管（弯头）

管路中在要改变流动方向的地方，需要安装弯管（也叫弯头）这样的附件。流过弯管流体要产生局部水头损失，这时造成损失除突然扩大原因外，还有因二次流引起的附加损失。

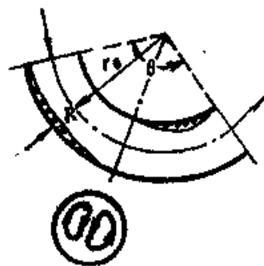


图4-18 弯管流动

流体沿弯管流动时，由于离心惯性力的作用，使弯管外侧压力大于弯管内侧的压力。在压力差的作用下，流体将沿管壁由外向内流动，从而在径向平面内形成两个回流（图4-18），叫作二次流。二次流与主流结合便产生了双螺旋流动，并往下游延续至50～75d的地方，在这段中将引起额外的能量损失。

弯管局部水头损失仍按

$$h_j=\zeta\frac{v^2}{2g}$$

计算、阻力系数ζ随弯角θ、弯管中心线曲率半径R与管半径r_0比值$\frac{r_0}{R}$而变。维斯巴赫总结实验数据得到下列弯管阻力系数的经验公式：

$$\zeta=\left[0.131+1.847\left(\frac{r_0}{R}\right)^{3.5}\right]\frac{\theta^\circ}{90^\circ} \tag{4-56}$$

90°弯管的阻力系数值，参看表4-8。

三、一般的局部水头损失

引起局部水头损失的管路附件各式各样，但产生局部水头损失的物理实质确是与上面讨论过的一样：旋涡区的存在和断面速度的重新分布。对突然扩大通过理论分析，我们已经得到了水头损失的计算公式。对其它形式的装置所引起的局部水头损失，我们虽不能用理论分析得到它们的计算公式，但基于上述理由我们确信：它们的计算公式应与突然扩大的算式具有同样的结构形式：

$$h_j=\zeta\frac{v_2}{2g} \tag{4-57}$$

式中ζ也叫作局部阻力系数，它对不同局部装置是不同的而且与R_e有关，要由实验来确定。

我们把常遇到的几种局部阻力系数列于表4-8中，以供参考。

应该说明，在局部装置前、后管断面尺寸变化时，要注意所选用阻力系数是与局部装置前还是后的速度水头搭配；一般局部阻力系数ζ与R_e有关，但表格中所给数据是R_e充分大、以致它已不再对ζ的大小有影响时的ζ值。

四、水头损失的迭加原则

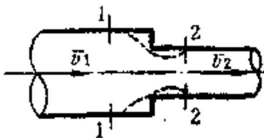
表格、手册中查取到的ζ值，是在单独和无干扰的条件下测定的.如果在一管路系统中，两个局部阻力相距太近就会互相干扰，而且局部阻力还会影响它后面适当长度上的沿程损失。

在计算一管路系统的总水头损失时，考虑到两个过近的局部阻力，虽然使后一个局部阻力损失有所增大，但却缩短了前一局部阻力对其后沿程阻力损失的影响长度，因而是互有抵消的。所以管路系统总水头损失，就按所有沿程损失与所有局部损失的算术迭加办法计算了。这就是所谓水头损失迭加原则。因此

$$h_w=\Sigma\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}+\Sigma\zeta\frac{v^2}{2g} \tag{4-58}$$

表4-8 局部阻力系数

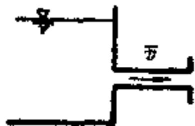
一、断面突然收缩



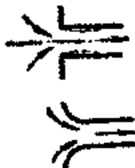
$$h_j=\zeta\frac{v_2^2}{2g},\quad \zeta=f\left(\frac{A_2}{A_1}\right)$$

$\frac{\omega_2}{\omega_1}$	0.01	0.10	0.20	0.40	0.60	0.80	1.0
ζ	0.5	0.45	0.40	0.30	0.20	0.10	0.0

二、管道进口



$$h_j=\zeta\frac{\bar{v}^2}{2g}$$



直角进口$\zeta=0.5$

喇叭形进口$\zeta=0.05\sim0.20$

三、断面逐渐收缩



$$\zeta_2=\frac{\lambda}{8\sin\frac{\theta}{2}}\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]$$

λ——按直径 $d=\frac{1}{2}(d_1+d_2)$计算的圆管沿程阻力系数

四、断面逐渐扩大



$$\zeta_1=\frac{\lambda}{8\sin\frac{\theta}{2}}\left[1-\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right]+K\left(1-\frac{A_1}{A_2}\right)\quad \frac{A_1}{A_2}=\frac{1}{4}\text{时:}$$

$\theta°$	2	4	6	8	10	12	14	16	20
K	0.022	0.048	0.072	0.103	0.138	0.177	0.221	0.270	0.386

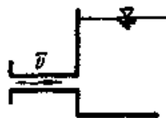
五、断面突然扩大



$$h_j=\zeta_2\frac{\bar{v}_2^2}{2g},\quad \zeta_2=\left(\frac{A_2}{A_1}-1\right)^2$$

$$\text{或}h_j=\zeta_1\frac{\bar{v}_1^2}{2g},\quad \zeta_1=\left(1-\frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

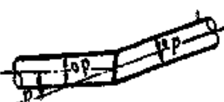
六、管道出口



$$h_j=\zeta\frac{\bar{v}^2}{2g}$$

$\zeta=1$

七、折管



$\alpha°$	10	20	30	40	50	60	70	80	90
ζ	0.04	0.10	0.17	0.27	0.40	0.55	0.70	0.90	1.12

(续)

八、弯管

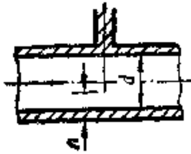


$$\zeta=\left[0.131+0.163\left(\frac{d}{R}\right)^{3.5}\right]\frac{\theta^{\circ}}{90}=\zeta'\frac{\theta}{90^{\circ}}$$

$d/2R$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
ζ'	0.13	0.14	0.16	0.21	0.29

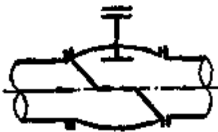
$(d_1=d_2)$

九、闸阀



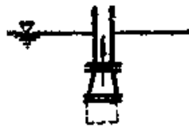
$\frac{d-h}{d}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$
ζ	0.00	0.07	0.26	0.81	2.06	5.52	17.0	97.8

十、阀门



开度(%)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
ζ	85	24	12	7.5	5.7	4.8	4.4	4.1	4.0	3.9

十一、底阀



$\zeta=5\sim10$

第八节 应用举例

[例4-2] 设有一水平输油管，直径 $d=0.2$m、长度 $l=500$m，管中输送的油重度 $\gamma=800\text{kg/m}^3$、运动粘性系数 $\nu=7\text{cm}^2/\text{s}$，流量 $q_v=0.022\text{m}^3/\text{s}$，问在该油管中损失的压力为若干？

[解] 对油管起、止断面列出伯努里方程得：

$$h_w=(z_1-z_2)+\frac{p_1-p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2-\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

对管断面中心 $z_1=z_2$，并考虑到 $\alpha_1=\alpha_2$、$v_1=v_2$ 和 $h_w=h_f$ 则

$$h_f=\frac{p_1-p_2}{\gamma}$$

$$\Delta p=p_1-p_2=\gamma h_f \tag{a}$$

下面计算 h_f，为此求出流速

$$v=\frac{q_v}{A}=\frac{0.022}{\frac{\pi}{4}(0.2)^2}\text{m/s}=0.7\text{m/s}$$

算管流雷诺数

$$R_e=\frac{vd}{\nu}=\frac{0.7\times0.2}{7\times10^{-4}}=200<2320$$

管流为层流，沿程力系数如下取之：

$$\lambda=\frac{64}{R_e}=\frac{64}{200}=0.32$$

代入达西公式计算沿程水头损失：

$$h_f=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}=0.32\times\frac{500}{0.2}\frac{0.7^2}{2\times9.8}=20\text{m} \qquad (b)$$

把式（b）代进式（a）得

$$\Delta p=800\times20\text{kg/m}^2=16\,000\text{kg/m}^2=156800\text{N/m}^2$$

［例4-3］ 有运动粘性系数$\nu=2.5\times10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$的油，流过直径$d=200$mm、长度$l=300$m且绝对粗糙度为$\Delta=0.4$mm的铁管，若管中体积流量$q_v=1000\text{m}^3/\text{h}$时，问产生的水头损失为多大？

［解］ 油在管道内的平均流速

$$v=\frac{q_v}{A}=\frac{4q_v}{\pi d^2}=\frac{4\times1000}{\pi(0.2)^2\times3600}\text{m/s}=8.84\text{m/s}$$

管流雷诺数

$$R_e=\frac{vd}{\nu}=\frac{8.84\times0.2}{2.5\times10^{-6}}=707200$$

管壁相对粗糙度

$$\frac{\Delta}{d}=\frac{0.4}{200}=0.002$$

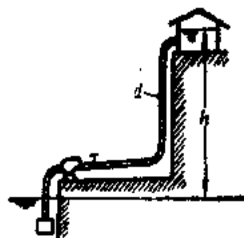
根据 R_e、$\frac{\Delta}{d}$在莫迪图上查得

$$\lambda=0.024$$

把λ值代入达西公式算出沿程水头损失

$$h_f=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}=0.024\times\frac{300}{0.2}\times\frac{(8.84)^2}{2\times9.8}\text{ m}=143.53\text{m}$$

即沿程损失143.53m油柱。



题4-4图 水泵管路

［例4-4］ 水泵管路如图上所示，铸铁管直径$d=150$mm，长度$l=180$m，管路附件装有底阀一个（$\zeta=6.5$），全开阀门一个，$\frac{r_0}{R}=0.5$的90°弯头三个。若要求把$t=20$℃，流量$q_v=0.0625\text{m}^3/\text{s}$的水，送至高度$h=100$m的水塔中，问应配备多大扬程的水泵？

［解］ 泵扬程H为：

$$H=h_f+h_j+h \qquad (a)$$

$h=100$m已给定，下面分别计算h_f与h_j。

沿程水头损失h_f，算出流速：

$$v=\frac{q_v}{A}=\frac{4}{\pi d^2}=\frac{4\times225}{\pi(0.15)^2\times3600}\text{m/s}=3.54\text{m/s}$$

雷诺数

$$R_e=\frac{vd}{\nu}=\frac{3.54\times0.15}{1.007\times10^{-6}}=5.27\times10^5$$

算出阻力分区的临界准则数，对铸铁管取$\Delta=0.25$mm则

$$40\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{\frac{8}{7}}=59854.66$$

$$396\left(\frac{d}{\Delta}\right)\lg\left(\frac{3.7d}{\Delta}\right)=7.95\times10^5$$

看出

$$40\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{\frac{8}{7}}<R_e<396\left(\frac{d}{\Delta}\right)\lg\left(\frac{3.7d}{\Delta}\right)$$

管流属于紊流粗糙管过渡区。阻力系数λ可先用阿里特苏里近似公式算出一个λ值：

$$\lambda=0.11\left(\frac{\Delta}{d}+\frac{68}{R_e}\right)^{\frac{1}{4}}=0.02566$$

把此值代入库尔布鲁克公式右端得：

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=-2\lg\left(\frac{\Delta}{3.7d}+\frac{2.51}{R_e\sqrt{\lambda}}\right)=6.212$$

解出得

$$\lambda=0.02559$$

代入达西公式得沿程水头损失：

$$h_f=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}=0.02559\times\frac{180}{0.15}\times\frac{(3.54)^2}{2\times9.8}\text{ m}=19.63\text{m} \tag{b}$$

局部水头损失h_j：

$$h_j=\Sigma\zeta\frac{v^2}{2g}$$

根据题意在表4-8上顺流依次查得各局部阻力系数并将其代入h_j式中：

$$h_j=(6.5+3\times0.29+3.9+1)\frac{(3.54)^2}{2\times9.8}\text{m}=11.91\text{m} \tag{c}$$

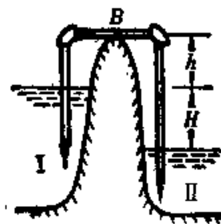
把结果（b）、（c）及$h=100$m代入（a）式得

$$H=(19.63+11.91+100)\text{m}=131.54\text{m}$$

［例4-5］ 如下图所示虹吸管将水由Ⅰ池引向Ⅱ池，已知管径$d=100$mm、管总长度$l=20$m，B点前管段长$l'=8$m，虹吸管最高点B至上游水面高$h=4$m，上、下游二水面高差$H=5$m。设沿程阻力系数$\lambda=0.04$，弯头阻力系数$\zeta=0.9$，求管中流量q_v与20℃时的最大吸水高度h。

［解］ 对上、下游水面列出伯努里方程：

$$H+\frac{p_a}{\gamma}=\frac{p_a}{\gamma}+\left(\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)\frac{v^2}{2g}$$



题4-5图 虹吸管路

流速

$$v=\sqrt{\frac{2gH}{\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta}}$$

故体积流量

$$q_v = A\bar{v} = \frac{\pi}{4}d^2\sqrt{\frac{2gH}{\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta}} = \frac{\pi}{4}(0.1)^2\sqrt{\frac{2\times9.8\times5}{0.04\times\frac{20}{0.1}+(0.5+2\times0.9+1)}}\ \mathrm{m^3/s}$$

$$=0.023\mathrm{m^3/s}$$

对上游水面与B处管截面列出伯努里方程：

$$\frac{p_a}{\gamma} = h + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{\bar{v}^2}{2g} + \left(\lambda\frac{l'}{d}+\Sigma\zeta'\right)\frac{\bar{v}^2}{2g}$$

$$h = \frac{p_a - p_B}{\gamma} - \left(1+\lambda\frac{l'}{d}+\Sigma\zeta'\right)\frac{\bar{v}^2}{2g}$$

$$= \frac{p_a - p_B}{\gamma} - \frac{1+\lambda\frac{l'}{d}+\Sigma\zeta'}{\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta}H$$

$\Sigma\zeta'$代表由上游水面至B截面间局部阻力系数之和。p_B越小吸上高度h就越大，但p_B最小不得小于该温度$t=20$℃时的饱和蒸汽压p_s，否则水就要汽化，而破坏B处真空，从而虹吸管便也无法正常工作了。因此

$$h < \frac{p_a - p_s}{\gamma} - \frac{1+\lambda\frac{l'}{d}+\Sigma\zeta'}{\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta}H$$

把$t=20$℃时$p_s=0.242\mathrm{N/cm^2}$及题中数据代入则

$$h < \left(\frac{(10-0.242)\times10^4}{998\times9.8} - \frac{1+0.04\times\frac{8}{0.1}+(0.5+0.9)}{0.04\times\frac{20}{0.1}+(0.5+2\times0.9+1)}\times5\right)\mathrm{m} = 7.5\mathrm{m}$$

习 题 四

4-1 试比较圆管中层流和紊流的特性。说明判别流动状态的标准。

4-2 何谓混合长度理论。试根据这一理论决定紊流中的摩擦剪动。

4-3 根据速度分布的不同，圆管中紊流可以划分为哪几个区域，各个区域的速度按什么规律分布？

4-4 实际上圆管的内壁不可避免地是粗糙的，为什么我们却说是"光滑"的呢？条件是什么？理由何在？

4-5 试描绘尼古拉兹实验图并说明各区的沿程损失系数λ的计算方法。

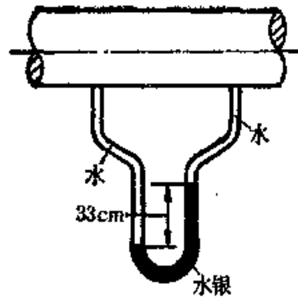
4-6 沿直径$d=200\mathrm{cm}$的管道输送润滑油，流量$q_v=88254\mathrm{N/h}$，润滑油的重度$\gamma=8825\mathrm{N/m^3}$，运动粘度冬季为$\nu=0.0001092\mathrm{St}$，夏季为$\nu=0.0000355\mathrm{St}$，试分别判断冬夏两季润滑油在管中的流动状态。

4-7 半径为r_0的管中的流动是层流。流速恰好等于管内平均流速的地方距管轴的距离r等于多大？

4-8 具有$\mu=4.03\times10^{-3}\mathrm{kg\cdot s/m^2}$，$\gamma=740\mathrm{kg/m^3}$的油流过直径为2.54cm的光滑圆管，平均流速为0.3m/s。试计算30m长度管子上的压力降，并计算管内距管壁0.6cm处的流速。

4-9 在直径为30cm的管道上用水作沿程阻力实验，在相距120m的两点用水银差压计（上面为水）测得的压差为33cm，已知流量为0.23m/s，沿程阻力系数等于多少？

4-10 某种具有$\gamma=780\mathrm{kg/m^3}$和$\mu=7.5\times10^{-4}\mathrm{Pa\cdot s}$的油，流过长为12.2m直径为1.26cm的水平管子，



题4-9图

试计算保持为层流的最大平均速度，并计算维持这一流动所需的压力降。若油料从这一管子流入直径为0.63cm，长为12.2m的管子，问流过后一根管子时的压力降为多少?

($v_{max}=1.72m/s$ $\Delta p_1=3172.03kg/m^2$, $\Delta p_2=1.4\times10^5kg/m^2$)

4-11　油料的$\gamma=780kg/m^3$，$\mu=1.87\times10^{-4}Pa\cdot s$，用泵抽其通过直径$d=30cm$，长为6.5km的油管，管子内表面绝对粗糙度$\Delta=0.75mm$，流量$q_v=14m^3/min$，试求压力降。又当泵的总效率为15%时问泵所需马力为多少?

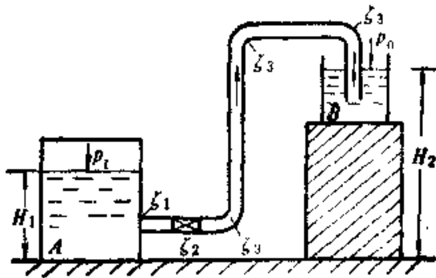
($\Delta p=2.35MPa$，$p=959.4$马力)

4-12　水沿直径$d=25mm$，长为$l=10m$的管子，从水箱A流到储存器B，若水箱中相对压力$p_1=0.2$ MPa，$H_1=1m$ $H_2=5m$，水箱的出口损失系数$\zeta_1=0.5$，阀门的损失系数$\zeta_2=4$，弯头的损失系数$\zeta_3=0.2$，试决定流量。

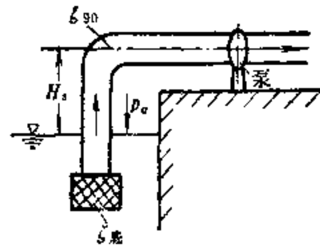
($\lambda=0.04$)

4-13　设有一台水泵最大允许真空度$(p_B/\gamma)_{max}=7m$水柱（即进口压力）流量等于3.3L/s，吸水管直径$d=80mm$吸水管长度总共$l=10m$、$\lambda=0.04$，$\zeta_{90^\circ}=0.7$，$\zeta_{底阀}=8$，求水泵的允许的最大安装高程Hs。

($Hs=4.96m$)



题 4-12 图



题 4-13 图

第五章　管路的水力计算

无论是在工农业生产上，还是在人们的日常生活中，输送各种流动介质的管路系统起着非常重要的作用。例如，城市自来水供水系统即为一个输送清水的管路系统。自来水先在水厂处理，然后用大功率水泵将水送入输水主干管。主管路在通往各类用户的一路上要分出许许多多支路。有些支路通到大居民点将水放入水库，有些支路则还要分设小的支路或接着再分出更小的支路，将水通到位于高低不一的各用户自来水龙头。大居民点或大企业还要有自己一套供水的管路系统将水用泵从水库打入水塔，然后经一套管路系统将水送给各用户。工业企业所用的管路系统更为复杂。如从石油产地通往海港装油码头的管路系统即为一例：石油从贮油罐用泵打入输油管作长距离输送。管路要从各种各样自然地形处通过，中间还必须加设许多增压站，用泵提高油压。到海港的码头后还要有一套复杂的管路系统以实现灵活的贮油及装船操作。另外在化工厂，热电厂以及在一些机器设备中，管路系统都是实现整个系统运转所不可缺少的。同时管路系统设计的好坏将直接影响系统能耗的大小与性能的好坏。

下面将对工程中常遇到的各类管路系统的流体力学计算原理分别进行讨论。在本章最后还要讨论在任何一类管路中都会出现的所谓“水锤”问题。水锤现象在管路系统设计时是必须考虑的一个主要问题之一。

第一节　长管的水力计算

所谓长管是指管路沿程损失为整个管路损失的主要部分，而局部损失所占比重只有5～10%的那种管路。长管水力计算中只考虑沿程损失，而不去计算管路中的局部损失，而只在计算损失后再增加5～10%即可。

如图5-1所示，一长管直径为d，长度为l。长管一端为有一定水头的，断面很大（和管路直径相比）的贮水池，另一端通大气。管路的过流量为q_V。上游贮水池中之水面与管路出口的高差为H。下面就来推导联系这些参数的长管计算公式。

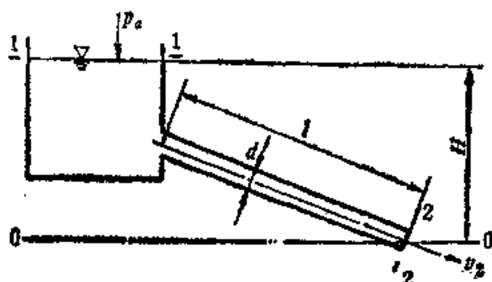


图5-1　长管水力计算

取过出口断面中心的水平线为基准线0-0，取上游贮水池水面为1-1参考断面，把管路出口断面取为2-2参考断面，然后针对1-1和2-2断面列伯努里方程：

$$H+\frac{p_a}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=\frac{p_a}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_w \tag{5-1}$$

因为断面1-1很大故可认为$v_1 \approx 0$。h_w为管路损失。因为这里是长管，故h_w只包括管路的沿程损失：

$$h_w=\lambda\frac{l}{d}\frac{v_2^2}{2g}$$

于是式（5-1）可写为：

$$H=\frac{a_2 v_2^2}{2g}+\lambda\frac{l}{d}\frac{v_2^2}{2g}=\left(1+\lambda\frac{l}{d}\right)\frac{v_2^2}{2g} \tag{5-2}$$

在上面推导中取$a_2=1$。

因为在长管中$1\ll\lambda\frac{l}{d}$，再将流速换成流量，式（5-2）即可写成：

$$H=\lambda\frac{l}{d}\frac{8q_V^2}{g\pi^2 d^4}$$

$$=\frac{l^2}{g\pi^2 d^5/8\lambda}$$

$$=\frac{lq_V^2}{K^2} \tag{5-3}$$

式（5-3）即为长管计算公式。式中$K=\sqrt{g\pi^2 d^5/8\lambda}$叫流量模数。该公式将作用水头$H$，管长$l$，管径$d$与流量之间的关系建立起来。

对流量模数K有两点说明。由上面的推导可知

$$q_V=K\sqrt{H/l}=K\sqrt{h_w/l}=K\sqrt{J} \tag{5-4}$$

式中$J=h_w/l$为一无量纲数，表示单位管长上的水头降落，叫水力坡度。上式说明K的数值等于水力坡度为1的管路中的流量。这也就是其所以叫流量模数的原因。

另外由式（5-3）可知K与直径d及阻力系数有关：

$$K=f(d,\lambda)$$

因一般的管路流动多在阻力平方区，因而λ只取决于管路的相对粗糙度Δ/d，

$$\lambda=f\left(\frac{\Delta}{d}\right)$$

所以 $$K=f(\Delta,d)$$

即流量模数K仅取决于粗糙度Δ和管径d。

利用式（5-3）可以解决下列三类问题：

（1） 对已知的管路系统，要求核对流量。即当l、d、Δ和H均已知时，利用式(5-3)求流量Q。

（2） 对于已知的管路系统，按所需流量决定水塔高或水泵扬程。即当l、d、Δ、q_V已知时利用式(5-3)求作用水头H。

（3） 若流量与水头已定，要求确定管径。即已知q_V、H、l与Δ，求d。

［例5-1］ 如图5-2所示，一段输油管路所送的油液密度$\rho=900\text{kg/m}^3$，粘度$\nu=10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$，管径$d=80\text{cm}$，内表面涂沥青。管段长300m，沿流动方向有1:10的坡度，试求管路中之流量。

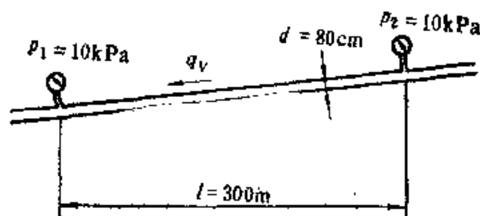


图5-2 输油管路示意图

［解］ 由式(5-3)可知：

$$q_V=K\sqrt{H/l}$$

式中H应为所选两参考断面之间的高度差，故

$$H=l\frac{1}{10}=\frac{l}{10}$$

所以
$$q_V=K\sqrt{\frac{l}{10}/l}=K\sqrt{\frac{1}{10}}$$

由式(5-3)还知道流量模数为

$$K=\sqrt{g\pi^2d^5/8\lambda}$$

式中λ为管路的沿程阻力系数，它取决于管路的雷诺数R_e与壁面状况。但流量不知道时，无法得知雷诺数。所以欲解此题必须用试算法。先假设$\lambda=0.02$，则

$$K=\sqrt{9.81\pi^2\times0.8^5/8\times0.02}=14.1$$

故
$$q_V=14.1\times\sqrt{\frac{1}{10}}=4.46$$

根据试算的流量来计算雷诺数：

$$R_e=\frac{d\bar{v}}{\nu}=\frac{d}{\nu}\frac{q_V}{\pi d^2/4}=\frac{4q_V}{\pi\nu d}=\frac{4\times4.46}{\pi\times10^{-6}\times0.80}=7.1\times10^6$$

另外，涂沥青的钢管之当量粗糙度为$\Delta/d=0.12/800$。

由莫迪图可查到$R_e=7.1\times10^6$与$\Delta/d=0.00015$所对应的$\lambda=0.013$。根据第一次近似的沿程阻力系数可计算出第二次近似流量值。先算K：

$$K=\sqrt{9.81\pi^2\times0.8^5/8\times0.013}=17.47$$

故流量为
$$=17.47\times\sqrt{\frac{1}{10}}=5.52$$

流量的第二次近似值与前次的差别较大，故还要再次试算。根据流量再算雷诺数：

$$R_e=\frac{4\times5.52}{\pi\times10^{-6}\times0.80}=8.8\times10^6$$

再由莫迪图查$\lambda=0.0132$。计算流量模数K

$$K=\sqrt{9.81\pi^2\times0.8^5/8\times0.0132}=17.33$$

故
$$q_V=17.33\times\sqrt{\frac{1}{10}}\text{m}^3/\text{s}=5.48\text{m}^3/\text{s}\approx5.5\text{m}^3/\text{s}$$

上例中的计算方法叫逐次逼近法。当管路计算中所求的未知量为流量(流速)或管径时，因为开始时无法确定雷诺数，因而也就无法得知解题时所必需的沿程阻力系数，故必须采取这种办法。

第二节　短管的水力计算

所谓短管是指那种局部阻力所造成的水力损失以及管流的速度水头可与沿程损失相比，他们的大小差不多的管路。通常工程中常见的输送流体介质的管路如果不太长，上面的阀门、弯头以及管路截面的变化所形成的水力损失将占整个管路的水力损失的很大部分。这时的管路水力计算中必须仔细考虑这一部分损失。下面我们来讨论这种短管的水力计算。

如图5-3所示为一短管管路系统。系统的上游为一有一定水头的断面很大的贮水池。水流在水头作用下从贮水池流出，并一路经弯头、阀门、收缩管段后流入大气，现在在上游贮水

池中取自由表面Ⅰ-Ⅰ及下游管路出口Ⅱ-Ⅱ为两个参考截面，每个截面上的流动参数如图示。当取过出口截面中心的水平线0-0为基准线时，所列伯努里方程为：

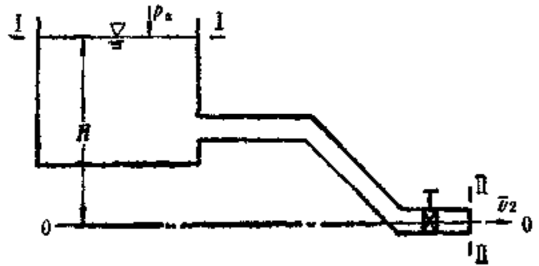


图5-3 短管水力计算

$$H+\frac{p_a}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=\frac{p_a}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_w$$

令$H+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=H_0$，叫作作用水头。故上式可写为：

$$H_0=\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_w$$

式中h_w为管路从贮水池到出口的水力损失。在短管情况下它应包括所有的局部损失及沿程损失：

$$\begin{aligned}h_w&=\sum\lambda_i\frac{l_i v_i^2}{d_i 2g}+\sum\zeta_k\frac{v_k^2}{2g}\\&=\sum\lambda_i\frac{l_i}{d_i}\left(\frac{d_2}{d_i}\right)^4\frac{v_2^2}{2g}+\sum\zeta_k\left(\frac{d_2}{d_k}\right)^4\frac{v_2^2}{2g}\\&=\left[\sum\lambda_i\frac{l_i}{d_i}\left(\frac{d_2}{d_i}\right)^4+\sum\zeta_k\left(\frac{d_2}{d_k}\right)^4\right]\frac{v_2^2}{2g}\\&=\zeta_s\frac{v_2^2}{2g}\end{aligned}\tag{5-5}$$

在上式推导过程中应用了连续方程$v_i=v_2\frac{d_2^2}{d_i^2}$。上式中的$\zeta_s$叫管路（短管）系统阻力系数：

$$\zeta_s=\sum\lambda_i\frac{l_i}{d_i}\left(\frac{d_2}{d_i}\right)^4+\sum\zeta_k\left(\frac{d_2}{d_k}\right)^4\tag{5-6}$$

将式(5-5)代入前面的伯努里方程得：

$$H_0=\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+\zeta_s\frac{v_2^2}{2g}=(1+\zeta_s)\frac{v_2^2}{2g}\tag{5-7}$$

这里近似地取$\alpha_2=1$。于是可计算出口流速：

$$v_2=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta_s}}\sqrt{2gH_0}$$

如果出口截面面积以A_2表示，则管路流量为：

$$\begin{aligned}q_V=A_2v_2&=\frac{A_2}{\sqrt{1+\zeta_s}}\sqrt{2gH_0}\\&=\mu_s A_2\sqrt{2gH_0}\end{aligned}\tag{5-8}$$

式中，$\mu_s=1/\sqrt{1+\zeta_s}$叫管路系统的流量系数。如果考虑到贮水池断面很大，因而$v_1\approx0$，则$H_0\approx H$，故式（5-8）可写为：

$$q_V=\mu_s A_2\sqrt{2gH}\tag{5-9}$$

式（5-9）即为解短管水力问题的公式，可解下列问题：

（1） 给定流量q_V，管路的几何参数及管壁的状况，求作用水头H。

（2） 给定作用水头H，管路的几何参数以及管壁的状况，求管路中的流量。

（3） 给定流量，作用水头以及管路某些尺寸和管壁状况，求管径d。

后面两类问题在求解时必须用逐次逼近法。

［例5-2］ 一供油的短管管路系统如图5-4所示。汽油用一油泵经一不太长的镀锌油管打入一装有浮子开关的油箱。中间要经三个弯头与一个阀门。设管径为$d=15$mm，管长$l=4$m，管路中之流量为$q_V=0.141L$，油箱底与油泵间高差为$H=1$m。弯头与阀门的阻力系数分别为$\zeta_{弯}=0.2$，$\zeta_{阀}=4.0$。汽油的重度与粘度分别为$\gamma=7500\text{N/m}^3$，$\nu=0.0073\text{cm}^2/\text{s}$。试问，如果开启针阀所需的压力为$p_{针}=0.5$大气压时，油泵出口的压力应该多大？

［解］ 取如图所示的基准线0-0与参考断面Ⅰ-Ⅰ及Ⅱ-Ⅱ，根据式（5-8）求作用水头：

$$H_0=\frac{q_V^2}{2g\mu_s^2A_2^2}$$

在本例题中作用水头为：

$$H_0=\frac{p_{泵}}{\gamma_{油}}-H-\frac{p_{针}}{\gamma_{油}}$$

将之代入前式：

$$\frac{p_{泵}}{\gamma_{油}}-H-\frac{p_{针}}{\gamma_{油}}=\frac{q_V^2}{2g\zeta_s^2A_2}$$

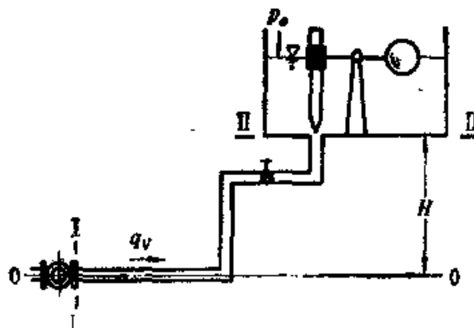


图5-4 供油管路系统

故
$$p_{泵}=\gamma_{油}\left[H+\frac{p_{针}}{\gamma_{油}}+\frac{q_V^2}{2g\zeta_s^2A_2}\right]$$

由式（5-6）可计算管路系统阻力系数ζ_s：

$$\zeta_s=\lambda\frac{l}{d}+3\zeta_{弯}+\zeta_{阀}$$

$$=\lambda\times\frac{4}{0.015}+3\times0.2+4$$

$$=266.6\lambda+4.6$$

现根据流量及管径、管壁状况求流动雷诺数及沿程阻力系数：

$$R_e=\frac{4}{\pi\nu d}=\frac{4\times0.000141}{\pi\times0.73\times10^{-6}\times0.015}=16395(=1.6\times10^4)$$

可见$R_e<10^5$。这时用勃拉修斯公式计算λ较为合适：

$$\lambda=\frac{0.3164}{R_e^{0.25}}=\frac{0.3164}{\sqrt[4]{1.64\times10^4}}=0.028$$

故有
$$\zeta_s=266.6\times0.028+4.6=12.1$$

将之代入求$p_{泵}$的计算式：

$$p_{泵}=750\times\left[1+\frac{0.5\times101.3\times10^3}{750}+\frac{0.000141^2}{2\times9.81\times12.1^2\times(\pi/4\times0.015^2)^2}\right]\text{Pa}$$

$$=51398\text{Pa}$$

$$=51.4\text{kPa}$$

第三节　复杂管路的水力计算

前两节叙述的管路水力计算所涉及的管路系统是比较简单的管路，即管路只有一个进口和一个出口，而且在管流中间无支路也无其他加压装置（如中继泵等）。这种管路一般称为简单管路。下面我们将讨论所谓复杂管路的水力计算。

一、复杂短管

如图5-5所示的管路系统，它由不同长度与直径的管段串接在一起，并且有若干分支管路。设管路上游有泵用作提供水头将水打到各用水点A，B，C与D。管线1-2-3-4-D叫主干管。当选定某一水平面为基准面后可列断面Ⅰ-Ⅰ和D-D的伯努里方程：

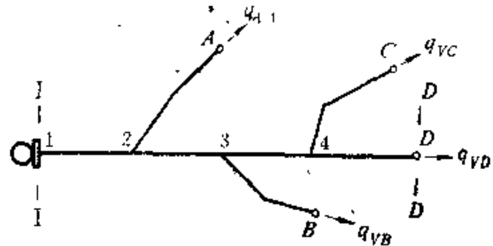


图5-5　带支管的短管管路系统

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_D+\frac{p_D}{\gamma}+\frac{\alpha_D v_D^2}{2g}+h_w$$

或

$$\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}\right)-\left(z_D+\frac{p_D}{\gamma}\right)=\frac{\alpha_D v_D^2}{2g}-\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}+h_w$$

令

$$H=(z_1+p_1/\gamma)-(z_D+p_D/\gamma)$$

则有

$$H=\frac{\alpha_D v_D^2}{2g}-\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}+h_w \tag{5-10}$$

式（5-10）中的h_w为管路系统的总水力损失，应包括沿程损失及各局部损失，其中将考虑分支处的三通损失：

$$h_w=\sum_K h_{沿程}+\sum_i h_{局}=\sum_K \frac{\lambda_K l_K}{d_K}\frac{v_K^2}{2g}+\sum_i \zeta_i\frac{v_i^2}{2g} \tag{5-11}$$

式中　K——主干管上的管段数；

i——主干管上的所有局部阻力数目（包括各三通）。

另外，若各供水点处之流量分别为q_{VA}，q_{VB}，q_{VC}与q_{VD}，则

$$\left.\begin{aligned}&q_{V2-3}=q_{V12}-q_{VA}\\&q_{V3-4}=q_{V2-3}-q_{VB}\\&q_{V4-D}=q_{VD}\\&q_{V1-2}=q_{VA}+q_{VB}+q_{VC}+q_{VD}\end{aligned}\right\} \tag{5-12}$$

式（5-10）～式（5-12）联立可解此类管路的水力计算问题。

［例5-3］　如图5-6所示的分叉管路自水库取水。已知干管直径$d=0.8$m，长度$l=150$m；支管1的直径$d_1=0.6$m，长度$l_1=200$m；支管2的直径$d_2=0.5$m，长度$l_2=250$m。三通的局部阻力系数$\zeta_三=1.5$。干管与支管皆为钢筋混凝土管，其当量粗糙高可取为1.8mm。进水口及出水口的高度如图所示，水温为20℃。试求两支管中的流量q_{V1}与q_{V2}。

［解］　取干管和支管1列伯努里方程。这时取过支管1出口的水平面为基准面，取水库自由表面为参考断面Ⅰ-Ⅰ，支管1出口断面为Ⅱ-Ⅱ参考断面。

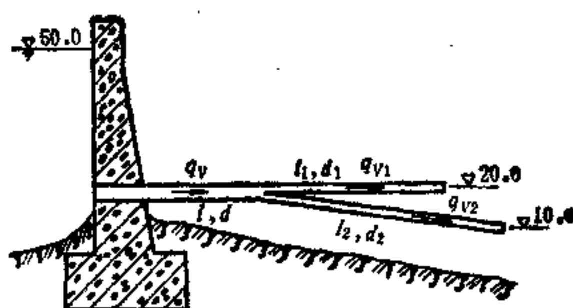


图5-6 分叉管路

根据式（5-10）可列出一求解方程。因为

$$z_1=50-20=30\text{m},\ p_1=0,\ z_D=0,\ p_D=0,\ v_1\approx0,\ \alpha_D\approx1$$

将之代入式（5-10）得：

$$30=\frac{v_D^2}{2g}+h_{w1}=\frac{1}{2g}\frac{16q_{V1}^2}{\pi^2d_1^4}+h_{w1}=\frac{8q_{V1}^2}{g\pi^2d_1^4}+h_{w1} \tag{a}$$

又，在本例中式（5-11）为

$$h_{w1}=\frac{\lambda l}{d}\frac{v^2}{2g}+\frac{\lambda_1l_1}{d_1}\frac{v_1^2}{2g}+\zeta_{三}\frac{v_1^2}{2g}$$

$$=\frac{\lambda l}{d}\frac{8q_V^2}{g\pi^2d^4}+\left(\frac{\lambda_1l_1}{d_1}+\zeta_{三}\right)\frac{8q_{V1}^2}{g\pi^2d_1^4} \tag{b}$$

将式(b)代入式(a)得：

$$30=\frac{\lambda l}{d}\frac{8q_V^2}{g\pi^2d^4}+\left(1+\frac{\lambda_1l_1}{d_1}+\zeta_{三}\right)\frac{8q_{V1}^2}{g\pi^2d_1^4}$$

由此式得：

$$q_{V1}=\sqrt{\frac{\left(30-\frac{\lambda l}{d}\frac{8q_V^2}{g\pi^2d^4}\right)}{1+\frac{\lambda_1l_1}{d_1}+\zeta_{三}}\frac{g\pi^2d_1^4}{8}} \tag{c}$$

$$=\sqrt{\frac{\left(30-\frac{150}{0.8}\lambda\times\frac{8q_V^2}{9.81\pi^2\times0.8^4}\right)\times9.81\pi^2\times0.6^4}{8\times\left(1+\frac{200}{0.6}\lambda_1+1.5\right)}}$$

$$=\sqrt{\frac{30-37.82\lambda q_V^2}{1.6+213.33\lambda_1}}$$

式(c)给出了干管流量q_V与支管1流量q_{V1}的关系。

再取干管与支管2，用同样方法求q_V与q_{V2}的关系。此时，

$$z_1=50-20=30\text{m},\ z_D=-10\text{m},\ p_1=p_D=0,\ v_1\approx0,\ \alpha_D\approx0$$

将之代入式(5-10)得：

$$40=\frac{v_2^2}{2g}+h_{w2}=\frac{1}{2g}\frac{16q_{V2}^2}{\pi^2d_2^4}+h_{w2}$$

$$=\frac{8q_{V2}^2}{g\pi^2d_2^4}+h_{w2} \tag{d}$$

又由式(5-11)得：

$$h_{w2}=\frac{\lambda l}{d}\frac{v^2}{2g}+\frac{\lambda_2 l_2}{d_2}\frac{v_2^2}{2g}+\zeta_{三}\frac{v_2^2}{2g}$$

$$=\frac{\lambda l}{d}\frac{8q_V^2}{g\pi^2 d^4}+\left(\frac{\lambda_2 l_2}{d_2}+\zeta_{三}\right)\frac{8q_{V2}^2}{g\pi^2 d_2^4} \tag{e}$$

将式(e)代入式(d)得：

$$40=\frac{\lambda l}{d}\frac{8q_V^2}{g\pi^2 d^4}+\left(1+\frac{\lambda_2 l_2}{d_2}+\zeta_{三}\right)\frac{8q_{V2}^2}{g\pi^2 d_2^4}$$

由上式得：

$$q_{V2}=\sqrt{\frac{\left(40-\frac{\lambda l}{d}\frac{8q_V^2}{g\pi^2 d_2^4}\right)\cdot g\pi^2 d_2^4}{8\left(1+\frac{\lambda_2 l_2}{d_2}+\zeta_{三}\right)}} \tag{f}$$

$$=\sqrt{\frac{\left(40-\frac{150}{0.8}\lambda\times\frac{8q_V^2}{9.81\pi^2\times 0.8^4}\right)\times 9.81\pi^2\times 0.5^4}{8\times(1+250/0.5\lambda_2+1.5)}}$$

$$=\sqrt{\frac{40-37.82\lambda q_V^2}{3.3+660\lambda_2}}$$

根据流动的连续性，即式(5-12)有：

$$q_V=q_{V1}+q_{V2} \tag{g}$$

将式(c)与式(f)代入式(g)得：

$$q_V=\sqrt{\frac{30-37.82\lambda q_V^2}{1.6+213.3\lambda_1}}+\sqrt{\frac{40-37.82\lambda q_V^2}{3.3+660\lambda_2}} \tag{h}$$

式(h)是求解q_V的公式，然后再由式(c)与式(f)求q_{V1}与q_{V2}。但式(h)右端也包含q_V，而且还有λ，λ_1与λ_2还须用q_V，q_{V1}与q_{V2}来定。这样一来必须采用逐次逼近的试算法。

作为零次近似的q_V与λ，λ_1，λ_2，不妨设：

$$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=0.02,\quad q_V=1\text{m}^3/\text{s}$$

代入式(h)得一次近似的q_V：

$$q_V=\left(\sqrt{\frac{30-37.82\times 0.02\times 1}{1.6+213.3\times 0.02}}+\sqrt{\frac{40-37.82\times 0.02}{3.3+660\times 0.02}}\right)\text{m}^3/\text{s}$$

$$=(2.233+1.54)\text{m}^3/\text{s}=3.77\text{m}^3/\text{s}$$

根据式(c)与式(f)来计算一次近似的q_{V1}与q_{V2}：

$$q_{V1}=2.233\text{m}^3/\text{s},\quad q_{V2}=1.54\text{m}^3/\text{s}$$

再来计算一次近似的λ，λ_1与λ_2。为此得先算一次近似的雷诺数R_e，R_{e1}与R_{e2}：

$$R_e=\frac{4q_V}{\pi\nu d}=\frac{4\times 3.77}{\pi\times 1.003\times 10^{-6}\times 0.8}=6\times 10^6$$

$$R_{e1}=\frac{4q_{V1}}{\pi\nu d}=\frac{4\times 2.233}{\pi\times 1.003\times 10^{-6}\times 0.6}=4.72\times 10^6$$

$$R_{e2}=\frac{4q_{V2}}{\pi\nu d_2}=\frac{4\times 1.54}{\pi\times 1.003\times 10^{-6}\times 0.5}=3.91\times 10^6$$

各管段的相对粗糙度为：

$$\Delta/d=1.8/800=0.00225$$

$$\Delta/d_1=1.8/600=0.003$$

$$\Delta/d_2=1.8/500=0.0036$$

由莫迪图可查出各管段之沿程阻力系数：

$$\lambda=0.024,\ \lambda_1=0.0265,\ \lambda_2=0.0275$$

这几个系数与零次近似值差较大，故还须作下一次逼近。由 q_V，q_{V1}，q_{V2}，λ，λ_1，λ_2的一次近似值计算它们的二次近似值如下。由式(c)得：

$$q_{V1}=\sqrt{\frac{30-37.82\times0.024\times3.77^2}{1.6+213.33\times0.0265}}\ \mathrm{m^3/s}$$
$$=1.535\mathrm{m^3/s}$$

由式(f)得：

$$q_{V2}=\sqrt{\frac{40-37.82\times0.024\times3.77^2}{3.3+660\times0.0275}}\ \mathrm{m^3/s}$$
$$=1.124\ \mathrm{m^3/s}$$

由式(g)得　$q_V=1.535+1.124=2.659\ \mathrm{m^3/s}$

所得的二次近似值与一次近似差别过大，还得作下一次逼近。求各管段流动雷诺数：

$$R_e=4\times2.659/(\pi\times1.003\times10^{-6}\times0.8)=4.22\times10^6$$
$$R_{e1}=4\times1.535/(\pi\times1.003\times10^{-6}\times0.6)=3.25\times10^6$$
$$R_{e2}=4\times1.124/(\pi\times1.003\times10^{-6}\times0.5)=2.85\times10^6$$

根据各管段的相对粗糙度，由莫迪图可查得：

$$\lambda=0.0242,\ \lambda_1=0.026,\ \lambda_2=0.0272$$

根据这几个阻力系数再来计算各管段流量的三次近似值：

$$q_{V1}=\sqrt{\frac{30-37.82\times0.0242\times2.659^2}{1.6+213.33\times0.026}}\ \mathrm{m^3/s}$$
$$=1.814\ \mathrm{m^3/s}$$

$$q_{V2}=\sqrt{\frac{40-37.82\times0.0242\times2.659^2}{3.3+660\times0.0272}}\ \mathrm{m^3/s}$$
$$=1.256\ \mathrm{m^3/s}$$

$$q_V=1.814+1.256=3.07\ \mathrm{m^3/s}$$

所求值与二次近似值差别还太大。故应再作一次逼近。求雷诺数：

$$R_e=4\times3.07/(\pi\times1.003\times10^{-6}\times0.8)=4.87\times10^6$$
$$R_{e1}=4\times1.814/(\pi\times1.003\times10^{-6}\times0.6)=3.84\times10^6$$
$$R_{e2}=4\times1.256/(\pi\times1.003\times10^{-6}\times0.5)=3.19\times10^6$$

查莫迪图求各沿程阻力系数：

$$\lambda=0.025,\ \lambda_1=0.026,\ \lambda_2=0.027$$

求流量：

$$\left.\begin{aligned}q_{V1}&=\sqrt{\frac{30-37.82\times0.025\times3.07^2}{1.6+213.33\times0.026}}\ \mathrm{m^3/s}\\&=1.72\mathrm{m^3/s}\\q_{V2}&=\sqrt{\frac{40-37.82\times0.025\times3.07^2}{3.3+660\times0.027}}\ \mathrm{m^3/s}\\&=1.213\mathrm{m^3/s}\\q_V&=1.72+1.213=2.933\mathrm{m^3/s}\end{aligned}\right\}$$

所求流量和上次的近似值已相当接近，可作为答案了。如欲更精确一些，可再作一次逼近。

二、并联管路

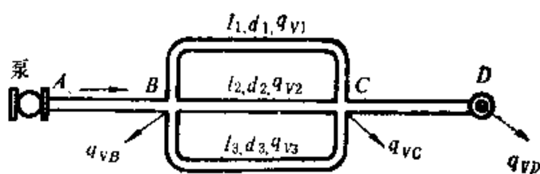


图5-7 并联管路

如图 5-7 所示的一管路系统，泵将液体打入管路入口A。经一段管长达到 B 点分为三条支管，直径各为d_1，d_2与d_3，长各为l_1，l_2与l_3。三条支管又在C点汇合。设在点B与C处还设取液口，流量分别为q_{VB}与q_{VC}。管路由 C点通到排液口D

我们先来分析由点B到 C一段的三个并联支管。既然分支点同位于主干管上的一个截面处，则在此分支点（B或C 点）的静压力应同是一个数值。这也就表明在三个并联支路上有相同的水力损失：

$$h_1=h_2=h_3 \tag{5-13}$$

但

$$h_k=\left(\frac{\lambda_k l_k}{d_k}+\sum_i \zeta_i\right)\frac{v_k^2}{2g}$$

$$=\left(\frac{\lambda_k l_k}{d_k}+\sum_i \zeta_i\right)\frac{8q_{Vk}^2}{g\pi^2 d_k^4}\quad (k=1,2,3)$$

根据式(5-13)应有：

$$\left(\frac{\lambda_1 l_1}{d_1}+\sum_{i1}\zeta_{i1}\right)\frac{q_{V1}^2}{d_1^4}=\left(\frac{\lambda_2 l_2}{d_2}+\sum_{i2}\zeta_{i2}\right)\frac{q_{V2}^2}{d_2^4}=\left(\frac{\lambda_3 l_3}{d_3}+\sum_{i3}\zeta_{i3}\right)\frac{q_{V3}^2}{d_3^4}$$

或写为

$$M_1 q_{V1}^2=M_2 q_{V2}^2=M_3 q_{V3}^2 \tag{5-14}$$

式中之M_1，M_2与M_3叫作各并联支路的特性系数，为各支路之几何参数及阻力系数所决定。

另外，根据流动的连续性还有：

$$\left.\begin{aligned} q_{V1}+q_{V2}+q_{V3}&=q_{VAB}-q_{VB}\\ q_{VAB}-q_{VB}&=q_{VC}+q_{VD}\end{aligned}\right\} \tag{5-15}$$

由式(5-14)可得：

$$q_{V2}=q_{V1}\sqrt{\frac{M_1}{M_2}},\quad q_{V3}=q_{V1}\sqrt{\frac{M_1}{M_3}}$$

由式(5-15)的第一式可求第一并联支路的流量：

$$q_{V1}=\frac{q_{VAB}-q_{VB}}{1+\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}+\sqrt{\frac{M_1}{M_3}}} \tag{5-16}$$

同样可得二，三并联支路的流量：

$$\left.\begin{aligned} q_{V2}&=\frac{(q_{VAB}-q_{VB})\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}}{1+\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}+\sqrt{\frac{M_1}{M_3}}}\\ q_{V3}&=\frac{(q_{VAB}-q_{VB})\sqrt{\frac{M_1}{M_3}}}{1+\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}+\sqrt{\frac{M_1}{M_3}}}\end{aligned}\right\} \tag{5-16a}$$

并联支路上的水力损失为：

$$h_{支}=\frac{M_1(q_{VAB}-q_{VB})^2}{\left(1+\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}+\sqrt{\frac{M_1}{M_3}}\right)^2} \tag{5-17}$$

为了得到整个管路系统的计算公式，应列出$A-A$与$D-D$两参考断面的伯努里方程，并取任一个并联支路计算水力损失：

$$H=\frac{\alpha_D v_D^2}{2g}-\frac{\alpha_A v_A^2}{2g}+h \tag{5-18}$$

式中

$$H=\left(z_A+\frac{p_A}{\gamma}\right)-\left(z_D+\frac{p_D}{\gamma}\right) \tag{5-19}$$

$$h=h_{AB}+h_{支}+h_{CD} \tag{5-20}$$

［例5-4］ 如图5-8所示为一水塔供水系统，已知：管道为铸铁管，AB段长$l_0=1000$m，$d_0=250$mm；并联支路1长为$l_1=2000$m，直径$d_1=150$mm；支路2长$l_2=5000$m，直径$d_2=150$mm；CD段长$l_3=3000$m，直径$d_3=200$mm。点B处有一流量为45L/s的取水口。干管出水口D之流量为20L/s。试求

（1） 并联支路中之流量分配：q_{V1}与q_{V2}；

（2） 水塔高度H_T。

［解］ 因整个管路系统中局部阻力占比重较小（只有一弯管及两个三通，可忽略），故水力计算按长管来进行。

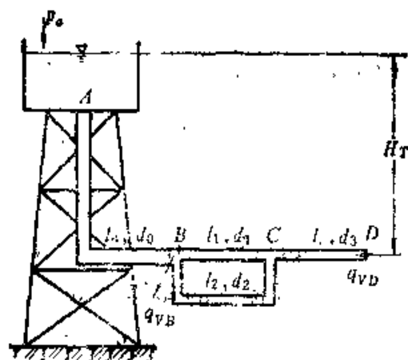


图5-8 带并联支路的水塔供水系统

（1） 求q_{V1}与q_{V2}

根据流动的连续性有

$$q_{V0}=q_{VB}+q_{V3}$$

根据式(5-16)有

$$q_{V1}=\frac{q_{V0}-q_{VB}}{1+\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}}=\frac{q_{V3}}{1+\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}}$$

式中 $$M_1=\frac{\lambda_1 l_1}{d_1^5},\quad M_2=\frac{\lambda_2 l_2}{d_2^5}$$

所以 $$q_{V1}=\frac{q_{V3}}{1+\sqrt{\frac{\lambda_1 l_1 d_2^5}{\lambda_2 l_2 d_1^5}}}$$

同样可得：

$$q_{V2}=\frac{q_{V3}}{1+\sqrt{\frac{\lambda_2 l_2 d_1^5}{\lambda_1 l_1 d_2^5}}}$$

上面求q_{V1}与q_{V2}两式中的沿程阻力系数λ_1与λ_2还分别与q_{V1}及q_{V2}有关。所以此题也必须用逐次逼近法，作为零次近似可取$\lambda_1=\lambda_2=0.02$来计算流量q_{V1}与q_{V2}的一次近似值：

$$q_{V1}=\frac{20\times10^{-3}}{1+\sqrt{\frac{0.02\times200\times0.15^5}{0.02\times500\times0.15^5}}}=12.25\times10^{-3}\text{L}$$

$$q_{V2}=\frac{20\times10^{-3}}{1+\sqrt{\frac{0.02\times500\times0.15^5}{0.02\times200\times0.15^5}}}=7.75\times10^{-3}\text{L}$$

根据此近似的流量计算支路中的流动雷诺数：

$$R_{e1}=4q_{V1}/(\pi\nu d_1)=4\times12.25\times10^{-3}/(\pi\times1.003\times10^{-6}\times0.15)$$
$$=103670$$
$$R_{e2}=4q_{V2}/(\pi\nu d_2)=4\times7.75\times10^{-3}/(\pi\times1.003\times10^{-6}\times0.15)$$
$$=65587$$

根据流动雷诺数判断用哪一公式计算沿程阻力系数。R_{e1}在$10^5\sim3\times10^6$之间，故λ_1用尼古拉兹公式计算：

$$\lambda_1=0.0032+\frac{0.221}{R_{e1}^{0.237}}=0.0193$$

R_{e2}在$2\times10^3\sim3.26\times10^6$之间，故$\lambda_2$用柯纳科夫公式计算：

$$\lambda_2=\frac{1}{(1.81\lg R_{e2}-1.5)^2}=0.0195$$

用新的λ_1与λ_2计算q_{V1}与q_{V2}二次近似值：

$$q_{V1}=\frac{20\times10^{-3}}{1+\sqrt{\frac{0.0193\times200\times0.15^5}{0.0195\times500\times0.15^5}}}=12.276\times10^{-3}$$

$$q_{V2}=\frac{20\times10^{3}}{1+\sqrt{\frac{0.0195\times500\times0.15^5}{0.0193\times200\times0.15^5}}}=7.724\times10^{-3}$$

二次近似值与一次的已相当接近，可作为本题的答案(1)了。

（2） 求H_T

列从A断面到D断面的干管伯努里方程：

$$H_T+\frac{p_a}{\gamma}+\frac{\alpha_A v_A^2}{2g}=\frac{p_a}{\gamma}+\frac{\alpha_D v_D^2}{2g}+h$$

式中 $v_A\approx0$，$\alpha_A\approx\alpha_D\approx1$，整个管路的沿程损失$h$为：

$$h=h_{AB}+h_{BC}+h_{CD}$$
$$=\frac{\lambda_0 l_0}{d_0}\frac{8q_{V0}^2}{g\pi^2 d_0^4}+\frac{\lambda_1 l_1}{d_1}\frac{8q_{V1}^2}{g\pi^2 d_1^4}+\frac{\lambda_3 l_3}{d_3}\frac{8q_{V3}^2}{g\pi^2 d_3^4}$$

代入前式得：

$$H_T=\frac{\lambda_0 l_0}{d_0}\frac{8q_{V0}^2}{g\pi^2 d_0^4}+\frac{\lambda_1 l_1}{d_1}\frac{8q_{V1}^2}{g\pi^2 d_1^4}+\left(1+\frac{\lambda_3 l_3}{d_3}\right)\frac{8q_{V3}^2}{g\pi^2 d_3^4}$$

$$=\frac{8}{g\pi^2}\left(\frac{\lambda_0 l_0 q_{V0}^2}{d_0^5}+\frac{\lambda_1 l_1 q_{V1}^2}{d_1^5}+\left(1+\frac{\lambda_3 l_3}{d_3}\right)\frac{q_{V3}^2}{d_3^4}\right)$$

根据各管段流量计算雷诺数以求相应之阻力系数：

$$R_{e0}=4q_{V0}/(\pi\nu d_0)=4\times(q_{V3}+q_{VB})/(\pi\nu d_0)$$

$$=4\times(20+45)/(\pi\times1.003\times0.25\times10^{-3})$$

$$=330052$$

$$R_{e3}=4q_{V3}/(\pi\nu d_3)=4\times20\times10^{-3}/(\pi\times1.003\times10^{-6}\times0.2)$$

$$=126943$$

用尼古拉兹公式计算λ_0与λ_3得：

$$\lambda_0=0.0032+\frac{0.221}{R_{e0}^{0.237}}=0.0032+\frac{0.221}{330052^{0.237}}$$

$$=0.0097$$

$$\lambda_3=0.0032+\frac{0.221}{R_{e3}^{0.237}}=0.0032+\frac{0.221}{126943^{0.237}}$$

$$=0.0117$$

于是可计算水塔水头：

$$H_T=\frac{8}{9.81\pi^2}\times\left(\frac{0.0097\times1000\times(20+45)^2\times10^{-6}}{0.25^5}\right.$$

$$+\frac{0.0195\times5000\times7.724^2\times10^{-6}}{0.15^5}+\left(1+\frac{0.0117\times3000}{0.2}\right)$$

$$\left.\times\frac{20^2\times10^{-6}}{0.2^4}\right)\text{m}$$

$$=0.0826\times(42+76.6+46.4)\text{m}$$

$$=13.6\text{m}$$

三、沿程均匀泄流管路

工程当中，尤其在农业灌溉工程中和一些水工建筑工程中，常会遇到沿管路或渠道有流体连续均匀的外泄。下面就来讨论这种沿程均匀泄流管路的水力计算。

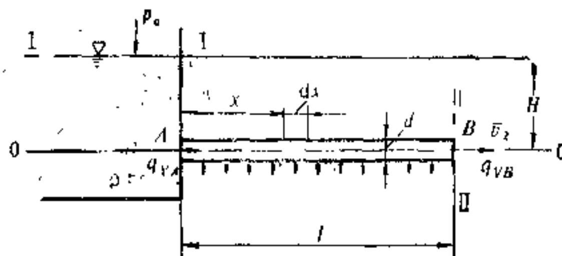


图5-9　沿程均匀泄流管路

如图5-9所示，上游水头为H的水平管路长为l，直径为d。液体从上游贮液池流经管路时不断有流体外泄，并设每单位流程长度上外泄的流量为q(m³/m)。

现取断面Ⅰ-Ⅰ与Ⅱ-Ⅱ作为参考截面，取管路轴线为基准线0-0列伯努里方程，

$$H+\frac{p_a}{\gamma}+\frac{\alpha_1v_1^2}{2g}=\frac{p_a}{\gamma}+\frac{\alpha_2v_2^2}{2g}+h_w$$

取$\alpha_1=\alpha_2\approx1$，而式中的$h_w$为沿程损失。在有沿程泄流的管路流动中计算$h_w$的办法如下：

在离管路进口A为x处取一微段管路dx，则在此微段上的水力损失应为：

$$dh_w=\frac{\lambda_x dx}{d}\frac{v_x^2}{2g}\tag{5-21}$$

式中λ_x为微段管路dx处的沿程阻力系数，它与该处的流动雷诺数R_{ex}及管壁状况有关。而R_{ex}又与该处(x)的流速v_x或流量q_{Vx}有关。

设管路进口流量为q_{VA}，出口流量为q_{VB}，则根据流动的连续性有：

$$q_{VA}=q_{VB}+ql,\quad q_{Vx}=q_{VA}-qx\tag{5-22}$$

$$V_x=\frac{4q_{Vx}}{\pi d^2}=\frac{4(q_{VA}-qx)}{\pi d^2}$$

$$R_{ex}=4q_{Vx}/(\pi\nu d)=4(q_{VA}-qx)/(\pi\nu d)$$
$$=4q_{VA}/(\pi\nu d)-4qx/(\pi\nu d)$$
$$=R_{eA}-\frac{4q}{\pi\nu d}x$$
$$=R_{eA}-R_{eq}x$$

将上面的V_x代入式(5-21)得：

$$\mathrm{d}h_w=\frac{\lambda_x\mathrm{d}x}{d}\cdot\frac{8(q_{VA}-qx)^2}{g\pi^2d^4}$$
$$=\frac{8\lambda_x}{g\pi^2d^5}(q_{VA}^2-2q_{VA}qx+q^2x^2)\mathrm{d}x$$

在整个管路长 l 上之水力损失为：

$$h_w=\int\mathrm{d}h_w$$
$$=\int_0^l\frac{8\lambda_x}{g\pi^2d^5}(q_{VA}^2-2q_{VA}qx+q^2x^2)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{8}{g\pi^2d^5}\int_0^l\lambda_x(q_{VA}^2-2q_{VA}qx+q^2x^2)\mathrm{d}x \qquad (5\text{-}23)$$

在求h_w的积分式中最麻烦的是λ_x。一般来说它对x而言为一复杂的函数。不过在很多问题中当流动的雷诺数较高时，既使管路沿程有泄流，A，B 两点的雷诺数还是差别不很大。因而λ_x在整个管路 l 上可近似的认为是常数。不然只好在积分时取 λ_x 沿管路的平均值 $\bar{\lambda}$了。故式(5-23)为：

$$h_w=\frac{8\bar{\lambda}}{g\pi^2d^5}\int_0^l(q_{VA}^2-2q_{VA}qx+q^2x^2)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{8\bar{\lambda}}{g\pi^2d^5}\left(q_{VA}^2l-q_Vql^2+\frac{1}{3}q^2l^3\right) \qquad (5\text{-}24)$$

根据式(5-22)还可将上式中q_{VA}用q_{VB}来代替：

$$h_w=\frac{8\bar{\lambda}}{g\pi^2d^5}\left(q_{VB}^2l+q_{VB}ql^2+\frac{1}{3}q^2l^3\right) \qquad (5\text{-}25)$$

式(5-25)即为整个均匀泄流管路的损失。将之代入本节一开始所列的伯努里方程即得管路系统所需水头H：

$$H=\frac{V_2^2}{2g}+h_w$$
$$=\frac{8q_{VB}^2}{g\pi^2d^4}+\frac{8\bar{\lambda}}{g\pi^2d^5}\left(q_{VB}^2l+q_{VB}ql^2+\frac{1}{3}q^2l^3\right)$$
$$=\frac{8q_{VB}^2l}{g\pi^2d^5}\left[\frac{d}{l}+\bar{\lambda}\left(1+\frac{ql}{q_{VB}}+\frac{1}{3}\frac{q^2l^2}{q_{VB}^2}\right)\right]$$
$$=\frac{8q_{VB}^2l}{g\pi^2d^5}\left[\frac{d}{l}+\bar{\lambda}\left(1+c+\frac{c^2}{3}\right)\right] \qquad (5\text{-}26)$$

式中　$c=\dfrac{ql}{q_{VB}}$

［例5-5］ 如图5-10 所示的等直径三段等长度的铸铁管AB，BC，CD。已知总长$L=600\text{m}$，直径$D=250\text{mm}$。在配水点B，C与D要求的流量为$q_{VB}=20\text{L/s}$，$q_{VC}=40\text{L/s}$，$q_{VD}=50\text{L/s}$。BC段要求均匀泄流量共为30L/s，CD段均匀泄流40L/s，试求泵出口表压力。

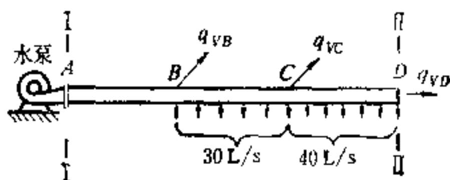


图5-10 分段泄流管路

［解］ 取泵出口为Ⅰ-Ⅰ断面，管路出口为Ⅱ-Ⅱ断面列出伯努力方程有：

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\bar{v}_1^2}{2g}=\frac{\bar{v}_2^2}{2g}+h_w$$

p_1为泵出口的表压力，$\bar{v}_1=\bar{v}_2$，故有

$$\frac{p_{泵}}{\gamma}=h_w$$

对于有两段均匀泄流的管路而言$h_w=h_{wAB}+h_{wBC}+h_{wCD}$，其中

$$h_{wAB}=\frac{8q_{VAB}^2\cdot\lambda_{AB}l/3}{g\pi^2d^5}=\frac{8\lambda_{AB}lq_{VAB}^2}{3g\pi^2d^5}$$

而

$$\begin{aligned}q_{VAB}&=q_{VB}+q_{VBC}+q_{VC}+q_{VCD}+q_{VD}\\&=(20+30+40+40+50)\text{L/s}\\&=180L/s=0.18\text{m}^3/\text{s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{eAB}&=4q_{VAB}/(\pi\nu d)\\&=4\times0.18/(\pi\times1.003\times10^{-6}\times0.25)=0.914\times10^6\end{aligned}$$

根据尼古拉兹公式计算λ_{AB}：

$$\lambda_{AB}=0.0032+\frac{0.221}{R_e^{0.237}}$$

$$=0.0032+\frac{0.221}{(0.914\times10^6)^{0.237}}=0.013$$

故

$$h_{AB}=\frac{8\times0.013\times600\times0.18^2}{3\times9.81\times3.14^2\times0.25^5}=7.135$$

又由式(5-26)：

$$h_{wBC}=\frac{8(q_{VAB}-q_{VB}-q_{VBC})^2l/3}{g\pi^2d^5}\left[\frac{d}{l/3}+\bar{\lambda}_{BC}\left(1+c_{BC}+\frac{c_{BC}^2}{3}\right)\right]$$

式中

$$c_{BC}=\frac{q_{VBC}}{q_{VAB}-q_{VB}-q_{VBC}}=\frac{30}{180-20-30}=0.231$$

而$\bar{\lambda}_{BC}$须由雷诺数定，要由B、C间的平均雷诺数定：

$$\begin{aligned}R_{eBC}&=4(q_{VAB}-q_{VB}-q_{VBC})/(\pi\nu d)\\&=4\times0.130/(\pi\times1.003\times10^{-6}\times0.25)\\&=660104\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_{BC}&=0.0032+0.221/[(660104+914000)/2]^{0.237}\\&=0.0133\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}h_{wBC}&=\frac{8\times0.13^2\times600}{3\times9.81\times3.14^2\times0.25^5}\\&\quad\times\left[\frac{3\times0.25}{600}+0.0133\times(1+0.231+0.231^2/3)\right]\\&=5.11\end{aligned}$$

同样由式(5-26)得：

$$h_{wCD}=\frac{8q_{VD}^2 l}{3g\pi^2 d^5}\left[\frac{3d}{l}+\bar{\lambda}_{CD}\left(1+c_{CD}+\frac{c_{CD}^2}{3}\right)\right]$$

式中 $c_{CD}=\frac{q_{VCD}}{q_{VD}}=\frac{40}{50}=0.8$。$\bar{\lambda}_{CD}$由$CD$段平均流动雷诺数决定：

$$\begin{aligned}R_{eC}&=4(q_{VD}+q_{VCD})/(\pi\nu d)\\&=4\times(50+40)\times10^{-3}/(\pi\times1.003\times10^{-6}\times0.25)\\&=457000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{eD}&=4q_{VD}/(\pi\nu d)\\&=4\times0.05/(\pi\times1.003\times10^{-6}\times0.25)\\&=254000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{eBC}&=(R_{eC}+R_{eD})/2=(457000+254000)/2\\&=355500\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_{BC}&=0.0032+0.221/355500^{0.237}\\&=0.0153\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}h_{wCD}&=\frac{8\times0.05^2\times600}{3\times9.81\times3.14^2\times0.25^5}\\&\quad\times\left[\frac{3\times0.25}{600}+0.0153\times\left(1+0.8+\frac{0.8^2}{3}\right)\right]\\&=1.356\end{aligned}$$

最后得：

$$\begin{aligned}\frac{p_{泵}}{\gamma}&=h_w=(7.135+5.11+1.356)\text{m水柱}\\&=13.6\text{m水柱}\end{aligned}$$

四、管路中间带泵的管路系统

在工程中常有许多管路系统，尤其那种管路很长或管路阻力特别大的管路，必须在管路中间增设泵以使液流增压补充原水头之不足，保证管路所要求的过流量。图5-11即为这种管路的示意图。

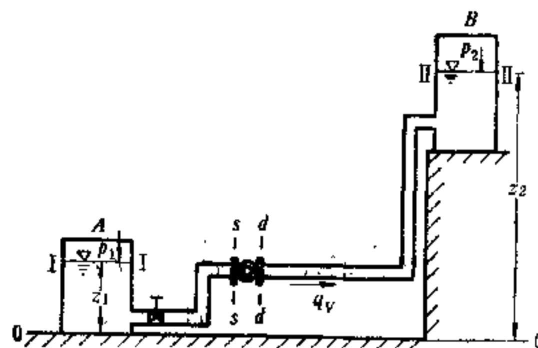


图5-11 带增压泵的管路系统

下面来讨论这种管路的水力计算。整个管路先可分为两段：泵前一段（吸水段）与泵后一段（压水段）。任取一水平线为基准线0-0。在吸水段上取两参考截面：一为泵进口 s-s，一为吸水池A的自由表面Ⅰ-Ⅰ，在压水管路上也取两参考截面：一为泵出口断面 d-d，一为下游水塔自由表面 Ⅱ-Ⅱ。分别对两段管路列伯努里方程：

$$\left.\begin{aligned}z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}&=z_s+\frac{p_s}{\gamma}+\frac{v_s^2}{2g}+h_s\\z_d+\frac{p_d}{\gamma}+\frac{v_d^2}{2g}&=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}+h_d\end{aligned}\right\}\tag{5-27}$$

式中h_s与h_d分别为吸水管路与压水管路的水力损失。将式(5-27)相减得：

$$\left(z_d+\frac{p_d}{\gamma}+\frac{v_d^2}{2g}\right)-\left(z_s+\frac{p_s}{\gamma}+\frac{v_s^2}{2g}\right)$$

$$=\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}\right)-\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}\right)+h_s+h_d$$

上式左端项叫水泵的扬程，一般用H表示：

$$H=\left(z_d+\frac{p_d}{\gamma}+\frac{v_d^2}{2g}\right)-\left(z_s+\frac{p_s}{\gamma}+\frac{v_s^2}{2g}\right)$$

故有
$$H=\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}\right)-\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}\right)+h \tag{5-28}$$

式中$h=h_s+h_d$为整个管路系统的水力损失。式(5-28)所给出的泵扬程一般叫"需用扬程"。此式还可改写为：

$$H=\bar{H}_z+Mq_V^2 \tag{5-29}$$

式中 $\bar{H}=\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}\right)-\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}\right)$，它和管路流量无关；而式中 $Mq_V^2=\frac{v_2^2}{2g}-\frac{v_1^2}{2g}+h$。从前面讲过的可知，管路中之速度头及损失都可以写成上面所给的形式，即它们和流量平方及管路的特性系数M有关。

由式(5-29)可知，需用扬程完全取决于$\bar{H}$，q_V与管路特性M。用图表示时，一般都呈近似的抛物线形状（图5-12上的曲线1），该曲线叫管路特性曲线，它与纵轴相交于$H=\bar{H}$处。

如果管路系统中所用的泵的特性曲线（图5-12上的曲线2）和管路特性曲线相交于A点，则A点对应的流量q_{VA}与扬程H_A即为管路系统运转时的流量与扬程。

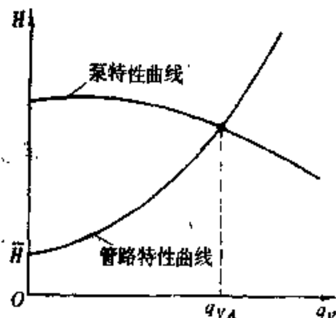


图5-12 泵与管路的特性

［例5-6］ 如图5-13所示的带泵管路用来将油液从低位油箱打入高位油箱。两油箱都为敞口，自由液面差为10m。钢管管路总长$l=150$m，直径$d=30$cm。油的重度为$\gamma_油=9221.4\text{N/m}^3$，粘度为$\nu=10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$。试问当想保证管路中有$q_V=0.2\text{m}^3/\text{s}$的流量时，泵的功率应多大？

［解］ 泵的功率应等于

$$P=\gamma_油 Hq_V$$

式中 H——泵扬程；

q_V——泵油管，即管路流量（不计泵内部泄漏）。

由式(5-28)可知管路需用扬程为：

$$H=\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}\right)-\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}\right)+h \tag{a}$$

在本例中$z_2-z_1=10$m，$p_1=p_2=\text{Pa}$，$v_1=v_2\approx0$。故有：

$$H=10+h \tag{b}$$

式(b)中h为整个管路的水力损失，可按长管计算：

$$h=\frac{\lambda l}{d}\ \frac{8q_V^2}{g\pi^2 d^4} \tag{c}$$

为求λ值，需知流动雷诺数R_e：

$$R_e=4q_V/(\pi\nu d)=4\times0.2/(\pi\times10^{-5}\times0.3)$$
$$=0.85\times10^5$$

可见λ值应该用勃拉修斯公式计算：

$$\lambda=\frac{0.3164}{R_e^{0.25}}=\frac{0.3164}{(0.85\times10^5)^{0.25}}=0.0185$$

将之代入式（c）得：

$$h=\frac{0.0185\times150}{0.3}\times\frac{8\times0.2}{9.81\times3.14^2\times0.3^4}\text{m}=18.9\text{m}$$

将此h值代入式(b)得泵扬程：

$$H=(10+18.9)\text{m}=28.9\text{m}$$

所以泵功率为：

$$P=\gamma_{油}Hq_v$$
$$=9221.4\times28.9\times0.2\text{W}=53300\text{W}$$
$$=53.3\text{kW}$$

第四节　管路中的水锤

如果在有液体流动的管路中突然或者较快速地改变液流的速度，则在管路中将发生所谓的“水锤”现象。这时在管路中将伴随着出现液体压力的急剧升高或降低。如图5-13所示的管路系统中，在管路中间都有阀门。在图 a 所示的管路中，当阀门突然关闭时，在阀前的液流中将出现速度突然由原流速值降为零，同时其压力将突然升高许多，有时甚至会将管路胀破，这就是所谓的正水锤。在图 b 上当阀突然关闭时，阀后的液流速度也是突然降为零，而压力会突然下降很多，有时管路会被周围大气压压扁，这就是所谓的负水锤。

下面来分析一下水锤现象发生的物理过程并推导出水锤压力（上升或下降值）和那些因素有关。

如图5-14所示，有一管路长为l，直径为$d=2r$，其中液流速度为v_0。设管路中的阀门在某一时刻突然关闭，使原过流截面S减小了ΔS（未全关死）。此时液体速度也相应地减小Δv（在阀前方）。而在阀前整个管段l上这一减小并不是同时发生的。在阀突然关小时，首先是紧贴阀板的液体流速下降Δv，而其前面的液体却仍以速度v_0向阀流来。于是流体必将

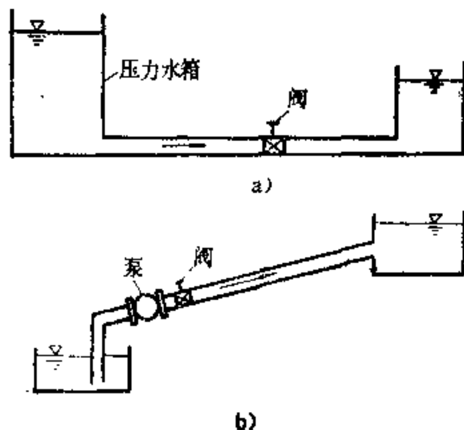


图5-13　管路中的水锤现象

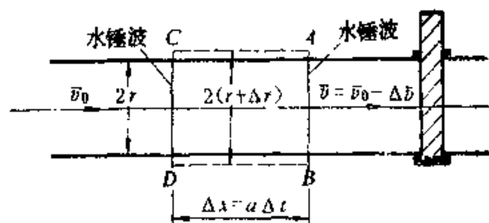


图5-14　水锤波的传播

受到压缩，密度增大，压力上升。同时管壁也将向外膨胀，直径加大，然后这一部分液体速度也由v_0减小到$v_0-\Delta v$。接着经过很短的时间间隔更前面的液流也将发生上面的过程，一直传到管路上游去。这个密度与压力突然上升，速度突然下降的流动截面由阀的位置以某一速度 a 经一段时间传播到上游的过程即为水锤波传播的过程。如果液体绝对不可压，则水锤波应该在阀关闭的一刹那就传到了上游。但液体毕竟还是可压缩的（尽管很小）。因而水锤波传播速度 a 应该是个有限值。

设在时刻 t 水锤波位于 AB 之处。在下一个相邻时刻 $t+\Delta t$ 它移动了 Δx距离到CD截面处，而且有

$$\Delta x=a\Delta t \tag{5-30}$$

水锤波从阀门传播到上游贮水池再返回到阀门所一共花费的时间为：

$$t_1=\frac{2l}{a}$$

如果阀门从全开到全闭所用的关闭时间用 t_c 表示，当 $t_1>t_c$时，水锤过程叫直接水锤。管路较长或关闭时间特别短时所发生的水锤即为直接水锤。当 $t_1<t_c$ 时叫间接水锤。这是在管路较短或关阀较慢时发生的水锤。

现在用苏联学者茹可夫斯基的方法推导水锤波传播的速度 a 及水锤压力 Δp（压力升高值）。

取图5-14中的一段液流 $ABDC$ 为控制体。液流以速度 v_0从CD截面流入该控制体，而从AB截面以速度$v=v_0-\Delta v$流出。在Δt时间间隔内控制体内质量共增加

$$\Delta m=\rho S\Delta v\Delta t \tag{5-31}$$

式中S为管路截面面积，ρ为液体未被压缩前的密度。

在 t 时刻时，控制体中共有液体质量为：

$$m=\rho S\Delta x$$

而在$t+\Delta t$时刻为：

$$m_1=(\rho+\Delta\rho)(S+\Delta S)\Delta x$$

故其质量增加又可写为：

$$\begin{aligned}\Delta m=m_1-m&=(\rho+\Delta\rho)(S+\Delta S)\Delta x-\rho S\Delta x\\&=(S\Delta\rho+\rho\Delta S+\Delta\rho\Delta S)\Delta x\end{aligned}$$

忽略上式中的高阶小量$\Delta\rho\Delta S$，有：

$$\Delta m=(S\Delta\rho+\rho\Delta S)\Delta x \tag{5-32}$$

由式(5-31)与式(5-32)可得：

$$\rho S\Delta v\Delta t=(S\Delta\rho+\rho\Delta S)\Delta x$$

但由式(5-30)知，$\Delta x=a\Delta t$，代入上式得：

$$\rho S+\Delta v\Delta t=(S\Delta\rho+\rho\Delta S)a\Delta t$$

所以

$$a=\frac{\Delta v}{\dfrac{\Delta\rho}{\rho}+\dfrac{\Delta S}{S}} \tag{5-33}$$

本书一开始讲到液体体积压缩系数

$$\beta=-\frac{W_1-W_2}{W_1\Delta p}=-\frac{\Delta W}{W_1\Delta p}=\frac{1}{E}$$

式中E为液体弹性模数。但

$$\frac{\Delta W}{W_1}=-\frac{\Delta\rho}{\rho}$$

故有
$$\frac{1}{E}=\frac{\Delta\rho}{\rho}\frac{1}{\Delta p}$$

或
$$\frac{\Delta\rho}{\rho}=\frac{\Delta p}{E} \tag{5-34}$$

因为 $S=\pi r^2$，所以 $\Delta S=2\pi r\Delta r$，$\frac{\Delta S}{S}=\frac{2\Delta r}{r}$。

又，长度为x的一段管路的管壁张力为：

$$\Delta T=xr\Delta p$$

如果壁厚为δ，则此张力由下述拉应力构成：

$$\Delta\sigma=\Delta T/x\delta=xr\Delta p/x\delta=r\Delta p/\delta$$

因压力升高Δp而使管壁形成的相对伸长为：

$$\frac{2\pi(r+\Delta r)-2\pi r}{2\pi r}=\frac{\Delta r}{r}$$

故又有
$$\Delta\sigma=E_{管}\frac{\Delta r}{r}$$

因此
$$\frac{r\Delta p}{\delta}=E_{管}\frac{\Delta r}{r}=E_{管}\frac{\Delta S}{2S}$$

$$\frac{\Delta S}{S}=\frac{2r\Delta p}{\delta E_{管}} \tag{5-35}$$

式中　$E_{管}$——管壁材料的弹性模量。

将式(5-34)与式(5-35)代入式(5-33)得：

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta p\left(\frac{1}{E}+\frac{2r}{\delta E_{管}}\right)} \tag{5-36}$$

根据动量定理，在控制体$ABDC$中液体动量的增加应等于外力之冲量：

$$(m+\Delta m)\Delta v=(P_2-P_1)\Delta t \tag{5-37}$$

式中　P_1，P_2——分别作用于AB与CD截面上之总压力。因 $\Delta m\Delta v$为高阶小量，故可有：

$$(m+\Delta m)\Delta v\approx m\Delta v$$

而
$$P_2-P_1=(p+\Delta p)(S+\Delta S)-pS\approx\Delta pS$$

将上两式代入式(5-37)得：

$$m\Delta v=S\Delta p\Delta t$$

又
$$m\Delta v=\rho S\Delta x\Delta v=\rho Sa\Delta t\Delta v$$

故有
$$\rho Sa\Delta t\Delta v=S\Delta p\Delta t$$

$$\Delta p=\rho a\Delta v \tag{5-38}$$

将式(5-38)代入式(5-36)得：

$$a=\frac{1}{\rho a\left(\frac{1}{E}+\frac{2r}{\delta E_{管}}\right)}$$

由上式即可推出水锤波的传播速度：

$$a=\frac{1}{\sqrt{\rho\left(\frac{1}{E}+\frac{2r}{\delta E_{管}}\right)}}=\frac{\sqrt{\frac{E}{\rho}}}{\sqrt{1+\frac{2rE}{\delta E_{管}}}} \tag{5-39}$$

水锤压力可由式(5-38)计算：

$$\Delta p=\rho a\Delta v=\rho a(v_0-v) \tag{5-40}$$

当阀门全闭死时v应为零，故那时的水锤压力为：

$$\Delta p=\rho a v_0=\frac{\sqrt{\frac{E}{\rho}}}{\sqrt{1+\frac{2rE}{\delta E_{管}}}}\rho v_0 \tag{5-41}$$

式(5-41)为直接水锤压力的计算公式。对于间接水锤，水锤压力为：

$$\Delta p=\rho a v_0\frac{l}{a t_0-l} \tag{5-42}$$

水锤现象在管路中是有害的。在设计管路与阀门时必须考虑这一问题。阀门关闭时间t_0在管路设计中是一个非常重要的因素。

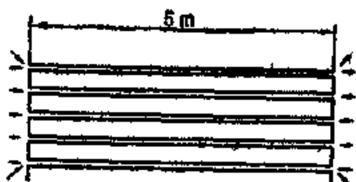
另外为减轻水锤的危害，常在管路系统中设置调压井，压力缓冲罐等装置。

习 题 五

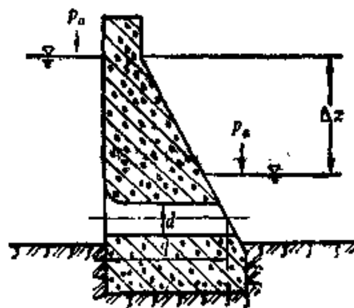
5-1 如题5-1图所示的一换热器，管长各5m，直径为5mm，管中水流速度为10cm/s。水温在换热器进口为20℃，到出口时变为30℃。如果按长管考虑，试计算换热器两端压差。

($\Delta p=570$Pa)

5-2 有一混凝土圆断面涵洞(如题5-2图所示)，已知洞长$l=10$m，上下游水位差$\Delta z=2$m，要求涵洞过流流量$q_V=4.3\text{m}^3/\text{s}$，试求涵洞的直径。($d=1$m)



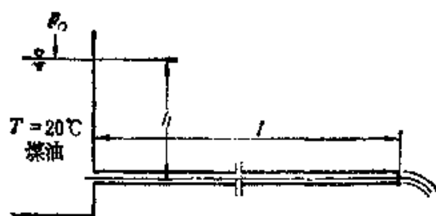
题5-1图



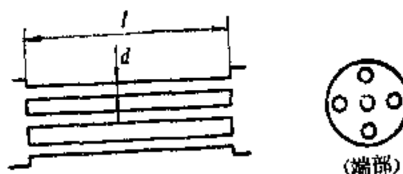
题5-2图

5-3 如题5-3图所示的一贮有煤油的油库中油温为20℃，经一直径为15cm的光滑黄铜管输送到油池去。如果已知$h=3$m，$l=40$m，试求管路中之流量。($q_V=0.059\text{m}^3/\text{s}$)

5-4 现在有一利用地热的换热器需要设计。换热器为镀锌铁管，直径为2cm，长为5m(如题5-4所示)。



题5-3图



题5-4图

设换热器管路中的流体介质的温度为200℃，密度为860kg/m³，粘度为1.35×10^{-4}N·s/m²，通过换热器的总流量为50kg/s，试计算：

（1） 忽略进口损失时的所需运行功率。

（2） 经一段运行后，在管壁上结有厚为2mm的垢(当量粗糙度为0.5mm)，试计算所需运行功率。

($p=728$W；P＝3.03kW)

5-5 有一连接两个水池的虹吸管（题5-4图），已知上下游水位差$\Delta z=2$m，管长$l_1=2$m，$l_2=5$m，$l_3=3$m，管径$d=200$mm。上游水面至管路顶点的铅直距离为$h=1$m，沿程阻力系数$\lambda=0.026$，进口局部阻力系数$\zeta_{进}=5$，弯头阻力系数$\zeta_{弯}=0.2$，试求：

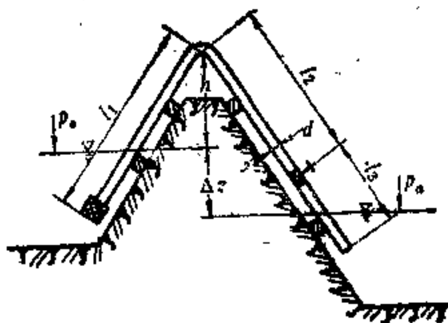
（1） 虹吸管中的流量；

（2） 压力最低点的位置及最大真空度。

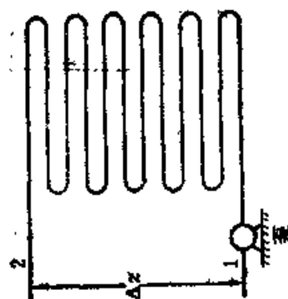
($q_V=0.0708$m³/s；$h_V=2.64$m水柱)

5-6 一换热器由直径为2cm的冷拉钢管组成，钢管总长20m，有19个弯头。水以流量等于3×10^{-4}m³/s，水温等于20℃的条件流入换热器，并以80℃流出换热器，换热器进出口高度差为0.8m(如题5-6图)如果在进，出口1与2无压差，试计算所需的泵功率。(提示：水粘度可用平均值)

(自定)



题5-5图



题5-6图

5-7 如题5-7图所示的水轮机装置中已知水头$H=180$m，引水钢管长$l=2200$m，直径$d=1.2$m。水轮机的效率为80%。管路作长管考虑，其沿程阻力系数$\lambda=0.02$，试求：

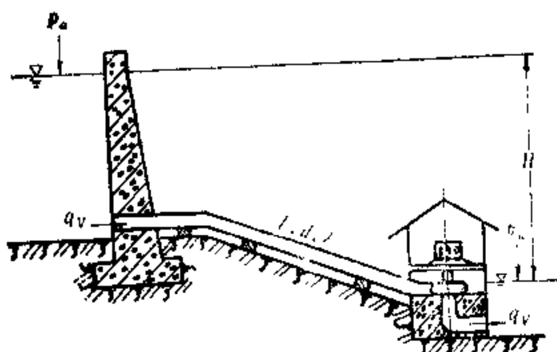
（1） 水轮获最大出力时所对应的流量q_V；

（2） 水轮机的最大出力P_{max}。

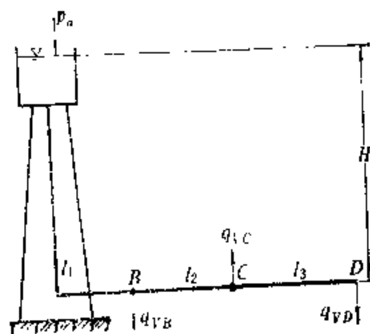
(提示：水轮机在管路系统中相当一局部阻力；由$dN/dQ=0$的条件求相当的流量)

($q_V=6.4$m³/s；$P_{max}=6623$kW)

5-8 一水塔经输水钢管向B，C，D处供水(如题5-8图所示)。已知$q_{VB}=18$L/s，$q_{VC}=13$L/s，$q_{VD}=12$L/s，管长$l_1=800$m，$l_2=600$m，$l_3=700$m，另外还要求在D点保持10m的自由水头。试问当各管段水力坡降J相同，各管的粗糙度$n=0.0125$，水塔水面高为(比之D点)80m时，各管段之管径各为多少？



题5-7图



题5-8图

($d_1=225$mm; $d_2=175$mm; $d_3=125$mm)

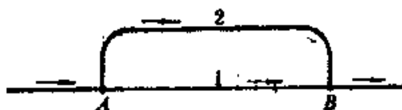
5-9　在题5-9图所示的并联管路系统中，支管1之长度$l_1=1000$mm，直径$d_1=50$cm，支管2的长度$l_2=1500$m，直径$d_2=40$cm。管路为一般钢管。如果干管中总流量为1m³/s，水温为10℃，试问流量在两支路中如何分配？

($q_{V1}=0.69\text{m}^3/\text{s}$; $q_{V2}=0.31\text{m}^3/\text{s}$)

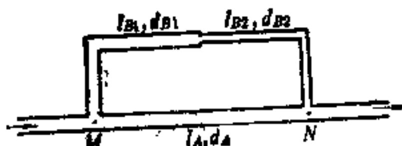
5-10　一并联管路系统的主干管中流量为$q_V=120$L/s。并联支路A为直径$d_A=250$mm，长度$l_A=1000$m的等径钢管；并联支路B分两段：B_1段直径为$d_{B1}=300$mm，长度为$l_{B1}=900$m，B_2段直径为$d_{B2}=250$mm长度为$l_{B2}=300$m。各管段的粗糙系数分别为，$n_A=0.011$，$n_{B1}=0.0125$，$n_{B2}=0.0143$。如果不计局部阻力，试求：

（1）　结点M与N间的水头损失

（2）　两支路中之流量分配



题5-9图



题5-10图

($h_{MN}=10.2$m; $q_{VA}=71.05$L/s, $q_{VB}=49$L/s)

5-11　两贮水箱之间的管路中间带泵。管路直径$d=50$cm，两水箱之自由表面水位差为$\Delta h=10$m。泵前管段（吸水管）长$l_1=500$m，泵后管段（压水管）长$l_2=700$m。如果想保证管路中之流量为$q_V=0.6$ m³/s，试问泵的功率应多大？管子为钢管，水温为10℃，两个弯头尺寸如图示(题5-11图)。

（自定）

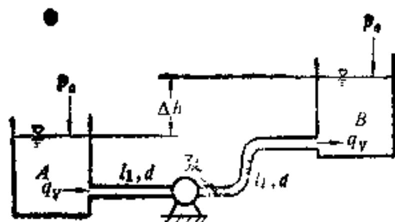
5-12　一水泵将水由贮水池A打入贮水池B。输水管为钢管，其总长为200m，直径为$d=1.5$m。其他有关尺寸如题5-12图上所示。试问当保证流量$q_V=15\text{m}^3/\text{s}$时，泵功率该有多大？

($P=8.52$MW)

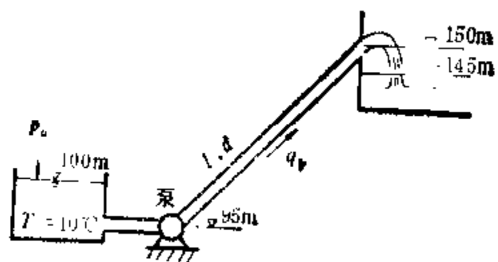
5-13　一水泵向两贮水箱A，B以及供水点C供水（题5-13图）。水泵压水管段1的长度为2400m，直径为600mm，在点j处分三支，到水箱B的支路长1200m，直径为400m；到水箱A的支路长1800m，直径500mm；到供水点C的支路长为2400m，直径900mm。其他有关尺寸如图所示。管壁粗糙系数为$n=0.0125$。如果供水点C处之流量为1.3m³/s时，试问：

（1）　水泵所提供的流量为多大？

（2）　水泵出口的压力水头$p_泵/\gamma$为多大？

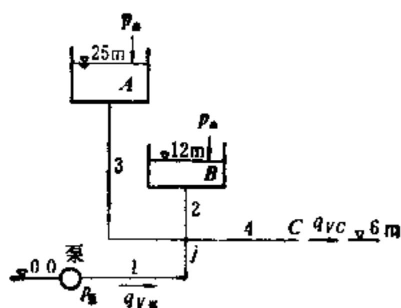


题5-11图



题5-12图

(q_V泵$=1.19m^3/s$; $\frac{p泵}{\gamma}=101.1m$水柱)



题5-13图

第六章　孔口及管嘴出流

第一节　孔口出流及其分类

在盛有液体并具有水头的容器壁上开一固定形状的孔，则液体在水头作用下从孔口流出，这就叫孔口出流。孔口被广泛地应用于工程技术上，用来控制流动，调节流量。如容器泄孔、液压阀孔、汽化器等均为孔口出流之例。

孔口可从不同角度加以分类。

从出流情况来说，如果出流情况不随时间而改变，则叫稳定出流孔口，否则叫非稳定出流的孔口。另外把流入大气中的出流孔口叫自由出流孔口，而流入液下的则叫淹没出流孔口。

根据结构来分类，如果孔口的壁厚一段引起的沿程阻力与孔口处之局部阻力相比可忽略不计，则称此种孔口为薄壁孔口，否则叫厚壁孔口。如果孔口到各相邻壁面的距离大于孔口尺寸的三倍，则此孔口叫完全收缩孔口，否则称为非完全收缩孔口。图6-1给出各种孔口的示意图。

下面将讨论孔口出流的流速与流量，确定影响它们的因素，建立其计算公式。讨论重点是紊流情况下的稳定出流。非稳定出流只作简要介绍。

第二节　定水头小孔口自由出流

图6-2所示的是定水头小孔口的自由出流。设孔口为圆形，直径为d，断面积为A。出流时液体从孔口周围各方面流向孔口。紧靠容器壁面的流体质点是贴壁面流向孔口的，由于惯性作用，经孔口流出的流体质点不可能突然拐一直角的弯沿垂直孔口所在壁面的方向流出孔口。实际情况是流体是走一圆弧状轨迹转过一直角的（如图示）。因此出流的流束的断面要发生收缩，并在离孔口约为直径之半的地方收缩完毕。通常称该处的断面为收缩断面，记成

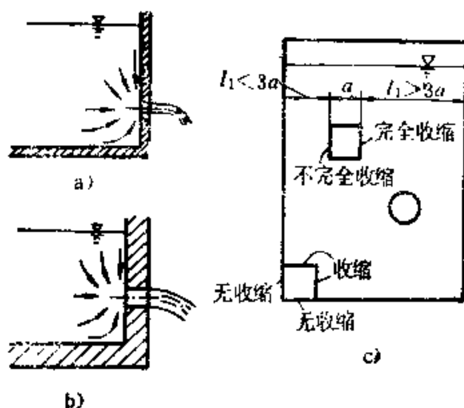


图6-1　各种孔口出流

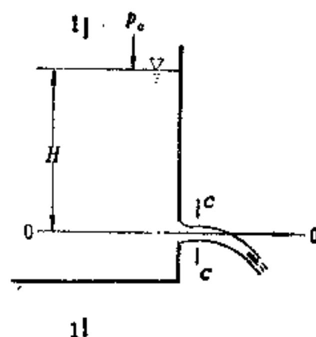


图6-2　定水头薄壁小孔口自由出流

C-C，其面积为Ac。在此断面以后，出流流束内之各流线可认为是相互平行的。故断面C-C是缓变流断面。常把比值$\varepsilon=Ac/A$叫作流束的收缩系数。

为推导出孔口出流的流速与流量公式，在容器的流体内离孔口相当距离之处取一断面1-1，以孔口轴线为基准线0-0，列1-1与C-C两断面处的伯努里方程：

$$H+\frac{p_a}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=0+\frac{p_a}{\gamma}+\frac{v_c^2}{2g}+h_w$$

容器内流体自由表面高为H。在小孔口的情况下有$H>10d$。hw为孔口出流的局部损失，

$$h_w=\zeta_{孔}\frac{v_c^2}{2g}$$

令$H+\alpha_1 v_1^2/2g=H_0$，H_0为作用水头或有效水头。将hw及H_0代入伯努里方程经整理后得：

$$H_0=(1+\zeta_{孔})\frac{v_c^2}{2g}$$

由该式可得出流的流速为：

$$v_c=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta_{孔}}}\sqrt{2gH_0}$$

令$\varphi=1/\sqrt{1+\zeta_{孔}}$，则上式可改写为：

$$v_c=\varphi\sqrt{2gH_0} \tag{6-1}$$

式(6-1)即为求孔口出流流速的公式。式中的φ叫孔口的流速系数。

通过孔口的流量为：

$$Q=v_c A_c=\varphi\varepsilon A\sqrt{2gH_0}$$

令$\mu=\varphi\varepsilon$，则上式为：

$$Q=\mu A\sqrt{2gH_0} \tag{6-2}$$

式(6-2)即为孔口出流流量公式。式中的μ叫孔口的流量系数。

式(6-1)与式(6-2)中的各系数依靠实验来测定。它们的数值大致如下：

$$\varepsilon=0.62,\ \zeta_{孔}=0.06,\ \varphi=0.97,\ \mu=0.60$$

这是薄壁圆形小孔口稳定自由出流的数据。其他类型孔口的相应数据可参考有关书籍[⊖]。

第三节　定水头小孔口淹没出流

当流体从定水头的一个容器经小孔口流入另外一个水头也一定的容器中，并且孔口位于后一容器中的液面以下（如图6-3所示）时，则称之为定水头小孔口淹没出流。

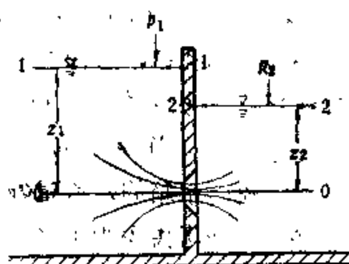


图6-3　定水头小孔口淹没出流

为求出流速度与流量，还是利用伯努里方程。为此，如图所示取参考断面1-1与2-2，

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\alpha_1\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\alpha_2\frac{v_2^2}{2g}+h_w$$

设两容器液体自由表面的面积比孔口断面面积大得多，那时即可认为$v_1\approx0$，$v_2\approx0$。设在孔口出流的收缩断面处液

⊖ 王献孚等编《流体力学》，中国工业出版社，1962年版。

体的流速为v。孔口处的局部损失应该由两部分构成：一为孔口边缘形成的局部损失。此部分损失与自由出流的孔口类似。另一个为孔口出流时的突然扩大损失。流束断面由收缩断面突然扩大到第二个容器的断面。于是有

$$h_w = h_{孔} + h_{扩大} = \zeta_{孔}\frac{v^2}{2g} + \zeta_{扩大}\frac{v^2}{2g}$$

由于孔口断面比容器面积小得多，故$\zeta_{扩大} \approx 1$

故有

$$h_w = \zeta_{孔}\frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} = (1+\zeta_{孔})\frac{v^2}{2g}$$

将之代入伯努里方程得，

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + (1+\zeta_{孔})\frac{v^2}{2g}$$

令$z_1 - z_2 = H$，为一常量。于是可得孔口出流速度为，

$$v = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_{孔}}}\sqrt{2g\left(H + \frac{p_1 - p_2}{\gamma}\right)}$$

令 $\varphi = 1/\sqrt{1+\zeta_{孔}}$ 则

$$v = \varphi\sqrt{2g\left(H + \frac{p_1 - p_2}{\gamma}\right)} = \varphi\sqrt{2gH_0} \tag{6-3}$$

此即孔口淹没出流流速计算公式。式中φ叫作流速系数。$H_0 = H + \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$叫作用水头。

流量为

$$q_v = vA_c = \varepsilon A\varphi\sqrt{2g\left(H + \frac{p_1 - p_2}{\gamma}\right)}$$

$$= \mu A\sqrt{2g\left(H + \frac{p_1 - p_2}{\gamma}\right)} = \mu A\sqrt{2gH_0} \tag{6-4}$$

式(6-4)为定水头淹没孔口出流之流量公式。式中之$\mu = \varepsilon\varphi$叫其流量系数。A_c为孔口出流收缩断面的面积，A为孔口断面面积。

对小孔口而言，经实验测定$\varepsilon = 0.611$，$\varphi = 0.96$，$\mu = 0.585$。可见孔口的淹没出流流速及流量公式中的各系数与自由出流的差别很小。因此通常二者即取相同的系数。

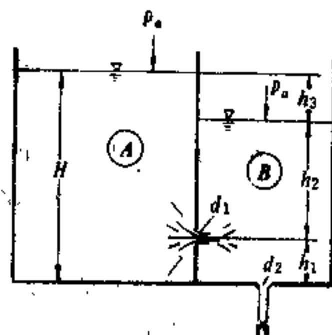


图 6-4

［例6-1］ 如图6-4所示一敞口水箱用隔板分成两部分A与B。隔板上有一小孔口，其直径为$d_1 = 4$cm。B部分底部有另一薄壁小孔口，直径为$d_2 = 3$cm。设A部水深保持恒定值$H = 3$m。隔板上之小孔口中心到容器底的距离为$h_1 = 0.5$m。试问，（1）B箱内水位恒定后h_2和h_3为多大？

（2）流出水箱的水流量q_V多大？

［解］ 当考虑隔板上之孔口出流时有

$$q_{V1} = \mu_1 A_1\sqrt{2g(H - h_1 - h_2)}$$

又当考虑B部底板上之孔口出流时有

$$q_{V2} = \mu_2 A_2\sqrt{2g(h_2 - h_1)}$$

当B箱内水位恒定时必有

$$q_{V1}=q_{V2}$$

故应有
$$\mu_1 A_1\sqrt{2g(H-h_1-h_2)}=\mu_2 A_2\sqrt{2g(h_2+h_1)}$$

对淹没孔口来说$\mu_2\approx\mu_1$。又$A_1=\frac{\pi d_1^2}{4}$，$A_2=\frac{\pi d_2^2}{4}$故上式成为：

$$\mu_1\frac{\pi d_1^2}{4}\sqrt{2g(H-h_1-h_2)}=\mu_1\frac{\pi d_2^2}{4}\sqrt{2g(h_2+h_1)}$$

或
$$d_1^2\sqrt{2g(H-h_1-h_2)}=d_2^2\sqrt{2g(h_2+h_1)}$$

$$d_1^4 2g(H-h_1-h_2)=d_2^4 2g(h_2+h_1)$$

故

$$h_2=\frac{d_1^4 H-(d_1^4+d_2^4)h_1}{d_1^4+d_2^4}$$

$$=\frac{d_1^4}{d_1^4+d_2^4}H-h_1$$

$$=\left(\frac{4^4}{4^4+3^4}\times 3-0.5\right)\text{m}$$

$$=1.87\text{m}$$

$$h_3=H-h_1-h_2$$

$$=(3-0.5-1.87)\text{m}$$

$$=0.63\text{m}$$

流出水箱的水流量为

$$q_V=\mu_1 A_1\sqrt{2g(H-h_1-h_2)}$$

取$\mu_1=0.6$，则

$$q_V=\mu_1\cdot\frac{\pi d_1^2}{4}\cdot\sqrt{2g(H-h_1-h_2)}$$

$$=\left(0.6\times\frac{3.14\times 0.04^2}{4}\times\sqrt{2\times 9.81\times(3-0.5-1.87)}\right)\text{m}^3$$

$$=0.423\times 10^{-5}\text{m}^3$$

第四节 变水头孔口出流

前节讨论的全是作用于孔口出流的有效水头是不变的所谓稳定出流问题。如果作用水头是变化的，其出流的速度及流量都会随时间而变化。这就是变水头的不稳定出流问题。

如图6-5所示，有一侧壁为铅直的容器中盛有水头h随时间变化的液体。设孔口的面积为ω，容器的断面面积为ω_1。

设在某时刻t水面位于孔口以上h处。经过一微小时间间隔dt从孔口出流的流体体积可按前述的定水头下出流的公式计算：

$$d\Omega=q_V dt=\mu A\sqrt{2gh}\cdot dt \tag{6-5}$$

设在此段时间间隔内液面变化了dh，则由流动的连续性可知：

$$q_V dt=-A_1 dh \tag{6-6}$$

式(6-6)右端之所以冠以负号是因液面在下降，dh为负值之故。

由式(6-6)及式(6-5)可得

$$dt=-\frac{A_1}{q_V}dh=-\frac{A_1}{\mu A\sqrt{2gh}}dh$$

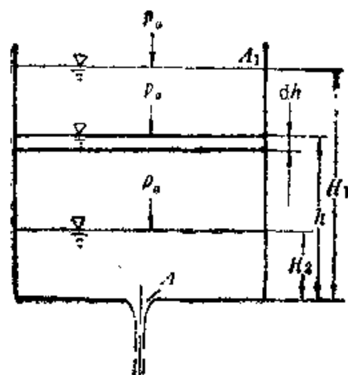


图6-5 孔口的不稳定出流

设初始时液面位于孔口以上 H_1 处，经过一定时间后液面因流体不断从孔口流出而降落到 H_2，则这段时间的大小就可以由上式积分求得：

$$t=\int_0^t dt=\int_{H_1}^{H_2}-\frac{A_1}{\mu A\sqrt{2gh}}dh$$

$$=-\frac{A_1}{\mu A\sqrt{2g}}\int_{H_1}^{H_2}\frac{dh}{\sqrt{h}}$$

$$=\frac{2A_1}{\mu A\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H_1}-\sqrt{H_2}\right) \tag{6-7}$$

在作积分过程中我们认为μ为常数，即认为在孔口出流，水头不断变化时，流量系数不改变，为一常量。

用式(6-7)很容易计算液体从容器流出的流空时间：（所谓流空，即$H_2=0$）

$$t_{流空}=\frac{2A_1}{\mu A\sqrt{2g}}\sqrt{H_1} \tag{6-8}$$

下面我们来作一个比较：如果在定水头H_1之下从该孔口同样流出那样多液体体积，所需时间应为

$$t_{定}=\frac{\Omega}{q_V}$$

但

$$\Omega=A_1H_1$$

$$q_V=\mu A\sqrt{2gH_1}$$

故

$$t_{定}=\frac{\Omega}{q_V}=\frac{A_1H_1}{\mu A\sqrt{2gH_1}}=\frac{A_1\sqrt{H_1}}{\mu A\sqrt{2g}} \tag{6-9}$$

比较式(6-8)与式(6-9)可知，在变水头情况下，流出同样体积的液体要比定水头情况下多用一倍的时间。

［例6-2］ 如图6-6所示的一个闸室，其横断面面积 $A_1=80m^2$。闸室有一个高为 $h_1=20cm$，宽为$B=40cm$ 的矩形放泄孔。该孔上的闸门在开启时，其提升速度为 $v=0.5cm/s$。假设水箱中的初始水头为 $H_1=0.5m$，放泄孔的流量系数为 $\mu=0.65$，孔口出流时下游水位（水头）保持恒定，试求：

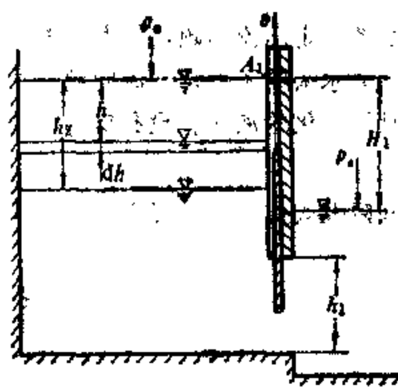


图 6-6

（1） 闸门开启完毕（全开）时闸室中的水位的下降值 h_2；

（2） 使闸室中的水位与下游水位拉平所需的总时间T。

［解］

（1）h_2值的计算

设闸门开启过程中的某瞬时 t，闸室水位与下游

水位之差为h，则放水过程的微分方程为：

$$-A_1 dh = q_V dt$$

式中dh为在微小时间间隔dt内水位差h之改变量，为一负值；q_V为在瞬时t孔口之流量。

因为 $$q_V = \mu A\sqrt{2gh} = \mu B(vt)\sqrt{2gh}$$

所以 $$-A_1 dh = \mu Bvt\sqrt{2gh}\, dt$$

把上式分离变量并进行积分，积分限为：当t由$0 \to h_1/v$时，水位差h由$H_1 \to H_1 - h_2$：

$$\int_0^{h_1/v} t \cdot dt = -\int_{H_1}^{H_1-h_2} \frac{A_1}{\mu Bv\sqrt{2g}} \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

即 $$\frac{t^2}{2}\Big|_0^{h_1/v} = \frac{A_1}{\mu Bv\sqrt{2g}} 2\sqrt{h}\Big|_{H_1-h_2}^{H_1}$$

由上式即可解出h_2：

$$h_2 = H_1 - \left(\sqrt{H_1} - \frac{1}{4}\frac{\mu h_1^2 B\sqrt{2g}}{vw_1}\right)^2$$

$$= \left[0.5 - \left(\sqrt{0.5} - \frac{1}{4} \times \frac{0.65 \times 0.2^2 \times 0.4 \times \sqrt{2 \times 9.81}}{0.005 \times 80}\right)^2\right] \text{m}$$

$$= 0.0399\text{m}$$

（2）计算时间T

$$T = \frac{h_1}{v} + \int_{H_1-h_2}^{0} \frac{-A_1 dh}{\mu Bh_1\sqrt{2gh}}$$

$$= \frac{h_1}{v} + \frac{2A_1}{\mu Bh_1\sqrt{2g}}\sqrt{H_1 - h_2}$$

$$= \left(\frac{0.2}{0.005} + \frac{2 \times 80}{0.65 \times 0.4 \times 0.2 \times \sqrt{2 \times 9.81}} \times \sqrt{0.5 - 0.0399}\right) \text{s}$$

$$= 511\text{s}$$

第五节　管嘴出流及其分类

如果盛有一定水头的液体的容器壁上所开孔口处的壁厚度或在薄壁孔口所加之一段某种断面形状的管子之长度大于孔口尺寸（如直径）的3～4倍时，则液体从该孔或管子的出流就叫管嘴出流（如图6-7所示）。

管嘴与管嘴出流也可从不同角度去分类。可分为稳定出流与非稳定出流。这要根据作用于管嘴的上下游的水头是否随时间变化来定。也可分为自由出流（流体从管嘴流入大气）和淹没出流（流体流入液下），如图6-7所示。

从结构上可分为圆柱形管嘴，流线型管嘴，扩散形管嘴，收缩形管嘴等。根据管嘴在器

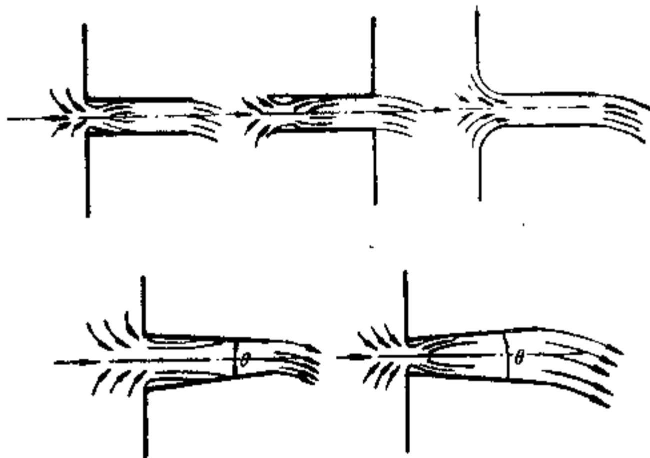


图6-7 管嘴出流

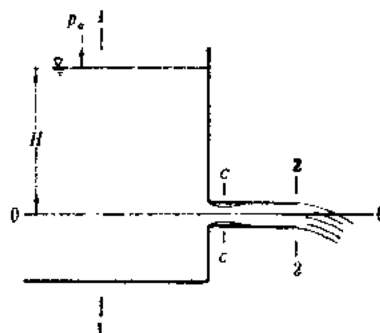


图6-8 圆柱形外伸管嘴的稳定自由出流

壁上的位置可分为外伸管嘴与内伸管嘴（如图示）。

第六节 外伸圆柱管嘴出流

图6-8为圆柱形外伸管嘴稳定自由出流的示意图，下面讨论其出流速度及流量如何计算。其他类型管嘴出流的解法与之相似。

如图所示，在容器内离管嘴一定距离之处取参考断面1-1，在管嘴出口的流束上取参考断面2-2。设c-c为收缩断面，它位于管嘴内部。取管嘴轴线为基准线0-0。列1-1与2-2断面的伯努里方程：

$$H+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_w \tag{6-10}$$

因断面1-1处自由表面上为大气，断面2-2也位于大气之中（自由出流），故方程中不出现压力项。

管嘴出流的损失包括：管嘴进口损失；从收缩断面突然扩大到管嘴断面的突然扩大损失；以及沿管嘴行程的沿程损失。第一个损失与孔口进口损失一样。故有

$$h_w=h_{孔}+h_{扩}+h_{沿程}$$

而

$$h_{孔}=\zeta_{孔}\frac{v_c^2}{2g}=\frac{\zeta_{孔}}{\varepsilon^2}\frac{v_2^2}{2g}$$

式中v_c为收缩断面c-c处之流速，ε为断面收缩系数。

$$h_{扩}=\zeta_{扩}\frac{v_2^2}{2g}=\left(\frac{A_2}{A_c}-1\right)^2\frac{v_2^2}{2g}$$

$$=\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)^2\frac{v_2^2}{2g}$$

式中A_2为管嘴通流的断面面积，A_c为收缩断面面积。

$$h_{沿程}=\frac{\lambda l}{d}\frac{v_2^2}{2g}$$

式中 λ——沿程阻力系数；

l——管嘴长度；

d——管嘴内径。

于是有

$$h_w=\frac{\zeta_{孔}}{\varepsilon^2}\frac{v_2^2}{2g}+\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)^2\frac{v_2^2}{2g}+\frac{\lambda l}{d}\frac{v_2^2}{2g}$$

$$=\left[\frac{\zeta_{孔}}{\varepsilon^2}+\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)^2+\frac{\lambda l}{d}\right]\frac{v_2^2}{2g}$$

$$=\zeta_{嘴}\frac{v_2^2}{2g}$$

式中：$\zeta_{嘴}=\frac{\zeta_{孔}}{\varepsilon^2}+\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)^2+\frac{\lambda l}{d}$叫管嘴的阻力系数。将$h_w$代入式(6-10)得

$$H+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+\left[\frac{\zeta_{孔}}{\varepsilon^2}+\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)^2+\frac{\lambda l}{d}\right]\frac{v_2^2}{2g}$$

令$H+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=H_0$，叫作用水头。由上式即可求出管嘴出流速度（取$\alpha_2=1$）为：

$$v_2=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\zeta_{孔}}{\varepsilon^2}+\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)^2+\frac{\lambda l}{d}}}\sqrt{2gH_0}$$
$$=\varphi\sqrt{2gH_0} \tag{6-11}$$

式中

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\zeta_{孔}}{\varepsilon^2}+\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)^2+\frac{\lambda l}{d}}}$$叫速度系数。

管嘴出流的流量为：

$$q_V=v_2A_2=\varphi A_2\sqrt{2gH_0}$$
$$=\mu A_2\sqrt{2gH_0} \tag{6-12}$$

式中μ为流量系数。在这里$\mu=\varphi$，即在管嘴出流时，流量系数与速度系数相等。之所以如此是因在管嘴出口，流束不再发生收缩之故。

根据实测得：$\zeta_{孔}=0.06$，$\varepsilon=0.62$。故管嘴的速度系数为：

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{0.06}{0.62^2}+\left(\frac{1}{0.62}-1\right)^2+\frac{\lambda l}{d}}}=\frac{1}{\sqrt{1.532+\frac{\lambda l}{d}}} \tag{6-13}$$

因此管嘴的速度系数或流量系数有赖于出流流束的雷诺数，内壁的粗糙情况以及管长。

有一问题很值得考虑即同是一个水头一定的盛有液体的容器上孔口的出流流量与同一直径的外伸管嘴的出流流量哪个大的问题。

前面讲到小孔口自由出流时曾提到，其流量系数为$\mu_{孔}=0.60$，故其出流流量为：

$$q_{V孔}=\mu_{孔}A\sqrt{2gH_0}$$

过流断面积也是A的外伸管嘴的出流流量是：

$$q_{V嘴}=\mu_{嘴}A\sqrt{2gH_0}$$
$$=\varphi_{嘴}A\sqrt{2gH_0}$$

若想让$q_{V孔}=q_{V嘴}$，则需

$$\mu_{孔}A\sqrt{2gH_0}=\varphi_{嘴}A\sqrt{2gH_0}$$

即必须

$$\mu_{孔}=\varphi_{嘴}$$

或用式 (6-12) 有：

$$0.60=\frac{1}{\sqrt{1.532+\frac{\lambda l}{d}}}$$

如果取$\lambda=0.02$，则由上式得：

$$\frac{l}{d}\approx 62$$

上式说明，若想断面相同的孔口及管嘴在同样的作用水头下有相同的出流流量，管嘴的长应约等于其断面直径的62倍。若管嘴长度大于此值，则沿程阻力增加，出流量将减小。反之出流量将增大。可见在孔口外面加一个较短的管嘴时，出流量会增加。从图 6-8 上可看到，在管嘴出流时，只要管嘴不过长，在收缩断面处要发生真空，因而当与孔口出流比较时，此断面处的流速较大，于是流量自然是增大的。但如果管嘴过长，在收缩断面处的压力可能会超过大气压力，于是流速会减小，因而流量也将减小。

常用的圆柱形外伸管嘴为$l=(3\sim4)d$的短管嘴。在这样的管嘴内真空区域从管嘴进口一直延伸到出口（如图6-9所示）。这样的管嘴常被称为文吐里管嘴。收缩断面处（c-c）之真空值的大小和作用水头有关。为找出此关系，取断面Ⅰ-Ⅰ于离管嘴进口较远处的容器内的液体某处。取断面Ⅱ-Ⅱ于收缩断面c-c处，取基准线于管嘴轴心线上，并列出伯努里方程：

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\alpha_1\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\alpha_2\frac{v_2^2}{2g}+h_w$$

式中，$z_1=H$，$p_1=p_a$，$v_1\approx0$，$z_2=0$，$p_2=p_c$，$v_2=v_c=v\frac{A}{A_c}=v/\varepsilon$，$h_w=h_{孔}=\zeta_{孔}\frac{v_c^2}{2g}=\frac{\zeta_{孔}}{\varepsilon^2}\frac{v^2}{2g}$，$\alpha_1=\alpha_2=1$

故

$$H+\frac{p_a}{\gamma}=\frac{p_c}{\gamma}+\left(\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{\zeta_{孔}}{\varepsilon^2}\right)\frac{v^2}{2g}$$

于是收缩断面处的真空值为：

$$\frac{p_a-p_c}{\gamma}=\frac{1+\zeta_{孔}}{\varepsilon^2}\cdot\frac{v^2}{2g}-H$$

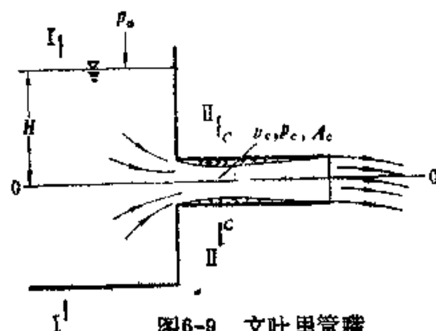


图6-9 文吐里管嘴

但$V=\varphi\sqrt{2gH}$，于是有

$$\frac{p_a-p_c}{\gamma}=\left[\frac{\varphi^2(1+\zeta_{孔})}{\varepsilon^2}-1\right]H$$

因$\zeta_{孔}=0.06$，$\varepsilon=0.62$。文吐里管嘴的$\varphi=0.82$。将它们代入上式得：

$$\frac{p_a-p_c}{\gamma}=0.854H$$

这就是收缩断面处的真空值与作用水头的关系。但理论上最大真空值为10.33m水柱。因此最大可能水头为：

$$H_{max}=\frac{10.33}{0.854}\text{m}=12.1\text{m}$$

如果作用水头超过了$H_{max}=12.1$m，管嘴出流时流束将脱离开管嘴壁面，如图6-9所示。实际上，在作用水头远不到H_{max}时，管嘴中的液流因真空值过大已产生汽化、发生了汽蚀，因而流束脱离开管嘴壁面。通常在作用水头为8～9m时已发生上述汽蚀现象。

正因上述分析所得的结果，管嘴常被用来增大容器的出流量。文吐里管嘴的出流量可比薄壁孔口出流量大32%，而流速反而小15%。

第七节 其他管嘴出流

一、内伸圆柱管嘴出流

如果在孔口上向容器壁内部装一只短管，则即成内伸管嘴（也称博达管嘴），如图6-10所示。实验表明，这种管嘴在较小的作用水头下（与文吐里管嘴相比）流束就从管嘴壁面脱离。在正常工作条件下，当液流充满管嘴断面时，其流速系数（流量系数）$\varphi=\mu=0.71$，阻力系数为$\zeta=1.0$。比之孔口出流，它可增大流量15%，用于容器的液体放空。

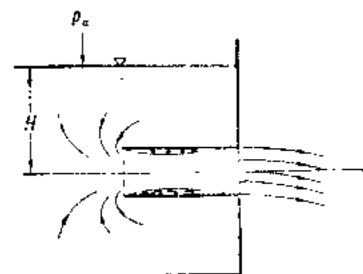


图6-10 内伸圆柱管嘴

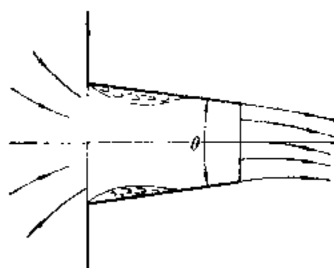


图6-11 圆锥收缩管嘴

二、圆锥收缩管嘴

这种管嘴为一断面积向出口逐渐缩小短锥管，如图6-11所示。液流在进入这种管嘴内首先收缩，然后重又扩大到与管嘴壁接触。在流出管嘴前又有某种程度的收缩。

这种管嘴的ε，φ，μ值是管嘴锥角θ的函数。下表给出了其值：

$\theta°$	0	6	13	13°24′	14	20	30	40	45
ε	1	1	0.983	0.982	0.98	0.95	0.92	0.89	0.87
φ	0.82	0.92	0.961	0.963	0.965	0.97	0.975	0.98	0.983
μ	0.82	0.92	0.945	0.946	0.943	0.92	0.89	0.87	0.86

从上表可知，最优锥角为$\theta=13°24'$。

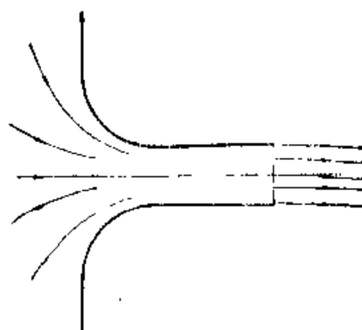
从这种管嘴流出的流束具有较大的动能，并且在较长的出流路径上流束不易离散，而保持原状。故它常用于冲击式水轮机的喷嘴上和消防喷枪上以及许多喷射装置上。

三、曲线谁状管嘴

如图6-12所示，管嘴壁的形状为收缩的曲面，其型线正如出流本身的形状。将前述的圆锥收缩管嘴的进口边缘修圆即成此种管嘴。由于这种管所形成的流束可减小进入管嘴后断面的过份收缩，因而大大减小了管嘴的阻力与损失，使出流流量显著增加。如果在此种管嘴出口段作成一小段圆柱形管段或者使其出口处的壁面垂直出口断面，则流束在脱离管嘴后不会

收缩，因而具有较大的动能。

实测表明，这种管嘴的$\varphi=\mu=0.97\sim0.99$。它具有较大的出流速度。可比孔口的出流量大一倍半。


图6-12 曲线锥状管嘴

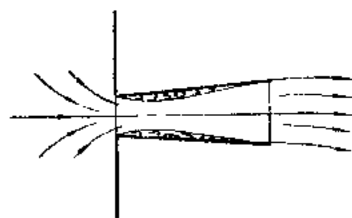
四、圆锥扩散管嘴

这种管嘴在进口段处有较大的真空区域（如图 6-13 所示）。真空值的大小也远比圆柱外伸管嘴的大。因而其抽吸作用更强，出流量也更大。

锥角θ的大小是影响这种管嘴出流的重要参数。$\theta=8°$是其最优值。锥角大于此值时，流束将脱离管嘴壁面，而失去抽吸作用。由于管嘴断面向其出口逐渐扩大，造成了动能向位能的转变，故这种管实际上是一扩压器。

这种管嘴是在较小的出流速度下排出大量的液体。其平均的速度系数 φ与流量系数 μ(针对管嘴出口断面）常取为0.45。

经过这种管嘴出流的水头损失很大，其阻力系数为$\zeta=4.0$


图6-13 圆锥扩散管嘴

习 题 六

6-1 如题6-1图所示，水箱侧壁有一小孔口，其直径$d=10$mm。水在水头$H=2$m的作用经此孔口自由射入大气。若流量$q_V=0.3$L/s，射流流束某一断面的中心的坐标为$x=3$m，$y=1.2$m试求

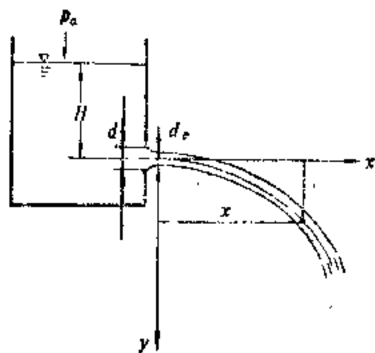
（1） 孔口的流量系数μ;

（2） 孔口之流速系数φ;

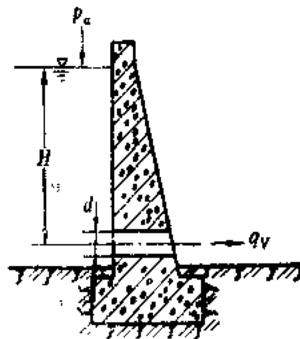
（3） 孔口出流之断面收缩系数ε;

（4） 孔口之阻力系数ζ

（$\mu=0.61$，$\varphi=0.97$，$\varepsilon=0.63$，$\zeta=0.063$）



题6-1图



题6-2图

6-2 如题6-2图所示，水电站大坝底部有一较长的泄水孔，可当作管嘴看待。当上游水面到泄水孔中心的距离为$H=100$m，泄水孔直径$d=0.22$m。试问大坝根部为多宽时，可获得泄流量$q_V=1$m³/s。已知$\zeta_孔=0.06$，$\varepsilon=0.62$，$\lambda=0.02$。

（$B=14.33$m）

6-3 一直径$D=2$m，高$h=3$m的圆筒形水箱内充满水（如题6-3图所示）。流入水箱的流量$q_V=21.6$

L/s。水箱底部所开的排水孔的直径$d=10\text{cm}$，孔口的流量系数$\mu=0.62$。试求：

（1） 水箱中的水位达到平衡时的水深H_m；

（2） 水箱中的水位达到水深$H_2=1.5\text{m}$时所需的时间T。

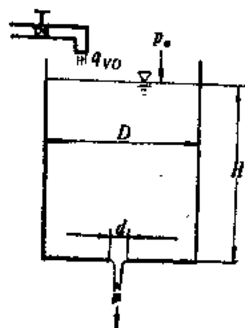
（$H_m=1\text{m}$，$T=8'15''$）

6-4 如题6-4图所示，一船闸的闸室长$l=100\text{m}$，宽$b=10\text{m}$、上下游闸门上所设的充水与放水孔口的面积为$A=1\text{m}^2$，孔口流量系数$\mu=0.65$。上游孔口的作用水头$H=2\text{m}$，上下游水位差$z=4\text{m}$。试求：

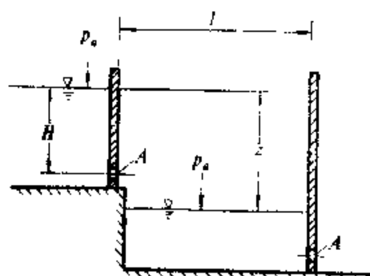
（1） 闸室的充水时间T_1（充水时下游放水孔关闭，上游充水孔开）；

（2） 闸室的放水时间T_2（放水时放水孔开，而充水孔关闭）。

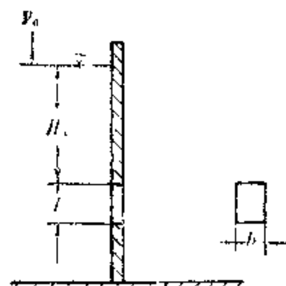
（$T_1=24'34''$，$T_2=23'10''$）



题6-3图



题6-4图



题6-5图

6-5 如题6-5图所示，某水池通过一矩形闸孔放水。已知：孔宽$b=0.8\text{m}$，孔高$e=1.2\text{m}$，闸孔上缘在水平下的深度是$H_1=2\text{m}$。设闸孔的流量系数$\mu=0.7$，试按小孔口计算此孔口出流的流量q_V。

（$q_V=4.8\text{m}^3/\text{s}$）

第七章　相似理论与量纲分析

第一节　相 似 理 论

对流动过程的研究不只用理论方法，还用实验方法。很多流动过程很复杂，当用理论分析的办法不能将流动的物理过程的全部条件考虑进去时，或者所得到的数学方程不可解时，就必须求助于实验。

流体力学实验有很重要的意义与作用。利用实验可校验理论的正确性，可求出理论公式中的未知系数或者直接用实验求出问题的答案。因此如何正确地提出实验和进行实验就非常重要。

通常很少直接用实型作实验，而是采用模型。这样，在实验过程中必然把原流动过程改变了。因此如何去改变流动过程的各种条件(按多大的比例)，作完试验后如何将所测得的数据换算到实型上去就是非常重要的流体力学的相似理论就能给出其答案。

一、流体力学相似

设有两个流动，如果描述和表征其一流动的某种量（如速度，粘性摩擦力等）可由另一流动的相应点处同名量乘以对全部流动（流场）来说为相同的某一常数而得到时，则此两流动被叫作流体力学相似。流体力学相似包括三部分：几何相似、运动相似和动力相似。

几何相似，两流动有几何相似的流动边界。亦即全流场有一个相同的长度比例：

$$\frac{l'}{l''}=\text{常数} \tag{7-1}$$

这样的两个流动称为几何相似。上式中l'与l''分别为两个流动中的相应的某个长度。如图7-1所示，有两个流动A'与A''为无穷远均匀来流绕过翼型的流动。几何相似时，首先必须两个流场都是无穷大边界的，而且两个翼型须几何相似，包括翼型表面粗糙度也应一样。

运动相似，在两流动中的几何相似点（相应点）处流体的速度成比例，即在流场各点有同一的速度比例尺：

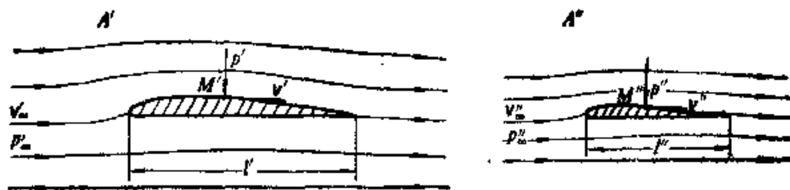


图7-1　相似流场

$$\frac{v'}{v''}=\text{常数} \tag{7-2}$$

这样的两个流场叫运动相似。这时两流动有几何相似的流线与迹线。如图7-1上的相应点M'与M''处之速度的比值应与无穷远速度比值相同：

$$\frac{v'_{M'}}{v''_{M''}}=\frac{v_\infty'}{v_\infty''}=\text{常数}$$

动力相似：运动相似的两流场有同样多的外力与内力作用，并且同名力成比例：

$$\frac{F'}{F''}=\text{常数} \tag{7-3}$$

这样的两流动被称为动力相似。如图7-1所示，设在点M'处作用的压力是p'，而在点M''处作用的压力是p''，则对于动力相似的两流场而言应该有：

$$\frac{p'}{p''}=\frac{p'_\infty}{p''_\infty}=\text{常数}$$

式中p'_∞与p''_∞为两流场无穷远处的压力。

两流动满足上述三个相似时称它们为流体力学相似。综上所述可以这样来定义流动的力学相似：

设f'为表征第一个流动某量，f''为表征第二个流动时同名量，则对两流体力学相似的流动的所有对应点来说应有：

$$\frac{f'}{f''}=k_f \tag{7-4}$$

式中k_f为常数，叫相似系数或比例常数。

现在流场中取某一比较特殊的点，例如图7-1上的流动之无穷远点，并设在该点表征流动的某量为f'_0与f''_0。则由于两流动相似必有：

$$\frac{f'}{f''}=\frac{f'_0}{f''_0}=k_f$$

或

$$\frac{f'}{f'_0}=\frac{f''}{f''_0} \tag{7-5}$$

在这里我们把f'_0与f''_0叫流场中f这个量的比例尺。式(7-5)表明：在两相似流动中的相应点处，某物理量和它自己的比例尺相比所得的无量纲量应是相同的。换句话说，两相似流动之区别只在于各量在两流场中所取的比例尺不同而已。

选取比例尺的方法在具体的流动中可以是各不相同的。如长度比例尺(或坐标的比例尺)可取为流动的特征长度（如被绕流物体之长度，管路直径等）；速度比例尺可取为流动的无穷远处速度或取为管路中的平均流速；压力的比例尺可取为无穷远处的压力或管流的压力比降；时间的比例尺可取为流动的特征时间，如流体流过物体的时间或流动周期等。

如果把描述流动的所有量都表示成其相应比例尺的倍数，则所有量都成为无量纲的了。同样，我们还可使描述流动的方程（如连续方程，纳维埃一斯托克斯方程等）以及流动的边界条件与初始条件也化成无量纲的。从所得的无量纲基本方程即可推论出两相似流动必须遵循的各种准则。只要准则得到满足，可以肯定两流动必然相似。相似准则的建立还可以通过更直接的方法实现。下面我们就来较详细的讨论相似准则。

二、相似准则

根据前述的流体力学相似的概念与定义，对两个相似的流动而言应有：

$$\frac{l'}{l''}=\alpha_l,\quad \frac{A'}{A''}=\alpha_l^2,\quad \frac{V'}{V''}=\alpha_l^3,\quad \frac{T'}{T''}=\alpha_t,\quad \frac{\rho'}{\rho''}=\alpha_\rho$$

$$\frac{v'}{v''}=\frac{l'/T'}{l''/T''}=\frac{l'}{l''}\frac{T''}{T'}=\frac{\alpha_l}{\alpha_t}=\alpha_v$$

$$\frac{a'}{a''}=\frac{l'/T'^2}{l''/T''^2}=\frac{l'}{l''}\frac{T''^2}{T'^2}=\alpha_l/\alpha_t^2$$

$$\frac{m'}{m''}=\frac{\rho' l'^3}{\rho'' l''^3}=\alpha_\rho \alpha_l^3$$

式中l,A,V,T,ρ,v,a与m各物理量分别为两相似流动中相应的长度、面积、体积、时间、密度、速度、加速度与质量。而各α对两相似流动而言都应为常量。

设F'与F''为两相似流动中的同名的作用力（如重力，粘性力等），则应有

$$\frac{F'}{F''}=\frac{m'a'}{m''a''}=\frac{\rho' l'^3\dfrac{l'}{T'^2}}{\rho'' l''^3\dfrac{l''}{T''^2}}=\frac{\rho' l'^2 v'^2}{\rho'' l''^2 v''^2}=\text{常数} \tag{7-6}$$

此同名力之比应保持为一常数。该比值叫牛顿准则数，用Ne表示，它应为一常数，

$$Ne=\frac{F'}{F''}=\text{常数} \tag{7-7}$$

这是流体力学相似中的一个基本准则。下面我们来分析当两流动相似并受重力作用时，它们应遵循什么样的准则。在重力作用时有

$$F'=\gamma' l'^3,\quad F''=\gamma'' l''^3$$

式中γ'，γ''分别为两相似流动的流体重度。根据式(7-6)有，

$$\frac{\gamma' l'^3}{\gamma'' l''^3}=\frac{\rho' l'^2 v'^2}{\rho'' l''^2 v''^2}$$

因为$\gamma'=\rho' g'$，$\gamma''=\rho'' g''$，故有

$$\frac{g' l'}{g'' l''}=\frac{v'^2}{v''^2}$$

或

$$\frac{v'^2}{g' l'}=\frac{v''^2}{g'' l''} \tag{7-8}$$

即在两个重力作用下相似的流动中必须保证一个无量纲的组合数$\frac{v}{gl}$为常数。这个组合数以Fr表示叫傅罗德准则数。因通常作实验都在同一地点，故$g'=g''$，于是，傅罗德准则变成，

$$\frac{v'^2}{l'}=\frac{v''^2}{l''} \tag{7-8}$$

又若在粘性内摩擦力作用下的两流动相似，则因这时

$$F=\mu\frac{dv}{dn}A$$

故

$$\frac{F'}{F''}=\frac{\mu'\dfrac{dv'}{dn'}A'}{\mu''\dfrac{dv''}{dn''}A''}=\frac{\mu' v' l'}{\mu'' v'' l''}$$

将之代入式(7-6)得

$$\frac{\mu' v' l'}{\mu'' v'' l''}=\frac{\rho' l'^2 v'^2}{\rho'' l''^2 v''^2}$$

因此有

$$\frac{\rho' v' l'}{\mu'}=\frac{\rho'' v'' l''}{\mu''}$$

因$\mu/\rho=\nu$，故得

$$\frac{v' l'}{\nu'}=\frac{v'' l''}{\nu''} \tag{7-10}$$

组合数vl/ν用Re来表示，叫雷诺数：

$$Re=\frac{vl}{\nu} \tag{7-11}$$

由式(7-10)可知，两个在粘性力作用下相似的流动其雷诺数必须相等。这就是所谓的雷诺准则。

在有压流动中作用力为$F=pA$或流动截面之间压差为$\Delta p=p_1-p_2$。于是有

$$F'=\Delta p' A', \quad F''=\Delta p'' A''$$

$$\frac{F'}{F''}=\frac{\Delta p' A'}{\Delta p'' A''}$$

将之代入式(7-6)得：

$$\frac{\Delta p' A'}{\Delta p'' A''}=\frac{\rho' l'^2 v'^2}{\rho'' l''^2 v''^2}$$

故有

$$\frac{\Delta p'}{\rho' v'^2}=\frac{\Delta p''}{\rho'' v''^2} \tag{7-12}$$

比值$\Delta p/\rho v^2$用符号Eu表示，叫欧拉数：

$$Eu=\frac{\Delta p}{\rho v^2} \tag{7-13}$$

式(7-12)说明，两个压力相似的流动，其欧拉数应相等。这就是欧拉相似准则。

式(7-8)，式(7-10)与式(7-12)即为一般定常流动的相似准则，当认定了两流动的上述三个相似准则确实得到了满足，就可以认为流动是相似的，因而由模型实验中所测得的数据即可换算到实型上去。

但在实际进行模型实验时想同时满足上述几个准则是很困难的，而且有时并无此必要性。在具体的流动中往往是有一种力是主要的，它的存在和变化决定了运动参数。实际上，前述各准则数代表了各不同性质力的作用。例如欧拉数Eu代表压力与惯性力之比；雷诺数Re代表粘性力与惯性力之比；而傅罗德数Fr则代表重力与惯性力之比。如果在流动过程中只有一种力（例如粘性力）对流动起主要作用，而其它几种力很小或根本不出现在所论流动中，那么即使有几个相应的准则得不到满足，而只要保证起主要作用那个力的准则得以满足，流动还基本上是流体力学相似的。在实际上作模型实验时往往正是这样作的。下面举几例说明之。

［例7-1］ 如图7-2所示，已知一轿车高为$h=1.5$m，时速$v=108$km/h。试用模型实验求



图7-2　汽车阻力模型实验

出其迎面阻力 R。

［解］ 此模型实验在所谓的风洞中进行。在风洞中形成一股均匀的空气流，然后把轿车模型静止的放在其中。这样就可以模拟轿车在地面上迎着空气行驶了。设在风洞内风速为 $v_M=45\text{m/s}$。要想作实验，模型轿车的流场必须与实型轿车的绕流流场力学相似。只是随便作一个几何相似的模型轿车还不够，还必须保证运动与动力学相似，如何保证的问题就必须求助于相似准则。轿车在地面行驶时，显然空气的粘性摩擦决定了其迎面阻力，而重力的作用则很小。所以这里只需保证雷诺数相同（对实型流动与模型流动而言）即可使流动力学相似了，即有

$$R_{eM}=R_{ep}\quad 或\frac{v_{\infty M}L_M}{\nu_M}=\frac{v_{\infty p}L_p}{\nu_p}$$

下标M指模型，下标p指实型。在此处

$$v_{\infty M}=v_M=45\text{m/s},\quad v_{\infty p}=108\text{km/h}=\frac{108000}{3600}=30\text{m/s}$$

$$L_p=h=1.5\text{m}$$

$$\nu_p=\nu_M\ （都是空气流）$$

代入上相似准则得：

$$L_M=h_M=\frac{v_{\infty p}L_p}{v_{\infty M}}=\frac{30\times1.5}{45}\text{m}=1.0\text{m}$$

即模型轿车高为$h_M=1.0\text{m}$。模型轿车的其他尺寸也应按此比例来决定。这样的模型作出的风洞实验才能与实型车的绕流力学相似。

如果测得的模型轿车的迎面空气阻力为：$R_M=1500\text{N}$，我们试根据相似准则来求实型轿车的迎面阻力R_p：

因流动力学相似，故　　$E_{uM}=E_{up}$或

$$\frac{p_M}{\rho v_{\infty M}^2}=\frac{p_p}{\rho v_{\infty p}^2}$$

和

$$\frac{A_M}{L_M^2}=\frac{A_p}{L_p^2}$$

式中s为迎风面积，所以有

$$\frac{p_M}{\rho v_{\infty M}^2}\cdot\frac{A_M}{L_M^2}=\frac{p_p}{\rho v_{\infty p}^2}\cdot\frac{A_p}{L_p^2}$$

即

$$\frac{R_M}{\rho v_{\infty M}^2L_M^2}=\frac{R_p}{\rho v_{\infty p}^2L_p^2}$$

故

$$R_p=\frac{\rho v_{\infty p}^2L_p^2}{\rho v_{\infty M}^2L_M^2}R_M=\frac{30^2\times1.5^2}{45^2\times1}\times1500\text{N}=1500\text{N}$$

［例7-2］ 如图7-3所示的一个管嘴出流装置，已知$d=250\text{mm}$；$q_{vp}=140\text{L/s}$；模型实验之长度比例尺为5；模型实验时，在水箱自由表面出现旋涡孔时的水头为$h_{\min M}=60\text{mm}$，试求模型实验时的流量q_{vM}和实际出流出现旋涡孔时的水头$h_{\min}$。

［解］ 这种具有自由表面的管嘴出流中，重力将起主要作用。因流程较短，粘性力可不

予以考虑。重力下流动相似时必须满足：

$$F_{rM}=F_{rp}$$

即
$$\frac{v_{\infty M}^2}{gL_M}=\frac{v_{\infty p}^2}{gL_p}$$

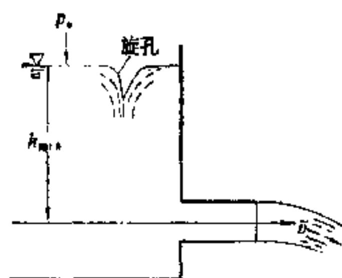


图7-3 管嘴出流模拟实验

在我们的问题中 $v_{\infty p}=\frac{4q_{Vp}}{\pi d^2}=\frac{140\times10^{-3}}{\pi\times0.25^2}\text{m/s}=0.713\text{m/s}$

$L_p=d=0.25\text{m}$，$L_M=L_p/5=d_M=0.05\text{m}$。代入上式：

$$v_{\infty M}^2=\frac{gL_M}{gL_p}v_{\infty p}^2=\frac{1}{5}v_{\infty}^2,$$

$$v_{\infty M}=\frac{1}{\sqrt{5}}v_{\infty p}=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{4q_{Vp}}{\pi d^2}$$

故
$$q_{VM}=\frac{\pi d_M^2}{4}\cdot v_{\infty M}=\frac{\pi d_M^2}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{4q_{Vp}}{\pi d^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{d_M}{d}\right)^2\cdot q_{Vp}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\left(\frac{1}{5}\right)^2\times140=2.5\text{L/s}$$

又因 $d/d_M=h_{\min}/h_{\min M}$

故
$$h_{\min}=\frac{d}{d_M}h_{\min M}=\frac{0.25}{0.05}\times60=300\text{mm}$$

第二节 量纲分析

前节已阐明，实验方法的理论根据是相似理论。该理论可以告诉我们如何进行模型试验和如何将模型实验的所得数据换算到实型上去。同样，量纲分析也是实验的一个理论根据。对于那种物理方程已经建立的流动问题，它们能给出肯定答案。而对于物理方程尚未建立的流动问题，虽然它们不一定能给出肯定正确的答案，但却是目前处理这类问题的唯一可行的办法。

量纲分析有常用的两个方法，一为所谓的雷利法，一为布金汉的π定理。它们都是通过对流动中的有关物理量的量纲分析，使各量函数关系中的自变量减为最少，以使实验大大简化。雷利法这里不赘述，只来讨论一下π定理。

当研究某一物理现象与过程时，首先要引进表征该现象状态的一些特征量。其次必须给出这些量的单位，使之有可能用一些数来表示这些特征量。特征量的数值大小与所选用的量度单位有关。由于不同特征量之间存在着由某些有关的物理定律或这些量的定义本身所确定的关系式，因此就有可能只规定那些彼此独立的，没有任何联系的那些特征量的量度单位，而其余的各量的度量单位即可由这些独立的量度单位来决定。这些独立量的量度单位叫基本单位，其余量的量度单位则叫导出单位。在经典力学中一般取长度，质量和时间的量度单位为基本量度单位，并以L，M，T表示之。在物理单位制中，L为厘米或米，M为克或公斤，T为秒。其它一切力学量的量度单位都可从上述三个基本单位导出。当然不一定非用长度，质量与时间作基本量不可。工程当中就以长度，力与时间作基本量。只要三个量之间互相间无关系，为各自独立的，就可作为基本量，它们的量度单位即为基本单位。

一个量的单位用基本单位表示时，如果不去管它们的具体大小，如厘米，公斤，秒等，而只着眼于基本单位的种类，如长度，质量和时间等，则我们就可以说某个量具有长度的几次方，质量的几次方和时间的几次方的量纲。因此，任何特征量A的量纲即可写为：

$$[A]=L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma} \qquad (7\text{-}13)'$$

上式应读作："量A的量纲等于长度的α次，质量的β次和时间的γ次"。如果量A为无量纲数，则$[A]=1$，即$\alpha=\beta=\gamma=0$

有量纲的特征量之间的等式关系或不等式关系中等号两边的量的量纲应该相同，这就是量纲齐次性原理。因此

$$\frac{[A]}{L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}}=1$$

刚才已说到，不一定非取L，M，T作力学量中的基本量不可。可以取任意三个量纲独立的特征量a_1，a_2和a_3的量度单位为基本单位。因此，任何特征量A的量纲均可表示为

$$[A]=a_1{}^x a_2{}^y a_3{}^z$$

根据量纲的齐次性原理应该有

$$\frac{A}{a_1{}^x a_2{}^y a_3{}^z}=\pi$$

π应为一无量纲数。

如果描述某一力学现象或过程的特征量A，a_1，$a_2\cdots$，a_n之间有下列关系式

$$A=f(a_1,\ a_2\cdots,\ a_n) \qquad (7\text{-}14)$$

当将其中三个量纲独立的特征量a_1，a_2和a_3取为基本量时，其余n-3个特征量就可化成无量纲数π_1，π_2，$\cdots$，π_{n-3}

$$\left.\begin{aligned}
\pi_1&=\frac{a_4}{a_1{}^{x_1}a_2{}^{y_1}a_3{}^{z_1}}\\
\pi_2&=\frac{a_5}{a_1{}^{x_2}a_2{}^{y_2}a_3{}^{z_2}}\\
&\cdots\cdots\\
\pi_{n-3}&=\frac{a_n}{a_1{}^{x_{n-3}}a_2{}^{y_{n-3}}a_3{}^{z_{n-3}}}
\end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}14a)$$

再加上

$$\pi=\frac{A}{a_1{}^x a_2{}^y a_3{}^z}$$

于是式(7-14)即可变为：

$$\pi=\varphi(\pi_1,\ \pi_2,\ \cdots,\ \pi_{n-3}) \qquad (7\text{-}15)$$

式（7-15）即为π定理的表达式。它说明任何有量纲量间的物理关系必可化作无量纲数间的关系，并且从而减少了问题中的自变量的数目。这些无量纲数可由理论计算或用实验的方法确定，于是即可从一些已知特征量的数值，计算另一些特征量的数值。

下面举几例来说明π定理的用途及量纲分析方法的大概作法。

［例7-3］ 理想求自由落体在真空中的下落速度。我们知道此速度和重力加速度g与下落的铅直距离有关。假设说我们不会用力学的方法推此自由落体速度，而企图用量纲分析法加

上实验来确立关系式。

［解］ 因自由落体的速度与重力加速度 g 与下落的铅直距离 h 有关，所以有

$$v=f(g,\ h)$$

式中

$$[v]=L/T,\ [g]=L/T^2,\ [h]=L$$

我们从各量的量纲发现，速度的量纲中，分母为时间的一次方。等式右端表达式中唯一含时间量纲的量为 g，且在分母上为二次方。$\sqrt{g}$ 将含时间的一次方量纲(在分母上)。如果用 $\sqrt{g}$ 除等式时，左端所得量将是无时间量纲的，那时，根据量纲齐次性原理，等式右端也应无时间量纲，即右端表达式中不应再包含 g 了。于是

$$\frac{v}{\sqrt{g}}=f_1(h)$$

这样作时（使等式两端无时间量纲）即把关系式中的自变量减少了一个。实际上这就是量纲分析法的实质所在。

现在用相仿的方法，再进一步减少关系式两端的量纲数，即再用 $\sqrt{h}$ 除两端，左端变为完全无量纲的了，则右端也应无量纲。于是有

$$\frac{v}{\sqrt{gh}}=c$$

式中 c 为无量纲数。在物理中我们已学过，这个 $c=\sqrt{2}$。作一次实验即可测出 c 值来，因而找出自由落体速度与 g，h 之关系式。可见若不采用量纲分析法，至少要作三次实验才能画出 $v=f(g,\ h)$ 曲线以确定自由落体速度的关系式 $v=f(g,\ h)$。

［例7-4］ 试用 π 定理推导圆柱绕流阻力 D 的表达式。已知圆柱直径为 d，无穷远来流速度为 v_∞，流体密度为 ρ，流体的动力粘度为 μ。

［解］

$$D=f_1(d,\ v_\infty,\ \rho,\ \mu)$$

式中 f_1 即为我们欲求出的函数关系。共有五个有关的物理量 D，d，v_∞，ρ，$\mu(n=5)$。五个物理量中包括三个基本量 L，M 与 $T(m=3)$。由前面讲到的式(7-14a)可知应有两个无量纲数 π_1 与 $\pi_2(i=n-m=5-3=2)$，即最后关系式应取形式：

$$\pi=f_2(\pi_1) \tag{a}$$

我们选取 d，v_∞ 与 ρ 为基本量，则由式(7-14a)

有

$$\pi=D/d^x v_\infty^y \rho^z \tag{b}$$

$$\pi_1=\mu/d^{x_1} v_\infty^{y_1} \rho^{z_1} \tag{c}$$

利用量纲齐次性原理，由式(b)可得：

$$L^0M^0T^0=[\pi]=\frac{MLT^{-2}}{L^xL^yT^{-y}M^zL^{-3z}}=L^{1-x-y+3z}M^{1-z}T^{y-2}$$

故有

$$\left.\begin{aligned}0&=1-x-y+3z\\0&=1-z\\0&=y-2\end{aligned}\right\}$$

所以

$$x=2,\ y=2,\ z=1$$

$$\pi=D/d^2v_\infty^2\rho \tag{d}$$

同样由式(c)得：$L^0M^0T^0=[\pi_1]=\dfrac{ML^{-1}T^{-1}}{L^{x_1}L^{y_1}T^{-y_1}M^{z_1}L^{-3z_1}}$

$$=L^{3z_1-y_1-x_1-1}M^{1-z_1}T^{y_1-1}$$

故有

$$\left.\begin{aligned}0&=3z_1-y_1-x_1-1\\0&=1-z_1\\0&=y_1-1\end{aligned}\right\}$$

所以

$$x_1=1\quad y_1=1,\ z_1=1$$

$$\pi_1=\mu/d\,v_\infty\rho=\frac{1}{R_e} \tag{e}$$

将式(d)与(e)代入式(a)：

$$\frac{D}{\rho v_\infty^2 d^2}=f_2\left(\frac{1}{R_e}\right)$$

$$D=\rho v_\infty^2 d^2 f_2\left(\frac{1}{R_e}\right)$$

$$=2\frac{d}{l}f_2\left(\frac{1}{R_e}\right)(ld)\frac{\rho v_\infty^2}{2}$$

$$=C_DA\frac{\rho v_\infty^2}{2}$$

式中A为圆柱迎风面积，$C_D=2\dfrac{d}{l}f_2\left(\dfrac{1}{R_e}\right)$为绕流的阻力系数。它与流动雷诺数及物体的形状有关，由实验定。

习 题 七

7-1 分别用长度，力与时间和用长度，质量与时间作基本量来确定下列变量或变量的组合的量纲。

(a) T（力矩）

(b) $\frac{1}{2}\rho v^2$

(c) $\sqrt{\tau/\rho}$

(d) q_V/nD^3（q_V为泵流量，n为泵每分钟转速，D为直径）

7-2 一用于空气中的圆球状气球（运行于15.5℃）准备用1:3的模型在湖水中作模拟试验。如果模型直径为30.5cm，在深水中以速度为1.52m/s拖动时所测得的阻力为89.0N。试问在大气中拖此实型气球时阻力为多少N？设水温为15.5℃。

($D=18.2$N)

7-3 在风洞中按雷诺准则作鱼雷模拟实验。若鱼雷在水中行进速度为7m/s。试问在标准大气压下，风洞中的风速应多大？设温度都是10℃。

($v=75.3$m/s)

7-4 流过直径为10cm的粗糙管路的10℃水流想用在同一管路中的20℃的空气流作模拟实验。如果水流速度为1.5m/s，试问气流速度多大才能使两流动动力相似。设管路中气流的绝对压力是150kPa。

($v=12.0\text{m/s}$)

7-5 一个大量程的文吐里流量计用一1:10的模型采用同一液体作模拟标定实验。如果两流量计中之液流是动力相似的，试问它们中的流量比q_{Vm}/q_{Vp}多大（m—模型，p—实型）。

($q_{Vm}/q_{Vp}=1/10$)

7-6 巴知泵所产生的压力Δp是转轮直径D，转速n，流量q_V以及流体密度的函数。试用量纲分析的方法确定联系这些变量的无量纲参数。

($\Delta p/\rho n^2D^2=fq_V/nD^3$)

第八章　流体运动学和理想流体动力学基础

前面几章，讨论了理想流体与粘性流体的一元流动，为解决工程实际中存在的许多一元流动问题作了必要的理论准备。但实际流动大多是三元（空间）的流动，其中也有些流动可简化为二元（平面）流动来处理。因此，从本章开始我们转入理想流体和粘性流体多元流动的讨论，以为解决工程实际中的多元流动问题奠定理论基础。

本章首先讨论流体运动的特性，通过流体运动的分解，引出流体运动的一个分类，为课程进一步深入讨论打下基础。另外，运动流体也必须受物质运动普遍规律（如质量守恒律、牛顿运动定律）的制约。本章将应用这些规律于运动流体建立流体运动的基本方程。这些方程将是今后求解多元流动的基本依据。

第一节　旋转坐标系中的流动

考察和描写物体的运动要先取定坐标系，并把静止或匀速直线运动的坐标系叫作惯性(坐标）系，而把非静止且作非匀速直线运动的坐标系称为非惯性（坐标）系。物体对惯性系的运动、速度与加速度称为是绝对的；而对于非惯性系的运动、速度与加速度则称为是相对的。我们描述流动并不总是在惯性系中，为了方便也常取非惯性系。譬如对于叶轮中的流动，有时就把坐标系取在旋转的叶轮上，考察流体的相对运动显然是方便的，这就涉及到旋转坐标系中的流动问题。我们的目的是要建立在旋转坐标系中和在静止坐标系中流动的关系，即相对流动与绝对流动的关系。

考虑以定角速度 ω旋转的叶轮中的流动。取旋转轴为z轴、在叶轮中某径向平面内取 x、y轴，使 $oxyz$ 成为右手系，作为空间固定坐标系。再建立随叶轮一起以相同角速度 ω旋转的动坐标系$ox'y'z'$，z'轴与旋转轴重合，x' 与y'轴和x、y轴取在同一径向平面内。

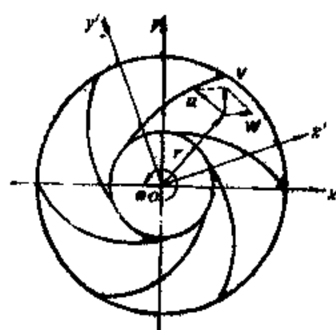


图8-1　叶轮中的流动

设于瞬时 t，叶轮中矢径为 r 的点处，在定坐标系内观察到的速度为 v(叫绝对速度)；在动坐标系内观察到的速度为w（叫相对速度）根据速度合成定理则有：

$$v=u+w \tag{8-1}$$

式中　$u=\omega\times r$叫作牵连速度。

把u代入上式得：

$$u=(\omega\times r)+w \tag{8-1)'$$

根据对上式求取时间变化率所得的加速度合成定理有：

$$a=a_t+a_c+a_r \tag{8-2}$$

式中　a——绝对加速度，是相对于定坐标系的加速度；

$a_t=\omega\times(\omega\times r)$项叫牵连加速度，是由于动坐标系旋转所引起的加速度。由于它的方向指向旋转中心，故也称向心加速度；

$a_c=2\omega\times w$项叫作科里奥来加速度，是由动坐标系旋转、流体运动交互作用所引起；

$\boldsymbol{a}_r$ 项称为相对加速度，是相对于动坐标系的加速度。把 $\boldsymbol{a}_t$、$\boldsymbol{a}_c$ 表达式代入式 (8-2) 得：

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{w}+\boldsymbol{a}_r \tag{8-2$'$}$$

式(8-1)与式(8-2)′在分析叶轮中的流动时常常用到。式(8-2)′的运动坐标分量形式可写成：

$$\begin{aligned} a_x' &= -\omega^2 x' - 2\omega w_y' + a_{rx}' \\ a_y' &= -\omega^2 y' + 2\omega w_x' + a_{ry}' \\ a_z' &= a_{rz}' \end{aligned} \tag{8-2$''$}$$

第二节　连续性方程

欧拉描述运动的方法，把确定流动的问题，转换成流速场的确定问题。因为并不是任意的矢量场都能成为一个流动的速度场，而只有满足某些条件的矢量场才有成为一个流动的速度场的可能。作为这些条件，首先是由物理学的一些基本定律所规定的。把这些定律结合流体运动写成解析的形式，就得到流体力学基本方程。正是这些基本方程为我们确定流场提供了基本依据。连续性方程，就是把质量守恒定律用于运动流体的结果。

考虑流场中由封闭控制面 A 所包围的任一空间固定体积 V（图 8-2），根据流体的连续介质假定及质量守恒定律：通过控制面 A 的流体质量净流出率，就应该等于体积 V 内质量的减少率。



图8-2　连续性方程图

如图8-2所示，通过控制面上任一面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 之质量的时间流出率为：

$$\rho\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 的方向为面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 的外法线方向。通过整个封闭控制面 A 的质量之净流出率就是

$$\iint_A \rho\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

另一方面，此时控制面内微元体积 $\mathrm{d}V$ 中的质量之时间减少率为：

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V$$

整个体积 V 内的质量减少率就应该是：

$$\iiint_V -\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V$$

根据上面的说明应该有：

$$\iint_A \rho\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\iiint_V -\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V$$

由高斯（Gauss）积分定理，上式左端可写为：

$$\iint_A \rho\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\iiint_V \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})\mathrm{d}V$$

代回上式得：

$$\iiint_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

或

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0$$

由于体积V的任意性可以推出，在流场中任意一点必须有：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{8-3}$$

写成坐标分量形式，在直角和圆柱坐标系内分别为：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \tag{8-3$'$}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \tag{8-3$''$}$$

式(8-3)、式(8-3)′和式(8-3)″就是一般形式的连续性微分方程，也就是适用于可压缩流体、非定常三元流动的连续性微分方程。

在特殊情况下连续性方程采取简化形式。以下介绍两种情况：

（1） 流动是定常的，ρ 与时间 t 无关，则 $\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$那么由式(8-3)，连续性方程成为：

$$\operatorname{div}(\rho v) = 0 \tag{8-3a}$$

或

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \tag{8-3a$'$}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \tag{8-3a$''$}$$

（2） 流体为不可压缩的(可以是非均匀的)，因为式(8-3)可改写成为：

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v = 0$$

流体不可压缩时，随体导数 $\frac{D\rho}{Dt}=0$，从而得

$$\operatorname{div} v = 0 \tag{8-3b}$$

或

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{8-3b$'$}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{8-3b$''$}$$

这是不可压缩流体（不论流动是否定常）的连续性方程式。除非发生汽蚀，不然水力机械中的流动均须满足式(8-3b)。

总而言之，连续性方程乃是流体力学基本方程之一，是流体运动速度场所必须满足的一个方程。它规定了流场中每点流速的三个分量所必须满足的关系式。不论理想流体还是粘性流体流动，都要受该方程的制约。

［例8-1］ 设有一不可压缩流体流动，已知$v_x=k_x$并且流动平行xy平面。试求速度的其他分量。

［解］ 因为流动平行xy平面，推知$v_z=0$。速度矢量的三个分量必须满足连续性方程，因为是不可压缩流动，故必须满足式(8-3b)′：

$$\frac{\partial}{\partial x}(k_x)+\frac{\partial}{\partial y}v_y+\frac{\partial}{\partial z}0=0$$

即

$$\frac{\partial v_y}{\partial y}=-k$$

积分后可得：

$$v_y=-ky+f(x,\ z,\ t)$$

式中 $f(x,\ z,\ t)$——任意函数，要由其它条件来定，总之，连续性要求函数v_y必须具有上面那种形态。

第三节 流体微团的运动分析

为了加深对流体运动的了解，要对流体运动进行分析。但由于流体运动的复杂性，这种分析无法对有限体积的流体来做，而仅能对流体微团进行。对流体微团运动的分析，我们将对照刚体运动进行，导出流体微团的运动分解定理，并在此基础上给出具有重要意义的流体运动的分类。

一、刚体运动的分解

从理论力学中知道，刚体的任何运动总可以分解成一个平移运动与一个旋转运动之和。因而刚体上任意一点M(图8-3)的瞬时速度$\mathbf{v}$皆可写成：

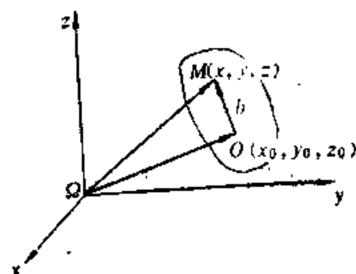


图8-3 刚体运动的分解

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b} \tag{8-4}$$

式中 $\boldsymbol{v}_0=(v_{0x},\ v_{0y},v_{0z})$是刚体上某一参考点$o$的速度；$\boldsymbol{\omega}=(\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z)$是绕通过上述参考点$o$的某瞬时转轴的旋转角速度；$\mathbf{b}=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$是从$o$指向$M$点的矢径。在所论瞬时，$\boldsymbol{v}_0$及$\boldsymbol{\omega}$是常数。

可以证明，刚体运动速度矢量场的旋度，恰等于刚体绕过其上某点瞬时转轴旋转角速度之两倍，即$(\nabla\times\boldsymbol{v})=2\boldsymbol{\omega}$ ($\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$为哈密尔顿算子)。只要验算各轴方向分量，如在$x$轴向：

$$\begin{aligned}(\nabla\times\boldsymbol{v})_x&=[\nabla\times(v_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b})]_x\\&=[\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b})]_x\\&=\frac{\partial}{\partial y}\Big[\omega_x(y-y_0)-\omega_y(x-x_0)\Big]-\frac{\partial}{\partial z}\Big[\omega_z(x-x_0)-\omega_x(z-z_0)\Big]\\&=2\omega_x\end{aligned}$$

沿y、z两方向可同样验证。所以刚体绕过某点的瞬时轴线旋转运动之角速度向量：

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}(\nabla\times v)$$

把ω代入式(8-4)得运动刚体上一点速度为：

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{b} \tag{8-4)'$$

或在直角坐标系里写成：

$$v_x=v_{0x}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)_0(z-z_0)-\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0(y-y_0)\right]$$

$$v_y=v_{0y}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0(x-x_0)-\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)_0(z-z_0)\right] \quad (8\text{-}4)''$$

$$v_z=v_{0z}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)_0(y-y_0)-\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)_0(x-x_0)\right]$$

上式中下标"o"，表示取o为参考点时之速度式。

式(8-4)″是运动刚体在直角坐标系内的速度分解式，第一项为平动速度；第二项为转动速度。

二、剪切流中流体微团运动之分解

流体运动比刚体复杂，一般流体运动除了象刚体似地包含平动和转动的成分以外，还包含变形这样的运动成分。这里我们举出一简单流动，来说明这个情况。

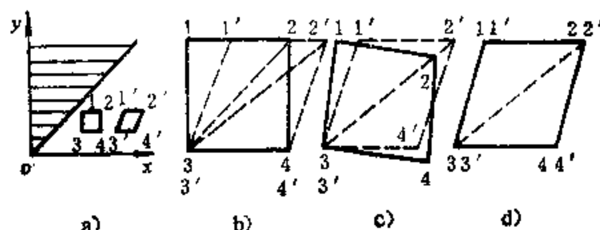


图8-4 流体微团的运动分解

设某一剪切流的速度分量如下：$v_x=ky$，$v_y=0$，$v_z=0$，其中k为常数，速度分布如图8-4。在平行的流体层间取一正方形流体微团1234(在垂直纸面方向取单位厚度)，过了一段时间后它运动到了1′2′3′4′，并变成了一个菱形。

流体微团从1234运动到1′2′3′4′可以看成是由三个简单运动复合而成：1)平动：把正方形1234向右平移，使3、4与3′、4′重合，占据图8-4b的位置。2)转动：让正方形绕过点3而垂直纸面的轴转动，使对角线32转到3′2′位置，如图8-4c所示。3)变形：剪切1234使32伸长直至与3′2′重合，这时正方形1234变成菱形1′2′3′4′，见图8-4d。

上例说明，剪切流这种（流线为平行直线的）简单流动，是可以分解成平动、转动与变形三个简单运动之和的。实际上一般流动都可以把它们分解成上述三个简单运动之和，这是我们下面要讨论的内容。

三、一般流动中流体微团运动的分解

对于一般流体运动，在某确定瞬时，处于流场中某点o有一流体微团，现在我们来考察其上任一点M的速度(参图8-3，现把刚体视为一放大后的流体微团)。点o对坐标系的矢径$\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$，其速度$\boldsymbol{v}_0(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$；点$M$矢径$\mathbf{r}(x, y, z)$，其速度$\boldsymbol{v}(v_x, v_y, v_z)$。点$M$处速度可通过点$o$处速度及其导数用泰勒级数表示：

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{1!}(\nabla\boldsymbol{v})_0+\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{2!}(\nabla\nabla\boldsymbol{v})_0+\cdots$$

由于$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$为一小量，略去二阶以上项，并在直角坐标系内写成分量形式：

$$v_x=v_{0x}+(x-x_0)\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_0+(y-y_0)\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0+(z-z_0)\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)_0$$

$$v_y=v_{0y}+(x-x_0)\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)_0+(y-y_0)\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_0+(z-z_0)\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)_0$$

$$v_z=v_{0z}+(x-x_0)\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)_0+(y-y_0)\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)_0+(z-z_0)\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)_0$$

为便于和刚体运动进行比较，把上式改写成下列形式：

$$\begin{aligned}
v_x=v_{0x}&+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)_0(z-z_0)-\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0(y-y_0)\right]\\
&+\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)(x-x_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0(y-y_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)_0(z-z_0)\right]\\
v_y=v_{0y}&+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0(x-x_0)-\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)_0(z-z_0)\right]\\
&+\left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_0(y-y_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0(x-x_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)_0(z-z_0)\right]\\
v_z=v_{0z}&+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)_0(y-y_0)-\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)_0(x-x_0)\right]\\
&+\left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)_0(z-z_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)_0(y-y_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)_0(x-x_0)\right]
\end{aligned} \tag{8-5}$$

把三个坐标分量式合成一个矢量式则

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{v})_0\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{D} \tag{8-5$'$}$$

式中$\boldsymbol{v}_0=(v_0x,\ v_0y,\ v_0z)$为流体微团上参考点$o$的速度矢量；$\frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{v})_0\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{D}$则是分别以式(8-5)右端第二、三项为坐标分量的矢量，下面来说明它们的物理意义。

式(8-5)中，$\boldsymbol{v}_0$是整个微团以o点速度平移时所具有的速度，即为微团平动速度。$\frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{b}$在第一部分已讨论过，代表微团象刚体似地、绕过$o$点的某瞬时转轴的旋转速度。其旋转角速度$\boldsymbol{\omega}$如已证明了的，

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{v}) \tag{8-6}$$

在直角与圆柱坐标系中可分别写成：

$$\begin{aligned}
\omega_x&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\\
\omega_y&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\\
\omega_z&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{8-6$'$}$$

$$\omega_r=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{r\partial\theta}-\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)$$

$$\omega_\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \qquad (8\text{-}6)'$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial(rv_\theta)}{r\partial r}-\frac{\partial v_r}{r\partial\theta}\right]$$

流体运动速度的这两部分——平动速度与旋转速度和刚体的完全一样，比较式(8-4)′与(8-5)′也可以看出这一点。但式(8-5)′比(8-4)′多出D这一项，考虑到流体不同于刚体是它能够变形，故可以断言，D将代表由 体变形所引起的速度部分。下面来较仔细地讨论D的物理意义。

考虑除去$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_0\neq0$外，其余速度分量对坐标变量的导数全等于零的简单情形。此时在流体微团上、相对于同o点一起平移的参考系$ox'y'$，流速将是：

$$v_x=\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_0(x-x_0),\quad v_y=0\quad v_z=0$$

此速度场的流速分布如图8-5a所示。取任一平行于x轴的线元：左端点坐标x_0、右端点坐标x。则左端点速度$v_{x0}=0$；右端点速度$v_x=\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_0(x-x_0)$，由于线元两端点速度不同，则单位时间之内线元的变形伸长度为：

$$v_x-v_{x0}=\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_0(x-x_0)$$

所以$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_0(x-x_0)$表示流体微团上平行$x$轴的线元的伸长变形速度。类似地，$\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_0(y-y_0)$、$\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)_0(z-z_0)$表示流体微团上平行于$y$与$z$轴的线元的伸长变形速度。为弄清$D$中其余项的物理意义，过$O$点作与其一起平移的参考系$Ox'y'$(图8-5b)，并设除$\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0\neq0$外，其余各导数项均为零的情形，相对于与$O$一起平移的参考系，微团上各点流速成为：

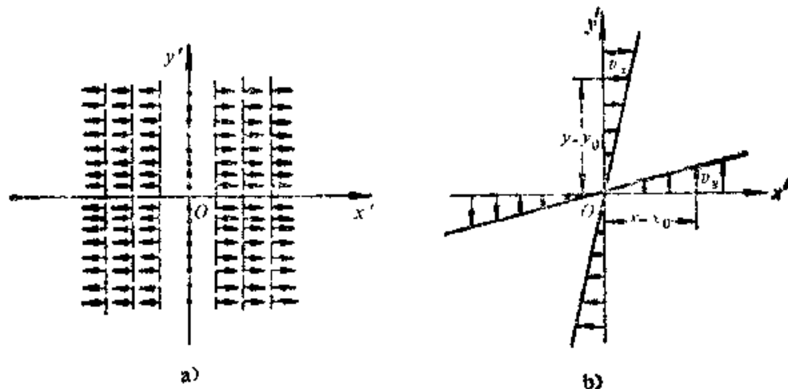


图8-5 流体微团的变形速度

$$v_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0(y-y_0)$$

$$v_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0(x-x_0)$$

$$v_z=0$$

此流速分布如图8-5b 所示。由图结合上速度式不难看出：$\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$是流体微团上，平行$x$、$y$轴的线元间夹角在单位时间内的减小，即角变形速度。而$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0(y-y_0)$与$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0(x-x_0)$正是由于角变形所引起的相应的线速度。

综上所述可得如下结论，在一般流动中，流体微团的运动速度可以分解成三部分：

1) 流体微团以其上某参考点O的速度进行的平动速度；

2) 流体微团象刚体似地、绕过O点的某瞬时转轴转动速度；

3) 流体微团变形所引起的变形速度。这个结论叫作亥姆霍茨速度分解定理。

四、有旋运动与无旋运动

上面讨论揭示了流体微团运动的几个物理组成部分，并建立了这几部分与流场之间的解析关系。这为进一步对流体运动进行分类研究，和为确定应力与应变速度的关系奠定了基础，而这两点在流体力学中是非常重要的。下面仅就第一点，做一简要说明。

在流动中流体微团的三个运动部分并非总是同时出现的，但平动与变形在绝大多数的流动中是都要出现的，而转动则在某些流动中出现而在另一些流动中是不出现的。因此根据在流动中流体微团是否转动，也就是根据流场的旋度：$\nabla\times\boldsymbol{v}$是否等于零，把流动分成有旋流动与无旋流动两类。

若在整个流场中$\nabla\times\boldsymbol{v}=0$，则称此流动为无旋流动；若在整个流场中$\nabla\times\boldsymbol{v}\neq0$时，则称该流动为有旋流动。

这个分类在流体力学中具有重要理论意义，以后我们还要分别讨论这两类流动。

［例8-2］ 设有剪切流动速度分布为$v_x=ky$，$v_y=0$ $v_z=0$，这是一平面流动。求出流场中(x_0, y_0, z_0)处流体微团上一点$(x_0+\delta x, y_0+\delta y, z_0+\delta z)$的平动速度、旋转速度、变形速度及流动的总速度。

［解］

1．平动速度 $\boldsymbol{v}_0=(ky_0, 0, 0)$、其余可如下计算。

2．旋转速度 $\frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{v}\times\delta\boldsymbol{r}$

$$=\left(0,\ 0,\ \frac{-k}{2}\right)\times(\delta x,\ \delta y,\ \delta z)$$

$$=\left(\frac{k}{2}\delta y,\ -\frac{k}{2}\delta x,\ 0\right)$$

3．**变形速度** 线变形速度$\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_0\delta x, \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_0\delta y, \left(\frac{\partial v_z}{\partial_z}\right)_0\delta z\right]=[0, 0, 0]$；角变

形速度$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0\delta y+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)_0\delta z,\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)_0\delta x+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)_0\delta z,\right.$

$\left.\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)_0\delta x+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)_0\delta y\right]=\left[\frac{k}{2}\delta y,\ \frac{k}{2}\delta x, 0\right]$。

总的变形速度为$\left(\frac{k}{2}\delta y,\ \frac{k}{2}\delta x, 0\right)$

4．合成速度

$$\boldsymbol{v}=(ky_0,\ 0,\ 0)+\left(\frac{k}{2}\delta y,\ -\frac{k}{2}\delta x, 0\right)+\left(\frac{k}{2}\delta y,\ \frac{k}{2}\delta x, 0\right)$$
$$=[k(y_0+\delta y),\ 0,\ 0]$$

第四节　有旋流动

一、有旋流动概念的进一步说明

当流场的旋度$\nabla\times\boldsymbol{v}\neq 0$时，流体微团绕某瞬时转轴的旋转角速度$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{v}\neq 0$，把这样的流动叫作有旋流动或旋涡流动，简称涡流。

在上述有旋流动的定义中，值得注意的是所有流体微团都在自转，流场中点点旋度不等于零。这是判断流动有旋的唯一标准，而不是其它什么，特别是和轨迹的形状怎样并无必然联系。这和刚体不同，刚体在作圆周运动时，一定是处处有旋的；而在作直线运动时，定然是处处无旋的，流体则不尽然，下举两例说明区别。

现有点涡流动速度场：$v_r=0$、$v_\theta=\frac{k}{r}$、$v_z=0$，其中k为一常数。此流动中各流团运动轨迹是以原点为中心的同心圆，流场中各点旋度：

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}-\frac{\partial v_\theta}{\partial z},\ \frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)$$
$$=(0,\ 0,\ 0)$$

所以，尽管流团运动轨迹为圆周，但流动却是无旋的(图8-6)。

另外有剪切流场：$v_x=ky$，$v_y=0$，$v_z=0$，其中k为常数。微团运动轨迹为平行x轴的直线，流场中各点旋度：

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=(0,\ 0,\ -k)\neq 0$$

可见，尽管流团运动轨迹为直线，但流动却是有旋的(图8-4)。

二、涡量及其守恒性

在矢量分析中，把$\nabla\times\boldsymbol{v}$叫矢量$\boldsymbol{v}$的旋度。在有旋流动中，此量是流场中任何一点的流团角速度的两倍，故称之为流体的旋涡矢量，简称涡量，并记成：

$$\boldsymbol{\Omega}=\nabla\times\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{\omega} \tag{8-7}$$

在直角和圆柱坐标系中的分量形式由式(8-6)′、式(8-6)″为：

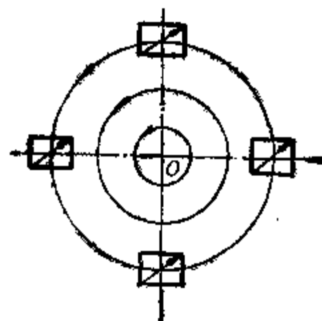


图8-6　点涡流动

$$\Omega_x=\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$\Omega_y=\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x} \qquad (8-7)'$$

$$\Omega_z=\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$\Omega_r=\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}-\frac{\partial v_\theta}{\partial z}$$

$$\Omega_\theta=\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial r} \qquad (8-7)''$$

$$\Omega_z=\frac{1}{r}\frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}$$

任何流体涡量的散度为：

$$\mathrm{div}\Omega=\nabla\cdot\Omega=\frac{\partial \Omega_x}{\partial x}+\frac{\partial \Omega_y}{\partial y}+\frac{\partial \Omega_z}{\partial z}$$

把式(8-7)′代入上式，则在流场中点点恒有

$$\nabla\cdot\Omega=0 \qquad (8-8)$$

涡量的这一运动学特性，叫作涡量的守恒性。

三、旋涡强度与速度环量

旋涡运动的研究具有重要的实际意义和理论意义。而不论在旋涡运动学还是在旋涡动力学的研究中，旋涡强度与速度环量都是两个重要的基本概念。在这里将对这两个概念作简要介绍，并指出它们间的联系。

在有旋流动空间中取一微分面积dA，将位于此表面上的流体涡量Ω向dA外法线方向n上投影（图8-7）得Ω_n，把乘积Ω_ndA定义为通过面积dA的旋涡强度，并用记号dI表示：

$$dI=\Omega_n dA \qquad (8-9)$$

也常把dI叫作穿过面积dA的旋涡通量。对有限面积A，通过它的旋涡强度（通量）I定义为：

$$I=\iint_A dI=\iint_A \Omega_n dA=\iint_A \Omega\cdot dA \qquad (8-9)'$$

旋涡强度，是一个表示旋涡对周围流体运动作用强、弱程度的量。

于某瞬时、在流动空间任取一曲线AB，在线上取一微分线段dl，速度v在dl上投影为v_l，则把乘积$v_l d_l$沿AB的线积分称为速度向量沿AB的环量(图8-8)，以Γ_{AB}记之。

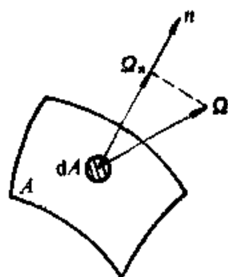


图8-7 旋涡强度

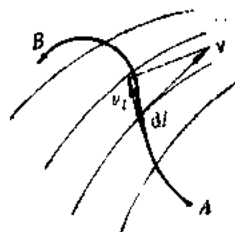


图8-8 速度环量

$$\Gamma_{AB}=\int_{AB} v_l \mathrm{d}l=\int_{AB}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{AB} v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y+v_z\mathrm{d}z \tag{8-10}$$

上面几式为沿AB速度环量的等价定义式，最后一式中$\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$为$\mathrm{d}l$在坐标轴上的投影。如AB为一封闭曲线C所代替，则环量为：

$$\Gamma_C=\oint_C v_l \mathrm{d}l \tag{8-10$'$}$$

Γ_C之大小表征了流体质点沿封闭周线C方向，运动的总趋势之强弱。

旋涡强度与速度环量是两个紧密相关的物理量，它们之间关系由斯托克司公式给出：

$$\oint_C \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_A \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{8-11}$$

式中面积A张于封闭曲线C上，单位法线矢量$\boldsymbol{n}$与C正绕行方向构成右手螺旋系统。式(8-11)说明，沿流场中某封闭曲线C的速度环量就等于通过以C为周界的任一面A的旋涡强度。

四、涡线、涡管和涡束

对于有旋流动，在任一固定时刻t、在流场内每点$\boldsymbol{r}$都可按式(8-7)确定出一个旋涡矢量：

$$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{r},\ t)$$

一般说来它是坐标和时间的函数，因而就形成了一个旋涡矢量场。象速度场中使流动图形化那样，在旋涡场中引进相应的几何概念后、也可使转动图形化。

类似于流线那样，可以定义涡线。涡线是于某瞬时旋涡场中的一条曲线，线上每点处流团的旋转轴线都与该曲线相切(图8-9a)。也象流线时那样，从上述涡线定义出发可导出它的微分方程：

$$\frac{d_x}{\omega_x}=\frac{d_y}{\omega_y}=\frac{d_z}{\omega_z} \tag{8-12}$$

式中ω_x、ω_y、ω_z为流体空间各点角速度的坐标分量。几何地，也可从一点的角速度矢量$\boldsymbol{\omega}_1$出发，顺矢量线走一微小距离到第二点，接着再按第二点ω_2矢量线向下走一段微小距离到第三点……。依此类推下去，可得一折线123…，当令每段微小距离趋于零时，折线趋向一条曲线，即为涡线。

还可以引进类似流管那样的管——涡管。在某瞬时，于旋涡场中任取一封闭曲线c（非涡线），过c上每点做涡线，所有涡线组成的管状曲面称为涡管(图8-9b)。显然，随曲线c取的大小，涡管可以是有限粗，也可以是无限细，后者称为微元涡管。

涡管中涡线的总体，叫作涡束。微元涡管中的涡束，称为微元涡束。不论涡线、涡管还是涡束，皆为一瞬时概念。在定常流动中，它们的形状、位置不随时间变化；但在非定常流动中，则是变化的。

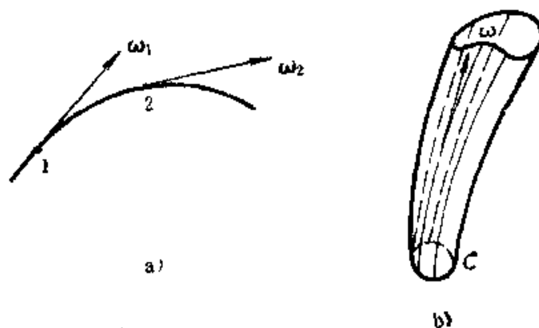


图8-9 涡线与涡管

第五节 无旋流动

流体中每个流团均不旋转的流动，称为无旋流动。无旋流动的数学表达式是：

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{v}=0$$

或在直角坐标系内有：

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=0$$

$$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)=0$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=0$$

根据上述条件，可以在流动空间定义一个函数——速度势函数。

于某瞬时t，考虑沿无旋流动空间中一条曲线L的积分

$$\varphi=\int_L\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\int_L v_x\mathrm{d}_x+v_y\mathrm{d}_y+v_z\mathrm{d}_z$$

可以证明此积分值与路径无关，而只是起点A与终点B的函数。如令L'为联接A、B的另一曲线，则沿闭曲线$L+L'$(图8-10)的积分为：

$$\oint_{L+L'}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

由斯托克司积分公式得：

$$\oint_{L+L'}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\iint_A(\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

由于无旋$\nabla\times\boldsymbol{v}=0$，所以

$$0=\oint_{L+L'}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\int_{A(L)}^{B}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}+\int_{B(L')}^{A}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

$$=\int_{A(L)}^{B}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}-\int_{A(L')}^{B}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

从而得到

$$\int_{A(L)}^{B}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\int_{A(L')}^{B}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

由此可知：在无旋条件下，积分$\varphi=\int_A^B\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$与路径无关。如再令$A$点固定，则$\varphi$将就只是点$B(x、y、z)$之（以$t$为参变量)的函数了，即

$$\varphi(\boldsymbol{r}\cdot t)=\int_A^B\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8-13}$$

由上述积分所定义的这个函数$\varphi(\boldsymbol{r},t)$，就叫作是无旋流动的速度势函数，并因此把无旋流动也叫作是有势流动，或简称势流。

势函数$\varphi(\boldsymbol{r},t)$有下述重要性质：

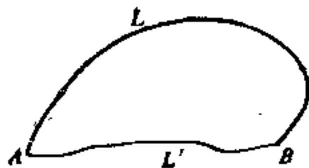


图8-10　速度的线积分

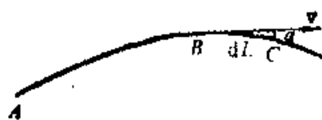


图8-11　速度势函数与速度

一、势函数的方向导数等于速度在该方向的投影

考虑曲线AB的端点B附近的另外一点C(见图8-11)，该点的势函数值为：

$$\varphi(C)=\int_A^C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{L}=\int_A^B \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{L}+\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{L}$$

$$=\varphi(B)+v\cos\alpha dL$$

上式中α为$\boldsymbol{v}$与$d\boldsymbol{L}$间夹角。由此可得：

$$d\varphi=\varphi(C)-\varphi(B)=v\cos\alpha dL$$

从而得：

$$\frac{d\varphi}{dL}=v\cos\alpha$$

顾及φ一般为空间和时间的函数，故上式左端宜改成偏导数；上式右端为速度在$\boldsymbol{L}$方向的投影v_L，则上式可改写成

$$\frac{\partial\varphi}{\partial L}=v_L \tag{8-14}$$

这就是说，势函数φ对任一方向的导数，就等于速度在该方向上的投影。

若把L取成沿直角坐标轴x、y、z；或圆柱坐标r、θ、z的方向时，则可得如下结果：

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{8-14)'$$

$$v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$v_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

$$v_\theta=\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} \tag{8-14)''$$

$$v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

或写成矢量形式

$$\boldsymbol{v}=\nabla\varphi \tag{8-14)'''$$

二、存在势函数的流动一定是无旋流动

设有某流动，存在式(8-13)所定义的势函数$\varphi(\boldsymbol{r},t)$，则由上述讨论知道$\varphi$和流速$\boldsymbol{v}$间有(8-14)′关系。我们来考虑流动的角速度沿$x$轴向分量：

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right]=0$$

类似可以验算$\omega_y=\omega_z=0$。

由此可见，流场存在速度势函数则流动无旋，也就是说流动无旋的充分必要条件是流场有速度势函数存在。

三、等势面与流线正交

在任意瞬时，速度势函数取同一值的那些点构成流动空间的一个连续曲面，叫作等势面．对定常流动，等势面的形状、位置是不随时间变化的；对非定常流动，则等势面的形状、位置是随时间而变化的。对应于不同值的等势面，组成等势面簇：$\varphi(\boldsymbol{r},t)=c$ 它们是速度势函数的几何形象。

过等势面上一点A并在该面上任取一微元矢量 $d\boldsymbol{L}=(dx,\ dy,\ dz)$，考虑它与该点速度矢量$\boldsymbol{v}=(v_x,\ v_y,\ v_z)$的标积(图8-12)：

$$\mathbf{v}\cdot d\mathbf{L}=v_x dx+v_y dy+v_z dz=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz=d\varphi$$

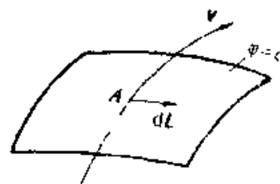


图8-12　等势面与流线

$d\varphi$为沿$d\mathbf{L}$势函数的增量，应该等于零，从而导出

$$\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{L}=0$$

这说明一点的速度矢量与过该点的等势面是垂直的。又因为速度矢量与流线平行，所以推知流线与等势面是正交的。还可以由式(8-14)看出，沿流线速度势值是增加的。

四、势函数是调和函数

对不可压缩流动，连续性方程为式(8-3b)′

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

对于势流，速度的坐标分量由式(8-14)′得：

$$v_x=\frac{\partial\theta}{\partial x},\quad v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

代进上式得φ满足的方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \tag{8-15}$$

或在圆柱坐标系内为：

$$\frac{\partial\varphi}{r\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\varphi}{r^2\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \tag{8-15$'$}$$

或写成算子形式

$$\Delta\varphi=\nabla^2\varphi=0 \tag{8-15$''$}$$

式(8-15)、式(8-15)′、式(8-15)″是拉勃拉司方程的不同形式．这说明，任何不可压缩流体无旋运动的势函数，必须满足拉勃拉司方程。满足拉勃拉司方程的函数，叫作调和函数。

对不可压缩流体无旋运动，求解速度场(矢量场)的问题，可转换成确定满足拉勃拉司方程的势函数（标量场）的问题。从原求解三个标量函数v_x、v_y、v_z，引入势函数后转换成求解一个标量函数φ；而且已经看到φ满足的是线性的拉勃拉司方程，这在数学上是一个很大的简化。

由上所述可知，为要求解不可压缩无旋流动的解，只要求满足拉勃拉司方程的解即可。但能满足拉勃拉司方程的函数是无数的，为能确定出适应各具体流动的解，必须提出相应于各流动的边界条件来。边界条件的正确提法可归成以下几类：

对有界区域内流动

1．单连通区域内流动

在边界上须给定$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$（或$\varphi$，或部分边界上给定$\varphi$、部分边界上给定$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，$n$为边界法向）值。

2．双连通区域内流动

（1）与单连通区域流动相同。

（2）另须给定沿包围内边界封闭曲线的环量Γ。

对无界区域中流动

1．在内边界上给定$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$$\left(\text{或}\varphi\text{，或部分边界上}\varphi\text{部分边界上}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)$值。

2．给定穿过内边界的流量。

3．还须再给出沿包围内边界封闭曲线的环量Γ。

［例8-3］ 有一个速度大小为U(定值)、沿x轴方向的均匀流动，找出它的速度势函数。

［解］ 首先判断流动是否有势。为此计算涡量，把流速$\mathbf{v}=(U,\ 0,\ 0)$代入式(8-7)

$$\Omega=\nabla\times v=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \boldsymbol{K} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U & 0 & 0 \end{vmatrix}=(0,\ 0,\ 0)$$

流动无旋，故为有势的。

由式(8-14)′知：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=U \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$$

从第一式得：

$$\varphi=Ux+f(y、z)$$

$f(y,\ z)$为积分任意函数，可根据上第二、三等式确定：$f(y、z)=c$(常数)，则

$$\varphi=Ux+c$$

因常数c对φ所代表的流场无影响，故可把它略去，而取

$$\varphi=Ux$$

图8-12在xy平面上绘出此流动的等势线（虚线）及流线（带箭头的实线）。

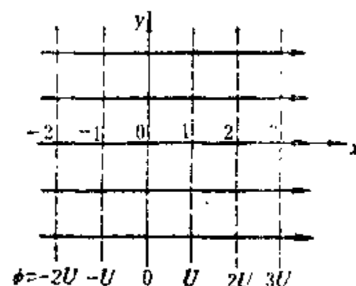


图8-13 均匀流动图

［例8-4］ 有一直线源流动，速度分布在圆柱坐标系中为$v_r=\frac{c}{r}$，$v_\theta=0$，$v_z=0$．寻找该流动的速度势函数。

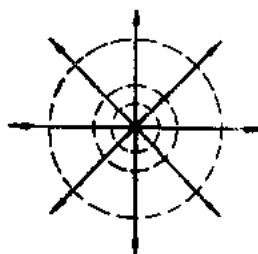


图8-14 直线源流动图

［解］ 由式(8-7)″可以验证此流动为无旋流动，故速度势函数是存在的。

从式(8-14)″得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{c}{r},\ \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}=0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$$

通过积分上边第一式，并由二、三两式确定积分任意函数后可得

$$\varphi=c\ln r$$

图8-14绘出此流动在$r\theta$平面上的图案，实线为流线，虚线则为等势线。

第六节 理想流体运动微分方程

前面几节讨论了流体运动学的一般规律，还建立了连续性方程，这些都是属于运动学方面的，未涉及到力的问题。本章后面几节，要从动力学角度来研究流体的运动，建立起作用在流体上的力及流体运动参数之间的关系。

首先把牛顿第二定律应用于运动流体，建立流体微团之受力与其加速度之间的微分关系式，即微分形式的动量方程式，在流体力学中常称之为运动微分方程。

为了简化问题便于数学处理，先来讨论理想流体运动的情况。虽然理想流体并不存在，但是由于理想流体一方面解在很多实际问题中可达到高度近似；另一方面即使精度不能满足实际需要，也可作为进一步求解的基础。因此理想流体理论不单具有理论意义，而且也是具有实际价值的。

本节建立理想流体运动方程，象在建立静止流体微分方程时所作过的那样，以运动着的理想流体空间任意一点$A(x, y, z)$为中心，隔离出一个其棱与坐标轴平行的六面体流体微团(参见图2-3)，来分析其受力及加速度情况。因为流体是理想(没有粘性)的，故不会出现沿作用面的切应力，因此只有法向应力。与静止时完全类似地可以证明：此法向应力为沿作用面的内法线方向；并且其大小与作用面的方位无关，是空间点的函数。但应该指出，它也并非就等于相应情况下的流体静压力，为区别起见人们把此压力叫作流体动压力。

考虑沿x轴方向流团受力及运动情况。由第二章第二节知，流体微团单位质量所受的x轴向合力是$f_X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$，那时由于流团静止，故合力应等于零。现在流团在运动，其加速度一般可表为$\frac{dv_x}{dt}$，则根据牛顿运动定律可得下列第一式，并同理得二、三两式：

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt}&=f_X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\\frac{dv_y}{dt}&=f_Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\\frac{dv_z}{dt}&=f_Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\tag{8-16}$$

式(8-16)在圆柱坐标系内写成

$$\begin{aligned}\frac{dv_r}{dt}-\frac{v_\theta^2}{r}&=f_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\\\frac{dv_\theta}{dt}+\frac{v_rv_\theta}{r}&=f_\theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\partial\theta}\\\frac{dv_z}{dt}&=f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\tag{(8-16)'}$$

还可用简便的向量方程表出：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{8-16}''$$

上述诸式都叫作理想流体运动微分方程，是欧拉于1775年提出，故也叫欧拉运动微分方程。这是求解理想流体运动的基本方程，既适用于不可压缩流体也适用于可压缩流体。

在求解流动时，质量力一般是给定的，对不可压缩流体 ρ（为常数）也是已知的，所以运动方程中只包含四个待定函数 v_x，v_y，v_z 和 p。式(8-16)已有三个方程，如再加进连续性方程(8-3b)′联立，则恰好四个方程。方程组是封闭的，理论上可以求解了。

从上方程组出发求解时，还必须给出定解条件，才可以使问题的解答完全确定。定解条件可以分成初始条件和边界条件两大类：初始条件是运动开始时刻 $t=0$ 时，流场所应满足的条件，一般可如下给出

$$\begin{aligned}
v_x(x,\ y,\ z,\ 0)&=f_1(x,\ y,\ z)\\
v_y(x,\ y,\ z,\ 0)&=f_2(x,\ y,\ z)\\
v_z(x,\ y,\ z,\ 0)&=f_3(x,\ y,\ z)\\
p(x,\ y,\ z,\ 0)&=f_4(x,\ y,\ z)
\end{aligned}$$

$f_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ )$全是已知函数。边界条件又可分成两类，即运动学条件和动力学条件。运动学边界条件（根据流体既不能穿入又不能离开固壁的特性）可提为，流速的法向分量应等于固壁速度的法向分量：

$$v_n=(v_n)_{固壁}$$

而动力学边界条件可提为：运动流体边界处的压力值，应等于该处的外界压力。比如自由界面上为大气压时，则那里运动流体压力为：

$$p=p_a$$

最后我们还想补充运动方程的另外两个形式：旋涡形式与运动坐标系的形式。

式(8-16)右边加速度项展开，并可改写成显含角速度的形式。对第一个方程的左边得：

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\\
&=\frac{\partial v_x}{\partial t}+\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)-v_y\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\\
&\qquad+v_z\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\\
&=\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{2}\right)-2(v_y\omega_z-v_z\omega_y)\\
&=\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)-2(v_y\omega_z-v_z\omega_y)
\end{aligned}$$

把上式结果代回式(8-16)第一式得下列第一式，并同理可得下列二、三两式：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)-2(v_y\omega_z-v_z\omega_y)&=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\
\frac{\partial v_y}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}\right)-2(v_z\omega_x-v_x\omega_z)&=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}
\end{aligned} \tag{8-16}'''$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2}\right)-z(v_x\omega_y-v_y\omega_x)=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

式(8-16)‴把加速度中的旋涡部分分出来，这对解决某些与旋涡有关的具体问题时，常常是方便的。运动方程的这种形式叫作兰姆——葛罗米柯形式。

对在旋转坐标系内流动的流体，将式(8-16)″中绝对加速度用式(8-2)′代入，则可得到旋转坐标系内的运动方程

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{w}}{dt}=\mathbf{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})-2(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{w}) \tag{8-17}$$

式中"～"表示在旋转坐标系内微分。写成旋转坐标系$ox'y'z'$内的分量形式得，

$$\begin{aligned}\frac{dw_{x'}}{dt}&=X'-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x'}+\omega^2x'+2\omega w_{y'}\\\frac{dw_{y'}}{dt}&=Y'-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y'}+\omega^2y'-2\omega w_{x'}\\\frac{dw_{z'}}{dt}&=Z'-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z'}\end{aligned} \tag{8-17'}$$

式(8-17)、式(8-17)′就是流体在旋转坐标系内运动时的运动方程式。不难看出，如果把惯性力$-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$与$-2(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{w})$吸收进单位质量力$\mathbf{f}$中，则旋转坐标系中的运动方程就与绝对坐标系中的运动方程具有完全相同的形式。

[例8-5] 有一个盛着密度为ρ的液体的小车，沿水平方向以定加速度a运动(图8-15)，求出液面的形状。

[解] 采用如图之固定直角坐标系oxz，在此系中速度与加速度场表示为：$v_x=v_x(t)$，$v_y=v_z=0$；$a_x=a$ $a_y=a_z=0$。代入式(8-3b)′和式(8-16)，连续性方程自动满足，运动方程则成为，

$$a=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$0=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

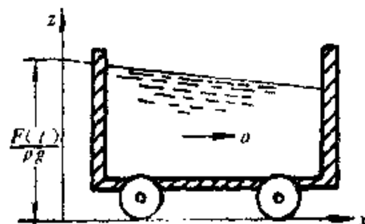


图8-15 定加速容器中之液体

积分上第一式得到，

$$p=-\rho ax+f(y,z,t)$$

利用第二、三两式定出积分函数得，

$$f=-\rho gz+F(t)$$

代回上式得压力分布，

$$p=-\rho(ax+gz)+F(t)$$

在时刻$t=t_0$，$F(t_0)=c$，则压力分布为：

$$p=-\rho(ax+gz)+c$$

在瞬时$t=t_0$时，将液体表面的压力$p=0$代入上式，则表面方程为，

$$z=\frac{c}{\rho g}-\frac{a}{g}x$$

这是一个斜率为$-\frac{a}{g}$，截距为$\frac{c}{\rho g}$的平面。

任意时刻t，液面方程为：

$$z=\frac{F(t)}{\rho g}-\frac{a}{g}x$$

不同时刻液面形状并不变，只是沿水平方向平移了一段距离而已。

［例8-6］ 设有圆柱形容器，内盛密度为ρ之液体，若液体同容器一起象固体似地以不变角速度ω绕对称轴旋转，求出液体中压力分布规律（图8-16）。

［解］ 取如图所示之圆柱坐标系，在此系中流场为：$v_r=0$，$v_\theta=\omega r$，$v_z=0$。把这些代入式(8-3b)″和式(8-16)′，连续性方程自动满足，运动方程则成为：

$$-\omega^2 r=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},\quad 0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\partial\theta},\quad 0=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

积分第一式得

$$p=\frac{1}{2}\rho\omega^2r^2+f(\theta、z)$$

利用第二、三式得出：

$$f(\theta、z)=-\rho gz+c$$

代回压力式得：

$$p=\frac{1}{2}\rho\omega^2r^2-\rho gz+c$$

再利用边界条件$r=z=0$时$p=0$，代入上式后得：

$$c=0$$

压力的最后分布公式为：

$$p=\frac{1}{2}\rho\omega^2r^2-\rho gz$$

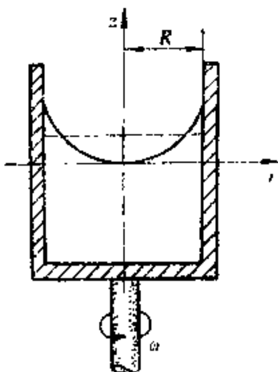


图8-16 旋转容器中液体

第七节 伯努里积分

欧拉运动方程是求解理想流体运动的基本方程，但由于它是一个非线性偏微分方程组，数学上尚无一般的求解法，只是在某些特殊情况下才能对它积分。在这能积分的少数情形中，包含了两种无论在理论上还是在实际上都具有重要意义的情形——伯努里积分与拉格朗日积分的情形。在这一节，先介绍伯努里积分；后一积分留到下一节讨论。

一、绝对运动伯努里积分

相对于空间固定坐标系的流体运动，叫做绝对运动。理想、正压流体在有势力作用下的定常（绝对）流动，沿流线可以求取欧拉运动方程的积分。

因流体理想，故其运动参数受欧拉运动方程式(8-16)制约。将式(8-16)左边展开后得：

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=f_X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=f_Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \quad (a)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=f_Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

首先由于定常流动，故式(a)中对时间的偏导数项消失了。然后沿流场中某流线取一弧元$\mathrm{d}\boldsymbol{s}=(\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}z)$，以其三个分量分别乘式(a)相应的项得：

$$\left.\begin{aligned}
&v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\mathrm{d}x+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\mathrm{d}x=f_X\mathrm{d}x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\\
&v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}\mathrm{d}y+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}y+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\mathrm{d}y=f_Y\mathrm{d}y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y\\
&v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}\mathrm{d}z+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}\mathrm{d}z+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\mathrm{d}z=f_Z\mathrm{d}z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(b)}$$

沿流线存在关系

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x}=\frac{\mathrm{d}y}{v_y}=\frac{\mathrm{d}z}{v_z}$$

把式(b)中第一方程的$v_y\mathrm{d}x$、$v_z\mathrm{d}x$代入$v_x\mathrm{d}y$、$v_x\mathrm{d}z$中，则

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x+v_x\frac{\partial v_x}{\partial y}\mathrm{d}y+v_x\frac{\partial v_x}{\partial z}\mathrm{d}z=f_X\mathrm{d}x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x$$

或把v_x提出来

$$v_x\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v_x}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial v_x}{\partial z}\mathrm{d}z\right)=f_X\mathrm{d}x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x$$

上式括弧内为v_x的全微分，改写上式得下列第一式，并类似可得下列二、三两式：

$$\left.\begin{aligned}
&v_x\mathrm{d}v_x=f_X\mathrm{d}x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\\
&v_y\mathrm{d}v_y=f_Y\mathrm{d}y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y\\
&v_z\mathrm{d}v_z=f_Z\mathrm{d}z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(c)}$$

把式(c)中三式相加得：

$$v_x\mathrm{d}v_x+v_y\mathrm{d}v_y+v_z\mathrm{d}v_z=(f_X\mathrm{d}x+f_Y\mathrm{d}y+f_Z\mathrm{d}z)-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z\right)$$

或

$$\mathrm{d}\left(\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{2}\right)=(f_X\mathrm{d}x+f_Y\mathrm{d}y+f_Z\mathrm{d}z)-\frac{1}{\rho}\mathrm{d}p\qquad\text{(d)}$$

设质量力有势，其势函数为$U(x,y,z)$则

$$f_X=\frac{\partial U}{\partial x}\qquad f_Y=\frac{\partial U}{\partial y}\qquad f_Z=\frac{\partial U}{\partial z}\qquad\text{(e)}$$

如重力的势$U=-gz$；离心力的势$U=\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)$等。把式(e)代入式(d)得：

$$\mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}\right)=\mathrm{d}U-\frac{\mathrm{d}p}{\rho}\qquad\text{(f)}$$

又因流体为正压，即流体密度只是压力的函数，$\rho=\rho(p)$，这时可引进压力函数$\Pi(p)$：

$$\Pi(p)=\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}$$

从而

$$\mathrm{d}\Pi=\frac{\mathrm{d}p}{\rho} \tag{g}$$

对不可压缩流体$\Pi=\frac{p}{\rho}$；等温($T=T_0$)流动中的可压缩流体 $\rho=\frac{p}{RT_0}$，则 $\Pi=RT_0\ln p$；绝热流动中的可压缩流体由于 $\rho=cp^{\frac{1}{k}}$，则$\Pi=\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}$。把式($g$)代入式($f$)并移项后得：

$$\mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}-U+\Pi\right)=0$$

沿流线积分后得：

$$\frac{v^2}{2}-U+\Pi=c(\Psi) \tag{8-18}$$

上式就是伯努里积分，常数$c(\Psi)$沿同一流线不变，但沿不同流线其值一般不一样。

当质量力为重力时$U=-gz$，并假定流体不可压缩$\Pi=\frac{p}{\rho}$，则式(8-18)成为：

$$\frac{v^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}=c(\Psi)$$

或除以g并整理后得：

$$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}=c'(\Psi) \tag{8-18$'$}$$

这就是沿流线的伯努里方程。此式说明，沿同一条流线各点单位重力流体的位能、压能和动能之总和保持不变（参第三章第五节）。

二、相对运动伯努里积分

设有流体在一旋转系统内流动，取与系统一起旋转的坐标系，则流体相对于此坐标系的运动叫做相对运动。对理想、正压流体在有势力作用下的相对定常流动，沿相对流线也可以求欧拉运动方程的积分。

把旋转轴取作z轴，则理想流体相对运动参数应满足相对运动欧拉方程式(8-17)′。为简便计，省去原方程中各量的“，”则式(8-17)′可列出如下方程式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w_x}{\mathrm{d}t}&=f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\omega^2x+2\omega w_y\\ \frac{\mathrm{d}w_y}{\mathrm{d}t}&=f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\omega^2y-2\omega w_x\\ \frac{\mathrm{d}w_z}{\mathrm{d}t}&=f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

完全与求绝对运动伯努里积分的作法类似，把加速项展开，去掉对时间的导数各项。然后，用沿某相对流线所取弧元的三个坐标分量分别乘方程组各相应的项得：

$$\left.\begin{aligned}
&w_x\frac{\mathrm{d}w_x}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+w_y\frac{\mathrm{d}w_x}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}x+w_z\frac{\mathrm{d}w_x}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}x=f_X\mathrm{d}x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\omega^2x\mathrm{d}x+2\omega w_y\mathrm{d}x\\
&w_x\frac{\mathrm{d}w_y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}y+w_y\frac{\mathrm{d}w_y}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+w_z\frac{\mathrm{d}w_y}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}y=f_Y\mathrm{d}y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\omega^2y\mathrm{d}y-2\omega w_x\mathrm{d}y\\
&w_x\frac{\mathrm{d}w_z}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}z+w_y\frac{\mathrm{d}w_z}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}z+w_z\frac{\mathrm{d}w_z}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z=f_Z\mathrm{d}z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z
\end{aligned}\right\}\quad\text{(b)}$$

注意沿相对流线存在关系

$$\frac{\mathrm{d}x}{w_x}=\frac{\mathrm{d}y}{w_y}=\frac{\mathrm{d}z}{w_z}$$

并把式(b)中第一式内$w_y\mathrm{d}x$与$w_z\mathrm{d}x$分别代入$w_x\mathrm{d}y$与$w_x\mathrm{d}z$中，则

$$w_x\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial w_x}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial w_x}{\partial z}\mathrm{d}z\right)=f_X\mathrm{d}x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\omega^2x\mathrm{d}x+2\omega w_y\mathrm{d}y$$

上式改写可得下列第一式，并同理得第二、三两式：

$$\left.\begin{aligned}
&w_x\mathrm{d}w_x=f_X\mathrm{d}x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\omega^2x\mathrm{d}x+2\omega w_y\mathrm{d}y\\
&w_y\mathrm{d}w_y=f_Y\mathrm{d}y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\omega^2y\mathrm{d}y-2\omega w_x\mathrm{d}y\\
&w_z\mathrm{d}w_z=f_Z\mathrm{d}z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z
\end{aligned}\right\}\quad\text{(c)}$$

三式相加合并后得：

$$\mathrm{d}\left(\frac{w^2}{2}\right)=(f_X\mathrm{d}x+f_Y\mathrm{d}y+f_Z\mathrm{d}z)-\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\omega^2(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)\quad\text{(d)}$$

由于质量力(f_X，f_Y，f_Z)有势，设其势函数为$U(x, y, z)$则

$$f_X\mathrm{d}x+f_Y\mathrm{d}y+f_Z\mathrm{d}z=\mathrm{d}U\quad\text{(e)}$$

把式(e)代回式(d)得：

$$\mathrm{d}\left(\frac{w^2}{2}\right)=\mathrm{d}U-\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\omega^2\mathrm{d}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)\quad\text{(f)}$$

又因流体为正压，则存在压力函数$\Pi(x, y, z)$：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=\mathrm{d}\Pi\quad\text{(g)}$$

把式(g)代入式(f)，移项并引入旋转半径$r=\sqrt{x^2+y^2}$后得

$$\mathrm{d}\left(\frac{w^2}{2}-U+\Pi-\frac{\omega^2}{2}r^2\right)=0$$

注意$r\omega$为旋转牵连速度，记为u。把上式沿相对流线积分得：

$$\frac{w^2}{2}-U+\Pi-\frac{u^2}{2}=c(\Psi)\quad\text{(8-19)}$$

式(8-19)即为相对运动伯努里积分。常数$c(\Psi)$沿同一根相对流线不变，但沿不同流线其值不等。

设外质量力为重力时，则$U=-gz$；并流体为不可压缩时，则$\Pi=\frac{p}{\rho}$，代进式(8-19)得相对运动伯努里方程如下：

$$\frac{w^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}=c(\Psi)$$

双边除以 g 并整理后得：

$$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{w^2}{2g}-\frac{u^2}{2g}=c'(\Psi) \tag{8-20}$$

这就是理想流体相对运动、沿流线的伯努里方程，它是分析水力机械叶轮中流动的重要工具。如沿流线上、下游取点1、2则可写出式(8-20)的等价式：

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{w_1^2}{2g}+\frac{u_2^2-u_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{w_2^2}{2g} \tag{8-20$'$}$$

在水泵叶轮中，由于$r_2>r_1$则$u_2>u_1$，从而$\frac{u_2^2-u_1^2}{2g}>0$，所以泵叶轮出口液体的能量大于进口液体能量；在水轮机叶轮中则由于$r_2<r_1$，所以叶轮进口液体能量大于出口液体能量。

第八节 拉格朗日积分

一、拉格朗日积分

如果把伯努里积分条件中的定常流动改成无旋流动而其它条件不变，则可以得到欧拉运动方程沿流场中任意曲线（不一定非要流线）的一个积分。

首先流体是理想的，则其运动要受欧拉运动方程的支配。为便于讨论，现引用此方程的兰姆—格罗米柯形式 (8-16)'''

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)-2(v_y w_z-v_z w_y)=f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\
\frac{\partial v_y}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}\right)-2(v_z w_x-v_x w_z)=f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\
\frac{\partial v_z}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2}\right)-2(v_x w_y-v_y w_x)=f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

根据无旋条件$\omega_x=\omega_y=\omega_z=0$，并且存在速度势函数$\varphi(x,y,z,t)$；$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$，$v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$，$v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}$代入式(a)中得：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)=f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}\right)=f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2}\right)=f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

在某一确定瞬时t，沿流场中任一曲线取一微弧 $ds=(dx, dy, dz)$，以其三个坐标分量dx、dy、dz分别乘式(b)中相应的式：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)\mathrm{d}x=f_X\mathrm{d}x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\mathrm{d}y+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}\right)\mathrm{d}y=f_Y\mathrm{d}y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\mathrm{d}z+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2}\right)\mathrm{d}z=f_Z\mathrm{d}z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z
\end{aligned}\right\}\tag{c}$$

把式(c)中三式相加合并为一式，因为是在确定瞬时讨论问题，故 t 为参变量，而 x，y，z 是自变量，合并式中各项可分别写成沿弧ds的微分（增量）的形式

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)+\mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}\right)=\mathrm{d}U-\mathrm{d}\Pi\tag{d}$$

$\mathrm{d}U$ 与 $\mathrm{d}\Pi$ 分别为力势函数及压力函数的空间微分。式(d)可改写成为：

$$\mathrm{d}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+\Pi-U\right]=0$$

积分出来可得：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-U+\Pi+\frac{v^2}{2}=c(t)\tag{8-21}$$

这式就称为拉格朗日积分。常数 $c(t)$ 是时间 t 的函数（由边界条件确定），但每一确定瞬时这是个对全流场都一样的常数。

对重力作用下的不可压缩流体：$U=-gz$，$\Pi=\dfrac{p}{\rho}$ 代入式(8-21)得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+gz+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=c(t)$$

或全式除以 g 并整理后得：

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}+z+\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}=c'(t)\tag{8-21)'$$

上式叫拉格朗日方程，适用于理想，不可压缩重力流体的无旋流动。

二、拉格朗日—伯努里积分

如果得到拉格朗日积分的条件中，再加上流动定常这一条，则式(8-21)中 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=0$，并且 $c(t)$ 也将成为与时间无关的常数，那么式(8-21)变成：

$$\frac{v^2}{2}-U+\Pi=c\tag{8-22}$$

式中常数 c 在流场内各点和各个时刻均取同一值，式(8-22)叫做拉格朗日—伯努里积分。此积分与伯努里积分式（8-18）形式相同，但它们的常数不同。式（8-18）常数 $c(\Psi)$ 只在同一根流线上取相同的值，不同流线上可以取不同值；而式（8-22）中常数 c 则在全流场均取同值。另外，两个积分成立的条件有所不同：前者条件为理想、正压流体、在有势力作用下的定常流动、沿流线成立；后者成立的条件是理想、正压流体、在有势力作用下的定常且无旋的流动。

如果质量力仅为重力，并且流体为不可压缩时，式（8-22)中，$U=-gz$、$\Pi=\dfrac{p}{\rho}$，那么得到

$$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}=c' \qquad (8\text{-}22)'$$

式 (8-22)′ 通常也叫做伯努里方程。如果说有旋流动的伯努里方程式 (8-18)′ 的物理意义是：沿同一条流线各点单位重量流体的位能、压能与动能的总和保持不变的话；则无旋流动的伯努里方程式 (8-22)′表示的是：非但沿同一条流线上各点，而且在整个流场中所有各点的总机械能都保持不变。

习 题 八

8-1 试确定下列各二元流场中的速度是否满足不可压缩流体的连续性条件：

（1） $v_x=Kx$, $v_y=-Ky$;

（2） $v_x=K(x^2+xy-y^2)$, $v_y=-K(x^2+y^2)$;

（3） $v_x=K\sin(xy)$, $v_y=-K\sin(xy)$;

（4） $v_x=K\ln(xy)$, $v_y=-Ky/x$。

（是、否、否、是）

8-2 设空间不可压缩流体的两分速为：

（1） $v_x=ax^2+by^2+cz^2$; $v_y=-dxy-eyz-fzx$;

（2） $v_x=\ln\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)$; $v_y=\sin\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)$

（3） $v_x=x^2+y^2+x+y+z$; $v_y=y^2+2yz$

且 $v_z(x, y, 0)=0$

其中 a、b、c、d、e、f 等为常数，试求第三个分速 v_z。

(1) $v_z=\frac{e}{2}z^2+xz(d-2a)+g_1$; g_1 为 x, y 的函数，(2) $v_z=g_2$; g_2 为 x、y 的函数；(3) $v_z=-z[2(x+y)+z+1]$)

8-3 流体微团的运动由哪几部分组成？与刚体的运动有何不同？

8-4 求下述流动中流体微团的旋转角速度 ω，已知

$$v=-By\mathbf{i}+Bx\mathbf{j}+\sqrt{C-2B^2(x^2+y^2)}\,\mathbf{k}$$

（B，C 为常数）

8-5 已知平面不可压缩流体的速度分布为：(1) $v_x=y$, $v_y=-x$; (2) $v_x=x-y$, $v_y=x+y$, (3) $v_x=x^2-y^2+x$, $v_y=-(2xy+y)$。试验证是否可以形成流动，有旋与否，并求速度势。

8-6 下述流动是否有势？如有势求出势函数。

(1) $v_x=1$, $v_y=-1$; (2) $v_x=x$; $v_y=-y$; (3) $v_x=-\frac{x}{y^2}$, $v_y=-\frac{1}{y}$; (4) $v_x=-2y$, $v_y=-2x$

8-7 设 $\varphi=xyz$，求点(1, 2, 1) 处的速度，加速度和流线方程。又 $\varphi=xyzt$ 时情况如何？

8-8 试比较并说明伯努里积分和拉格朗日积分的不同积分条件。

8-9 已知平面势流在 x 轴上的速度投影为，$v_x=yt-x$，而且在 $x=y=0$ 处，$v_y=0$，$p=p_0$，试求 $t=0$ 时过(1, 1)点的流线，并求压力分布。（$xy=1$ 为流线方程，$p=p_0-\frac{\rho}{2}[(xt+y)^2+(yt-x)^2]$ 为压力分布）

8-10 鱼雷在5m深的水下以50节的速度运动，根据理论力学相对性原理，可以假设鱼雷不动，流体从无限远处以流速50节流过鱼雷。若流体流过雷身表面时最大速度为无限远处的 1.15 倍，求雷身表面的最小压力为多少？又如水的温度为15℃时，产生空泡的绝对压力为 2380Pa。求雷身开始出现空泡时的速度（设自由面为，0.1MPa，1节=1.85km/h)。

（$v=30.81$m/s）

第九章　旋涡运动的理论基础

在运动流体中，若流体微团的旋转角速度不等于零，或运动流体的涡量不等于零，则流体的这种运动称为旋涡运动或有旋运动。如流体在管道中，流过突然扩大、弯头等局部装置、或流体绕过叶轮、飞机、船只，桥墩等物体后，均会出现明显可见的旋涡运动区。更有一些眼睛观察不出的旋涡运动，如在剪切流中每一点都存在旋涡。至于自然界大量存在的紊流就更充满了大大小小的旋涡。

当叶轮、飞机和船只等在流体中运动时，其尾部产生旋涡所消耗的这部分能量是要由运动物体来付出的，从而形成物体运动的附加阻力。另外，在大型水坝建筑物中，经常人为地制造旋涡运动以消耗水流动能，从而避免坝基被水冲坏。由此可见，研究旋涡运动是具有明显的工程实际意义的。

研究旋涡运动也具有重要的理论意义，它可以为我们提供判断流动是有旋还是无旋的根据。这一点在理论上非常重要，若运动无旋则流动的数学处理可以得到重大简化。另外，旋涡理论也将为机翼与叶栅绕流的研究，打下必要的理论基础。

本章将研究旋涡的运动学性质与动力学性质，包括旋涡的特性、涡管的特性、已知强度旋涡周围的诱导速度，以及旋涡的发生、变化和消失的规律等。

第一节　旋涡的守恒性

旋涡的强弱用涡量$\Omega=(\Omega_x,\Omega_y,\Omega_z)$来表示，它在直角坐标系内可表示为

$$\Omega_x=\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z},\quad \Omega_y=\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x},\quad \Omega_z=\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

从而

$$\frac{\partial\Omega_x}{\partial x}=\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v_y}{\partial z\partial x}\quad \frac{\partial\Omega_y}{\partial y}=\frac{\partial^2 v_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial y}\quad \frac{\partial\Omega_z}{\partial z}=\frac{\partial^2 v_y}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 v_x}{\partial y\partial z}$$

把上述结果加起来，我们发现

$$\frac{\partial\Omega_x}{\partial x}+\frac{\partial\Omega_y}{\partial y}+\frac{\partial\Omega_z}{\partial z}=0 \tag{9-1}$$

这个结果说明涡量场在一个点的三个分量并不独立。如令$\Omega_x=x$、$\Omega_y=y$、$\Omega_z=z$，则由于它们不满足式(9-1)，所以不能成为一个涡量场。式(9-1)使我们想起了不可压缩流体连续性方程(8-3b)′，它说明流场速度向量在一点的三个分量也是不独立的。涡量场与速度场在一点的三个分量满足相同的微分方程。

不仅在直角坐标系内，在任何其它坐标系内，涡量的三个坐标分量都满足相应的、不可压缩流体的连续性方程。上述结果，可以用向量表示成：

$$\nabla\cdot\Omega=0 \tag{9-1}$$

亦即，涡量的散度恒等于零。考虑沿空间任意体积的积分

$$\iiint_V \nabla \cdot \Omega \mathrm{d}V = 0$$

根据高斯积分公式，上积分可改成沿包围体积V的封闭曲面A的面积分

$$\iint_A \boldsymbol{n} \cdot \Omega \mathrm{d}A = 0 \tag{9-1)''}$$

$\boldsymbol{n}$为面元$\mathrm{d}A$的单位外法线矢量，$\boldsymbol{n}\cdot\Omega$为涡量$\Omega$在面元外法线方向的分量，$\boldsymbol{n}\cdot\Omega\mathrm{d}A$为穿过面元$\mathrm{d}A$出来的涡通量。所以式(9-1)″说明，对任一流体体积，穿过其表面出来的涡通量的代数和等于零；或说，穿过某流体体积表面，进去多少涡通量必定出来多少。

式(9-1)、式(9-1)′与式(9-1)″是等价的。由它们所表示的旋涡的这一运动学性质，常被叫作旋涡的守恒性(这个性质在第八章第四节已提到过，这里不过做进一步说明而已)。

第二节　亥姆霍茨（第一）定理

我们在第八章的第四节曾在涡量场中引进过涡管，这是一个类似于速度场中的流管的概念；并且旋涡矢量与不可压缩流场的速度矢量还满足相同的方程。对不可压缩流动之流管，穿过其任一截面A的体积流量q_V不变、等于一个常数

$$q_V = \iint_A \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}A$$

式中$\boldsymbol{n}$为面元$\mathrm{d}A$的单位法线矢量。可以猜想，对涡管应存在类似性质：穿过涡管任一截面A的涡通量I

$$I = \iint_A \boldsymbol{n} \cdot \Omega \mathrm{d}A \tag{9-2}$$

也应该不变、等于一个常数。

下面来证明上述猜想是正确的。为此，考虑于某瞬时在涡量场中由任意二横截面A_1、A_2和位于其间的涡管侧面A_3所组成的空间封闭曲面A(图9-1)，计算穿过A出来的涡通量，由式(9-1)″

$$\iint_A \boldsymbol{n} \cdot \Omega dA = 0$$



图9-1　涡管的涡通量

亦即

$$\iint_{A_1} \boldsymbol{n} \cdot \Omega \mathrm{d}A + \iint_{A_2} \boldsymbol{n} \cdot \Omega \mathrm{d}A + \iint_{A_3} \boldsymbol{n} \cdot \Omega \mathrm{d}A = 0$$

由于在涡管侧表面上$\boldsymbol{n}\cdot\Omega$处处等于零，所以上等式中第三个积分消失了，于是

$$\iint_{A_2} \boldsymbol{n} \cdot \Omega \mathrm{d}A = -\iint_{A_1} \boldsymbol{n} \cdot \Omega \mathrm{d}A$$

上式左积分号下$\boldsymbol{n}$是顺涡管方向的，而右积分中$\boldsymbol{n}$为逆涡管方向故前面带一负号。这个结果说明，穿过涡管截面A_1、A_2的涡通量I_1与I_2相等。由于A_1、A_2是沿涡管任意取的二截面，故可得结论：**在某瞬时沿同一涡管各截面的涡通量，等于同一数值，并称此值为该涡管的强度。**上面这个论断叫作亥姆霍茨有关涡管的第一定理。

由上述定理可知，沿涡管其强度为一常数，即

$$I=2\omega An=\text{const}$$

式中 An——与ω垂直的涡管截面积；

ω——沿截面的平均角速度值。

上式表明，在较小截面处流体旋转角速度大；反之，在较大截面处则流体旋转角速度就小。

另外，由上定理还可以得出，涡管不可能在流体内产生或消失的推论。如果涡管截面渐趋于零而中断或起头在流体内，由上定理这时旋转角速度必将趋向无穷大，这在物理上是不可能的。要是涡管以有限截面突然终止或兴起在流体内，则做一封闭曲面，把管头或管尾包围在其中，此时进入封闭曲面的涡量不等于出去的涡量，这也是不可能的。这就证明了，涡管既不能在流体内部产生，也不能在流体内部中断。

由于涡管既不能产生也不能中断在流体内，所以它只能自行封闭成环，或把其首尾搭在固壁与自由界面上，或延伸至无限远（参示意图9-2）。

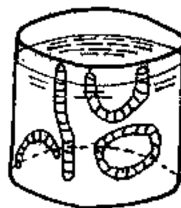


图9-2 涡管存在的形式

最后应该指出的是，上述关于旋涡与涡管的讨论未涉及力与流体性质，所以得出之结果，既适用于不可压缩流体也适用于可压缩流体，并且既适用于理想流体也适用于粘性流体。特别是在可压缩流体内的涡量Ω仍然适合方程（9-1）′，但速度v却已不再适合 $\nabla\cdot v=0$这同一方程了。

第三节 斯托克司定理

在上一章第四节引入了涡通量与速度环量概念，并用数学上的斯托克司公式把两者联系了起来，得到方程式(8-11)。此式用文字叙述出来则成为运动流体的斯托克司定理：沿流场中任一封闭周线的速度环量，就等于穿过张于此周线上的任一曲面的涡通量。本节将从流体运动的角度导出式（8-11），并从而也就证明了上述定理。

一、三角元的斯托克司定理

设有平面流动，在流动平面上任取一小三角形面元ABC（图9-3），将它取的足够小，以致可以认为整个面元的瞬时旋转运动，是绕其上一点O以同一瞬时角速度ω进行的。现计算沿三角元周界的速度环量$\Delta\Gamma_{ABCA}$：

$$\Delta\Gamma_{ABCA}=\Delta\Gamma_{AB}+\Delta\Gamma_{BC}+\Delta\Gamma_{CA}$$

显然平动与变形不会产生环量，故上式中

$$\Delta\Gamma_{AB}=v_M\cos\alpha l_{AB}=\omega l_{OM}\cos\alpha l_{AB}$$
$$=\omega l_{OD}l_{AB}=2\omega A_{OAB}$$
$$=\Omega A_{OAB}$$

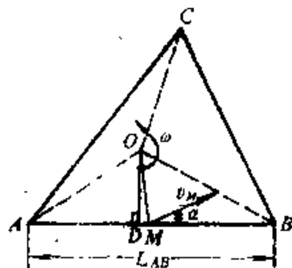


图9-3 三角元的速度环量

式中$\Omega=2\omega$代表涡量，A_{OAB}代表三角形OAB面积，因此得沿AB边环量的下列第一式并同理可得二、三两式

$$\begin{aligned}\Delta\Gamma_{AB}&=\Omega A_{OAB}\\ \Delta\Gamma_{BC}&=\Omega A_{OBC}\\ \Delta\Gamma_{CA}&=\Omega A_{OCA}\end{aligned}\tag{a}$$

迭加(a)中三式可得沿三角元周界的环量

$$\Delta\Gamma_{ABCA}=\Delta\Gamma_{AB}+\Delta\Gamma_{BC}+\Delta\Gamma_{CA}$$
$$=\Omega(A_{OAB}+A_{OBC}+A_{OCA})$$
$$=\Omega A_{ABC} \tag{b}$$

在空间流动的一般情况下，对任意小三角元，同样推导可得类似式(b)结果：

$$\Delta\Gamma_{ABCA}=\Omega_n A_{ABC} \tag{c}$$

式(c)中Ω_n为涡量Ω在三角元法线方向的投影。上式关于三角元的斯托克司定理，可叙述如次：沿任意三角元周界之速度环量，就等于穿过三角元面积的涡通量。

二、空间一般情况下的斯托克司定理

设C为流场中任一封闭曲线，A为张于其上的任意曲面。用分割法把A分成许多（如N个）小三角元（图 9-4），这些三角元要如此之小，以至每个面元皆可视为一平面三角形，且流动参数可作均匀分布处理。则对上述每个三角元可应用式(c)，如对编号为i的三角元有

$$\Delta\Gamma_i=\Omega_{in}\Delta A_i \tag{d}$$

为得到沿封闭曲线C的速度环量，沿A面迭加式(d)

$$\sum_{i=1}^{N}\Delta\Gamma_i=\sum_{i=1}^{N}\Omega_{in}\Delta A_i \tag{e}$$

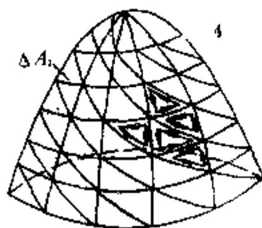


图9-4　沿封闭曲线的速度环量

因为沿三角元相邻公共边界的环量沿正、反两个方向各取了一次，故互相抵消了，最后只剩下沿周界C的环量之和Γ_C'，则式(e)可改写为

$$\Gamma_C'=\sum_{i=1}^{N}\Omega_{in}\Delta A_i \tag{f}$$

令$N\to\infty$对式(f)取极限：Γ_C'趋向沿封闭曲线C的速度环量$\Gamma_C=\oint_C v_l\mathrm{d}l$；而$\sum\limits_{i=1}^{N}\Omega_{in}\Delta A_i$则趋向穿过曲面$A$的涡通量$I_A=\iint\limits_A\Omega_n\mathrm{d}A$，所以式($f$)在$N\to\infty$的极限情况可写成

$$\oint_C v_l\mathrm{d}l=\iint_A\Omega_n\mathrm{d}A \tag{9-3}$$

或其向量形式及直角坐标形式分别如下：

$$\oint_C \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint\limits_A\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{9-3$'$}$$

$$\oint_C v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y+v_z\mathrm{d}z=\iint\limits_A\Big[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\cos(\boldsymbol{n},x)+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\cos(\boldsymbol{n}\cdot y)$$
$$+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\cos(\boldsymbol{n}\cdot z)\Big]\mathrm{d}A \tag{9-3$''$}$$

以上就是斯托克司定理的数学表达式。

有了斯托克司定理，我们就可以利用速度环量来研究旋涡运动、计算旋涡强度了。这有很多方便之处：因为速度环量为线积分，被积函数就是速度本身；而涡通量则是面积分，被积函数又是速度的偏导数。所以不论从实验还是从理论角度环量均比涡通量简便些。特别在有些情况下，只能利用环量来表示旋涡强度。

〔例9-1〕　利用斯托克司定理，来找出旋涡分量在圆柱坐标系内的表示式。

〔解〕　在垂直于z轴的平面上取一无限小面元$ABCD$如图 9-5 所示。A点坐标（r、θ、

z)，面元尺寸如图上所标，面元法线方向与z轴方向重合。

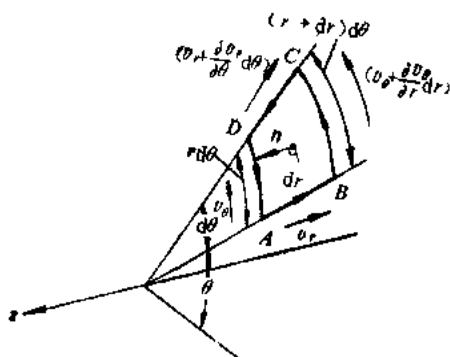


图9-5 旋涡的柱坐标表示式

面元的面积为$rd\theta dr$、涡量在面元法线方向投影$\Omega_n=\Omega_z$，面元无限小，可认为涡量在面元上分布均匀。那么穿过面元的涡通量为

$$dI=\Omega_z r d\theta dr$$

沿面元周界的环量

$$d\Gamma=d\Gamma_{AB}+d\Gamma_{BC}+d\Gamma_{CD}+d\Gamma_{DA}$$

$$=v_r dr+\left(v_\theta+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}dr\right)(r+dr)d\theta-\left(v_r+\frac{\partial v_r}{\partial \theta}d\theta\right)dr-v_\theta r d\theta$$

$$=v_\theta dr d\theta+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}r dr d\theta-\frac{\partial v_r}{\partial \theta}dr d\theta+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}dr^2 d\theta$$

舍去三阶小量则

$$d\Gamma=\left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)-\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]dr d\theta$$

根据斯托克司定理

$$\Omega_z r dr d\theta=\left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)-\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]dr d\theta$$

消去公因子并整理后得下列第一式，类似可得二、三两式：

$$\Omega_z=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)-\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\Omega_\theta=\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial r}$$

$$\Omega_r=\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}-\frac{\partial v_\theta}{\partial z}$$

即为旋涡矢量在圆柱坐标系内的表达式。

第四节 理想流体中旋涡的诱导速度

在流体运动中，在某些流动区域内常常会出现旋涡（如大气流动中的旋风、圆柱绕流中柱后之涡对、有限翼展机翼绕流中从机翼两梢向后延伸去的自由涡等）。这些旋涡（由于粘性作用）诱导产生的速度场，迭加在原来的速度场上面，将使原来的流动状态发生改变，形成新的流场。另外，在某些绕流问题中，被绕流物体（如机翼、叶栅等）对来流的扰动，常常可用一涡束、涡列或涡层来代替，而整个绕流流场是来流流场与诱导流场的合成流场。为了确定上述两类流动的流场，首先都必须解决旋涡诱导速度场的计算问题。当流体中出现旋涡时，由于粘性作用旋涡会带动周围流体产生运动，并从开始速度由小逐渐增大，最后将达到稳定的运动速度。稳定之后，粘性作用较小，可以略去，而把流体当成理想流体处理。这一节要讨论的正是这一情况。

根据上述，可以这样提出问题：设在不可压缩、理想流体某区域内存在按一定规律分布

的旋涡，要求确定旋涡的诱导流场。或用数学语言：在空间某有限体积τ内给定了矢量函数$\boldsymbol{v}$的旋度场Ω，但无散度场；τ外则既无散度场，也无旋度场，要求确定矢性函数$\boldsymbol{v}$。写成方程

$$\left.\begin{aligned}&\tau\text{内：}\ \nabla\times\boldsymbol{v}=\Omega,\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0\\&\tau\text{外：}\ \nabla\times\boldsymbol{n}=0,\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0\end{aligned}\right\}\tag{9-4}$$

由于$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$，推出$\boldsymbol{v}$应具有下列形式

$$\boldsymbol{v}=\nabla\times\boldsymbol{A}\tag{a}$$

$\boldsymbol{A}$为任一矢量函数。把式(c)代入式(9-4)则

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\Delta=\Omega\tag{b}$$

式中"Δ"为拉勃拉斯算子，因此只要求出满足（b）式之$\boldsymbol{A}$，代入式(a)即得方程组(9-4)之解$\boldsymbol{v}$。而对方程(b)我们只求取其$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$时的特殊解即可，也就是只要求下列方程之解

$$\Delta\boldsymbol{A}=-\Omega\tag{c}$$

这是因为如果$\boldsymbol{A}$是(c)之解，也就是$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$时方程(b)之特解，则应有$\boldsymbol{v}=\nabla\times\boldsymbol{A}$；若$\boldsymbol{A}_1$为$\nabla\times\boldsymbol{A}_1\neq0$时，方程(b)之一般解，那末总可写成$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，则$\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\times\boldsymbol{B}$，由于$\nabla\times\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{v}$，所以$\nabla\times\mathbf{B}=0$，这要求$\mathbf{B}=\nabla C$($C$为任意标量函数)。因此$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}+\nabla C$，即$\boldsymbol{A}_1$与$\boldsymbol{A}$充其量相差一个$\nabla C$形的任意矢量函数，而它们的旋度$\nabla\times\boldsymbol{A}$与$\nabla\times\boldsymbol{A}_1$代表同一流场，正象势流中$\varphi$与$\varphi+c$代表同一流场一样。因而只要能求到方程(c)的解$\boldsymbol{A}$，我们的问题就解决了。而($c$)相当于三个泊松方程，其解由数理方程为

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iiint_{\tau}\frac{\Omega(\xi\cdot\eta\cdot\zeta)}{r}\,d\tau\tag{9-5}$$

式中，$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$ 为具有涡量的体积τ内的一点（ξ，η，ζ）到待求诱导速度的τ外的一点（x，y，z）之间的距离，式（9-5）确定之$\boldsymbol{A}(x,\ y,\ z)$即为完全符合条件式（9-4）的解函数。应注意的是：ξ，η，ζ为区域τ内随涡点不同而变动的空间变量；而x，y，z为区域τ外随待求速度点不同而变化的空间变量，它们是互相独立的变量

对空间中任意弯曲的微小涡束之诱导速度场，我们应用式（9-5）可导出速度计算公式。微小涡束之强度$I=\Omega A_n$(A_n为与涡束垂直的截面积)，由斯托克司定理也就等于沿截面周线的速度环量Γ。涡束对它周围一点$M(x,\ y,\ z)$的诱导速度(参图9-6)，把式(9-5)中$\Omega d\tau=\Omega A_n dl=\Gamma dl$代进积分中，再求旋度后则得

$$\boldsymbol{v}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\times\left[\frac{1}{4\pi}\iiint_{\tau}\frac{\Omega(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\tau\right]=\frac{\Gamma}{4\pi}\nabla\times\int_L\frac{dl}{r}$$

$$=\frac{\Gamma}{4\pi}\int_L\nabla\times\left(\frac{dl}{r}\right)=\frac{\Gamma}{4\pi}\int_L\left[\frac{\nabla\times dl}{r}+\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\times dl\right]$$

上式"∇"为对x，y，z的微分算子，而dl为ξ，η，ζ的函数，故$\frac{\nabla\times dl}{r}=0$；并注意$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\times dl=-\frac{\mathbf{r}\times dl}{r^3}$，所以诱导速度公式成为：

$$v=-\frac{\Gamma}{4\pi}\int_L\frac{\mathbf{r}\times dl}{r^3}\tag{9-6}$$

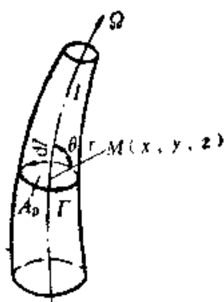


图9-6　微小涡束的诱导速度

式中dl方向即为该处Ω的方向。还可写出

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}=-\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\mathbf{r}\times\mathrm{d}\mathbf{l}}{r^3} \qquad (9\text{-}6)'$$

或

$$v=\frac{\Gamma}{4\pi}\int_L\frac{\sin\theta}{r^2}\mathrm{d}l \qquad (9\text{-}6)''$$

还可写出

$$\mathrm{d}v=\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\sin\theta\mathrm{d}l}{r^2} \qquad (9\text{-}6)'''$$

式中θ为矢量r与dl的夹角。上式说明，微元涡束段$\mathrm{d}l$所诱导的速度$\mathrm{d}v$大小与距离r平方成反比，与r及dl夹角θ之正弦和$\mathrm{d}l$成正比；方向垂直于dl与r。

式(9-6)至(9-6)‴和电学中计算电流强度为$I(\sim\Gamma)$的导线，在其周围诱生的磁场强度H($\sim\boldsymbol{v}$)的毕奥—沙伐公式完全一样，因此在流体力学中有时也用这个名称，称为诱导速度公式(9-6)至式(9-6)‴。

第五节　直线涡束与平面涡层的诱导速度

本节在毕奥—沙伐公式基础上，导出直线涡束与平面涡层的诱导流速公式。

一、直线涡束的诱导速度

设有一段直线涡束AB，强度为Γ，求距涡束为d的M点处的诱导流速（参图9-7）。

考虑涡束上微段$\mathrm{d}l$在M点的诱导流速，根据式(9-6)′

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}=-\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\mathbf{l}}{r^3}$$

如引进$-(\mathbf{r}\times\mathrm{d}\mathbf{l})$方向单位矢量t，则改写上式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{r\sin\theta\mathrm{d}l}{r^3}\boldsymbol{t}=\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\sin\theta\mathrm{d}l}{r^2}\boldsymbol{t} \qquad (a)$$

式中θ为r与dl间夹角。

整根涡束AB在M点之诱导流速，将式(a)由A至B沿涡束积分可得

$$\boldsymbol{v}=\frac{\Gamma}{4\pi}\int_A^B\frac{\sin\theta\mathrm{d}l}{r^2}\boldsymbol{t} \qquad (b)$$

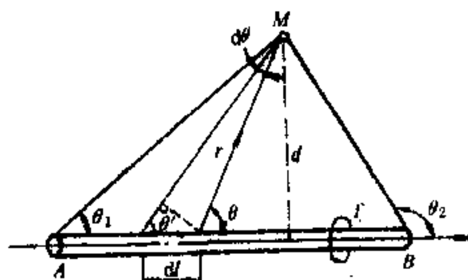


图9-7　直线涡束之诱导速度

从图9-7上几何关系可见

$$\frac{r\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}=\sin\theta'\approx\sin\theta=\frac{d}{r}$$

故近似地有

$$\mathrm{d}l=\frac{r^2\mathrm{d}\theta}{d}$$

此式在$dl\to 0$时为准确的。把此式代入式(b)

$$v=\frac{\Gamma}{4\pi}\ t\int_A^B\frac{\sin\theta}{d}d\theta=\frac{\Gamma}{4\pi d}\ t\int_{\theta_1}^{\theta_2}\ \sin\theta d\theta$$

所以
$$v=\frac{\Gamma}{4\pi d}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)t \tag{9-7}$$

式中 θ_1、θ_2——分别为涡束同两端点A、B与M点联线的夹角(图9-7)。

若涡束为无限长，则$\theta_1=0$、$\theta_2=\pi$，它在到涡束距离为d的圆周上各点诱导速度相等，由式(9-7)知

$$v=\frac{\Gamma}{2\pi d}t \tag{9-7)'$$

方向为沿圆周各点的切线方向。诱导流动全在与涡束垂直的平面内，且在所有平面上流动全同，涡束在平面上表现为一个点涡，因此式(9-7)′也就是点涡的速度式。如涡束为半无限长，这相当于$\theta_1=\frac{\pi}{2}$、$\theta_2=\pi$，代进式(9-7)得

$$v=\frac{\Gamma}{4\pi d}t \tag{9-7)''$$

此式说明，半无限长涡束对空间一点的诱导速度，刚好是无限长涡束诱导速度之半。

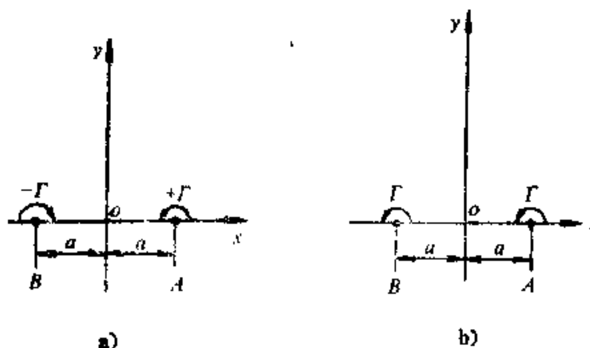


图9-8 一对旋涡之相互作用

［例9-2］ 有如图9-8a、b所示之一对点涡，试分别决定它们的运动规律。

［解］

1．情况a

点涡A与B之速度大小由毕奥—沙伐公式(9-7)′为$\frac{\Gamma}{4\pi a}$方向沿负y轴。即

$$v_x=0 \qquad v_y=-\frac{\Gamma}{4\pi a}$$

因此，A、B之运动方程为：

$$x_A=a \qquad y_A=-\frac{\Gamma}{4\pi a}t$$

$$x_B=-a \qquad y_B=-\frac{\Gamma}{4\pi a}t$$

2．情况b

A与B之速度：$v_A=v_B=\frac{\Gamma}{4\pi a}$，方向垂直于它们间联结线而互反向。形成围绕联结线中

点o的，逆时针转动，角速度为$\omega=\frac{v}{a}=\frac{\Gamma}{\pi a^2}$。

点涡A、B之运动方程，以极坐标表示

$$r_A=a \qquad \theta_A=\frac{\Gamma}{4\pi a^2}t$$

$$r_B=a \qquad \theta_B=\pi+\frac{\Gamma}{4\pi a^2}t$$

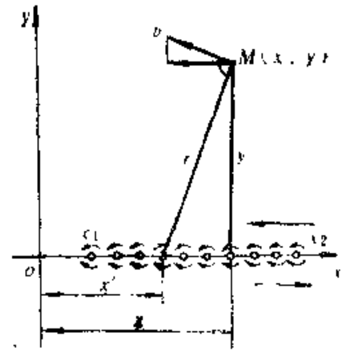


图9-9 平面涡层之诱导流速

二、平面涡层之诱导速度

设有平面涡层，涡束都在和纸面垂直的平面内(参图9-9)，取坐标系oxy使涡层落在x轴上的区间$[x_1, x_2]$上。假定涡层之外流动无旋，沿包围涡层微元宽度Δx封闭曲线之速度环量记为$\Delta\Gamma$，则把$\gamma(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta x}$叫做涡层的环量密度。

涡层外任意一点$M(x, y)$，由涡层在该点诱导的速度之x轴向分量可计算如下：x'处涡层密度$\gamma(x')$，包含x涡层元段dx'的强度为$\gamma(x')dx'$，此元段在M点处诱导速度的x轴分量

$$dv_x=\frac{-\gamma(x')dx'}{2\pi r}\cos(r, y)=-\frac{\gamma(x')dx'}{2\pi r}\sin(r, x)=-\frac{\gamma(x')dx'}{2\pi r}\frac{y}{r}$$

从而整个涡层的诱导速度x轴向分量为下列第一式，并类似可导出沿y轴向分量的下列第二式：

$$\left.\begin{aligned} v_x&=-\frac{1}{2\pi}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\gamma(x')y\,dx'}{(x-x')^2+y^2}\\ v_y&=\frac{1}{2\pi}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\gamma(x')(x-x')dx'}{(x-x')^2+y^2}\end{aligned}\right\} \tag{9-8}$$

趋近涡层表面的诱导速度，设$\gamma(x')=\text{const}$时，由式(9-8)得

$$\left.\begin{aligned} v_x&=\frac{\gamma}{2\pi}\ \text{arctg}\frac{x-x'}{y}\Big|_{x'=x_1}^{x'=x_2}\\ v_y&=\frac{-\gamma}{4\pi}\ln[(x-x')^2+y^2]\Big|_{x'=x_1}^{x'=x_2}\end{aligned}\right\} \tag{9-8$'$}$$

令$y\to\pm 0$则得涡层表面临近的速度值

$$\left.\begin{aligned} v_x&=\mp\frac{\gamma}{2}\\ v_y&=-\frac{\gamma}{4\pi}\ln\frac{(x-x_1)^2}{(x-x_2)^2}\end{aligned}\right\} \tag{9-9}$$

由式(9-9)可以看出：当穿过涡层时，切向速度将产生间断(跃变)γ，而法向速度则是连续的。

如果$\gamma=\gamma(x')$，则可划出一个包含x'的微小涡层宽度来考虑，此宽度小到其中γ可视为均匀分布，则上述讨论仍旧可进行，并可得出同样结论：涡层为切向速度的间断面。故流体

力学中如遇到沿某面有切向速度间断时，常引用密度按适当规律分布的涡层来描绘这一流动现象，并把这类流动分析的方法叫奇点分布法。

第六节 卡门涡街

把一个直径为d的无限长圆柱，放在速度大小为U的均匀来流中，使柱中心线与来流方向垂直。观察发现，当绕圆柱雷诺数$R_e=\frac{Ud}{\nu}$大约达到60左右时，在圆柱体后面开始出现两列非对称的、规则的、旋转方向相反的交替旋涡(图9-10)，叫卡门涡街。它以比束流速度U小得多的速度u，向下游移动。

虽然在$R_e=60\sim5000$的广阔雷诺数范围内都能观察到卡门涡街现象，但大多数情况下是不稳定的，即受到外界扰动涡街就破坏了。卡门的研究发现，只有当两列旋涡之间距离h与同列中相邻两旋涡间距离l之比：$\frac{h}{l}=0.2806$时，卡门涡街才是稳定的。(图9-11)为卡门涡街流谱。

卡门首先把涡系所携带的动量与圆柱所遭受的阻力联系了起来。根据动量定理对如（图9-11）的卡门涡街进行理论计算，得到作用在单位长圆柱体上的阻力为：

$$F_D=\rho U^2 h\left[2.83\frac{u}{U}-1.12\left(\frac{u}{U}\right)^2\right]$$

式中速度比$\frac{u}{U}$一般可由实验测出。

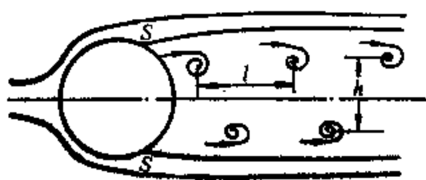


图9-10 卡门涡街形成图

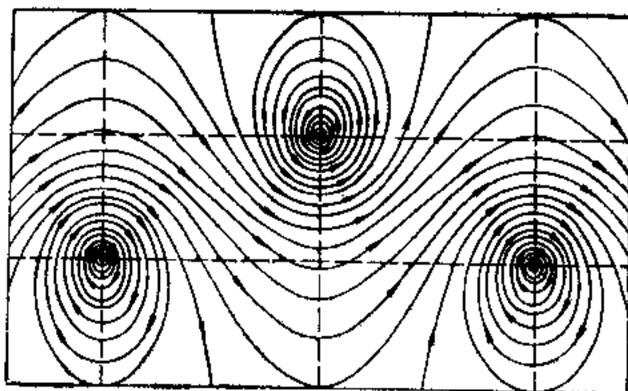


图9-11 卡门涡街流谱

圆柱体后卡门涡街中，两列旋转方向相反的旋涡是周期性地从圆柱上交替脱落下来的，有一定的脱落频率。脱落频率f与束流速度U成正比、而与圆柱直径d成反比，即

$$f=s\frac{U}{d}$$

式中 s——比例系数，叫斯特罗哈数。实验表明，它只与雷诺数有关，即$s=s(R_e)$。

图9-12为$s\sim R_e$实验曲线；

从图9-12可以看出：

1) $R_e<10^{2.5}$，s直线上升；

2) $R_e=10^{2.5}\sim10^5$，s近似地保持为常数（$s\approx0.19$）；

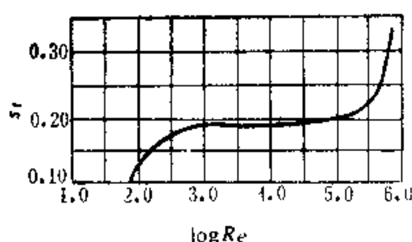


图 9-12　$s\sim R_e$ 关系曲线

3）$R_e>10^{5.5}$，s 又直线上升。

形成卡门涡街过程中，当旋涡按一定频率从被绕流柱体上交替脱落时，柱体受不对称周期变化的压力的作用，将引起柱体振动。风吹电线发出声响，就是这个原因。如果发放旋涡所引起的柱体振动频率，与柱体本身固有振动频率相同时，常常引起严重事故。如塔柯马海峡大桥，由于风吹发放旋涡频率与桥的构件振动频率一致，引起共振，致使桥身扭转振动而遭毁坏。

第七节　汤姆逊定理

前面几节讨论了旋涡的运动学性质，在本章的后面几节我们要介绍旋涡运动的动力学性质了。这些性质包括：旋涡强度及其结构的不变性；保持有旋运动与有势运动的条件；及旋涡产生、变化和消失的规律性等。下面将通过几条定理来阐明上述性质。

在流体运动中，始终由同样的流体质点所组成的线，叫做流体线。流体线随着流体质点的运动，可以在流动空间位移、变化其大小和形状，但始终由原来的那些流体质点所组成。现考虑沿封闭的流体线 l 之速度环量 Γ_l，它对时间的变化率 $\frac{d\Gamma_l}{dt}$（对空间的微分采用"δ"以与随体微分"d"相区别）为

$$\frac{d\Gamma_l}{dt}=\frac{d}{dt}\oint_l v_x\delta_x+v_y\delta_y+v_z\delta_z$$

$$=\oint_l\frac{d}{dt}(v_x\delta_x+v_y\delta_y+v_z\delta_z)\qquad\text{(a)}$$

由于随体过程中，流体速度及流体线都会变化，所以被积函数

$$\frac{d}{dt}(v_x\delta_x+v_y\delta_y+v_z\delta_z)$$

$$=\frac{dv_x}{dt}\delta_x+v_x\frac{d}{dt}(\delta_x)+\frac{dv_y}{dt}\delta_y+v_y\frac{d}{dt}(\delta_y)+$$

$$\frac{dv_z}{dt}\delta_z+v_z\frac{d}{dt}(\delta_z)$$

$$=\left(\frac{dv_x}{dt}\delta_x+\frac{dv_y}{dt}\delta_y+\frac{\delta v_z}{dt}\delta_z\right)+\left[v_x\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)\right.$$

$$\left.+v_y\delta\left(\frac{dy}{dt}\right)+v_z\delta\left(\frac{dz}{dt}\right)\right]$$

$$=\left(\frac{dv_x}{dt}\delta_x+\frac{dv_y}{dt}\delta_y+\frac{dv_z}{dt}\delta_z\right)+(v_x\delta v_x+v_y\delta v_y+v_z\delta v_z)$$

$$=\left(\frac{dv_x}{dt}\delta_x+\frac{\delta v_y}{dt}\delta_y+\frac{dv_z}{dt}\delta_z\right)+\left(\delta\frac{v_x^2}{2}+\delta\frac{v_y^2}{2}+\delta\frac{v_z^2}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\delta_x+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\delta_y+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\delta_z\right)+\delta\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

把上式代回式（a）积分号中得

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma_l}{\mathrm{d}t}=\oint_l\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\delta_x+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\delta_y+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\delta_z\right)+\oint_l\delta\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

$$=\oint_l\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\delta_x+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\delta_y+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\delta_z\right)+0 \tag{b}$$

为能进一步研究环量的变化，对流动作些限制。假设流体是理想流体，则其运动须服从欧拉方程，即

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=f_X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=f_Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=f_Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

然后把上式代入式（b），经整理得

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma_l}{\mathrm{d}t}=\oint_l(f_X\delta_x+f_Y\delta_y+f_Z\delta_z)+\oint_l\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\delta_x+\frac{\partial p}{\partial y}\delta_y+\frac{\partial p}{\partial z}\delta_z\right)$$

$$=\oint_l(f_X\delta_x+f_Y\delta_y+f_Z\delta_z)+\oint_l\frac{\delta p}{\rho} \tag{c}$$

如进而再假定质量力有势、流体正压，并且力势函数为U、压力函数为Π，则

$$\left.\begin{aligned}\delta_U&=f_X\delta_x+f_Y\delta_y+f_Z\delta_z\\ \delta_\Pi&=\frac{\delta p}{\rho}\end{aligned}\right\}$$

把此式代回式（c）中则

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma_l}{\mathrm{d}t}=\oint_l\delta U+\oint_l\delta\Pi=0+0=0 \tag{d}$$

因此，有势的质量力不会引起环量变化；正压流体也不会引起环量变化。这样我们就得到了有名的汤姆逊定理，理想正压流体在有势的质量力作用下，沿任何封闭流体线的速度环量将不随时间改变。

从定理之反面来说，流体粘性、斜压和质量力无势是引起沿封闭流体线速度环量变化，从而（由斯托克司定理）引起张于此封闭流体线上之任一流体面之涡通量变化，也就是引起流体旋涡变化的三大因素。下面利用汤姆逊定理，来说明旋涡的某些其它动力学特性。

第八节　拉格朗日定理

拉格朗日定理：理想正压流体在有势的质量力作用下，如于某时刻在一部分流体内无旋的话，则可断定在以前或以后任何时刻中这部分流体都无旋。反之，若于某一时刻在该部分流体内是有旋的话，则在以前或以后的任何时刻中这部分流体内就皆为有旋。

证明：如于某时刻一部分流体C中运动无旋，则在这部流体中处处有$\Omega=0$。从而穿过C中任意流体面A的涡通量$\iint_A \Omega\cdot dA=0$，由斯托克司定理沿作为S周界的封闭流体线l的环量$\Gamma_l=\oint_l v\cdot dl=0$。根据汤姆逊定理，在以前或以后任一时刻沿由组成$l$的流体质点所成的流体线$l'$的环量$\Gamma_{l'}=0$。再由斯托克司定理，穿过以$l'$为周界的、由原来$A$变来的流体面$A'$之涡通量$\iint_{A'}\Omega\cdot dA=0$。因为$A$是在流体$C$内任取的，故$A'$在$C$内也是任意的，那么由在$A'$上的面积分等于零推出，该时刻$C$内仍为$\Omega=0$。这就证明了定理的前一半。

定理之后一部可用反证法。假设在某一时刻以前或以后C中流动变成无旋了，那么根据上一半证明，C这部分流体内应该一直无旋。这和前提矛盾。

根据拉格朗日定理，在有势质量力作用下的理想正压流体中，原来没有旋涡的永远也不会生出旋涡来；原来有旋涡的也永远消灭不掉这些旋涡。所以拉氏定理也叫旋涡不生不灭定理。水近似可视为理想流体且不可压缩，在重力作用下由静止状态进入运动后，流动就将始终是无旋的。水在水力机械叶轮中流动，当作势流处理就是这个道理。

第九节　亥姆霍茨（第二、三）定理

亥姆霍茨关于涡管有三个定理，第一定理是说沿涡管强度不变，这个定理是属于运动学范畴的，已在第二节介绍过。这一节介绍亥姆霍茨关于涡管的另外两个动力学性质的定理。

亥姆霍茨第二定理：在有势的质量力作用下的理想正压流体中，构成一涡管的流体质点在运动过程中将永远留在此涡管上。也就是说涡管始终保持为涡管，永远由相同的流体质点所构成。

证明：设在某时刻t，流体中有一涡管，在其上任取一块流体面，则沿此面法线方向涡量的投影$\Omega_n=0$，那么通过的涡通量必也为零。

$$I_A=\iint_A \Omega_n dA=0$$

由斯托克司定理，此刻沿A周界上封闭流体线l的环量当然也就等于零。

$$\Gamma_l=\oint_l v\cdot dl=0$$

再根据汤姆逊定理，环量Γ_l在所述条件下将不随时间改变，因此在任何其它时刻t'，沿由l变来的流体封闭回线l'的环量仍为零。

$$\Gamma_{l'}=0$$

再引用斯托克司定理，此刻穿过以l'为周界的、由原来流体面A变来的流体面A'的涡通量等于零。

$$I_{A'}=\iint_{A'} \Omega_n dA'=0$$

由于A'是任意的，这就推出沿流体面A'必有

$$\Omega_n=0$$

这说明A'仍为涡管面。

这定理说明，在有势的质量力作用下的理想正压流体内，涡管永远是涡管。虽然在流动过程中，涡管的位置、大小和形状都可能变化，但涡管恒保持为涡管。

亥姆霍茨第三定理：在有势质量力作用下的理想正压流体内，涡管强度不随时间而变化。

证明：在涡管表面上围绕涡管作一封闭流体线，由斯托克司定理沿此流体线的环量将等于该涡管的管强。根据汤姆逊定理，上述环量不随时间改变；又由第二定理封闭流体线跟随涡管一起运动并始终为涡管上的一条封闭流体线，所以沿它的不随时间改变的环量，始终等于运动涡管的管强。这就推出涡管强度也不会随时间而变化的结论。

涡管随流动，可以移位，变化其形状与大小，但其强度在所述条件下不变。

第十节　亥姆霍茨涡量方程

前面我们通过考察速度环量的变化，研究了旋涡的变化规律；这一节我们将采用涡量方程来直接研究旋涡的变化规律。为此，先来建立涡旋矢量Ω所满足的涡量方程，然后以涡量方程为分析工具，分析流体粘性对旋涡变化的影响。

写出理想流体运动方程的兰姆一葛罗米柯形式 (8-16)‴，它的矢量形式为：

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\nabla \frac{v^2}{2}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}=\mathbf{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p$$

对上式两边取旋度得

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t}+\nabla\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v})=\nabla\times\mathbf{f}-\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) \tag{a}$$

方程式 (a) 左边，利用矢量分析公式可写成

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t}+\nabla\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v})=\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\Omega}-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\Omega}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})-\boldsymbol{v}(\nabla\cdot\boldsymbol{\Omega})$$

$$=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\Omega}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) \tag{b}$$

把式 (b) 代入式 (a) 得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\Omega}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})=\nabla\times\mathbf{f}-\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) \tag{9-10}$$

如果流体是正压的且质量力有势，则

$$f=\nabla U,\quad \frac{1}{\rho}\nabla p=\nabla \Pi \tag{c}$$

式中，U为力势函数；Π则为压力函数。把式 (c) 代入式 (9-10)，注意对某标量函数的梯度取旋度结果为零，则式 (9-10) 变成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\Omega}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})=0 \tag{9-11}$$

这就是在有势力作用下的理想正压流体内，涡量变化的方程式，称为亥姆霍茨方程式。

对不可压缩流体流动$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$，如果需要考虑流体粘性，式 (9-11) 右边还须加一粘性项$\boldsymbol{v}\Delta\Omega$($\boldsymbol{v}$ 为运动粘度)，则涡量方程成为

$$\frac{d\Omega}{dt}-(\Omega\cdot\nabla)v=\nu\Delta\Omega \tag{9-12}$$

式（9-12）为在有势力作用下的不可压缩粘性流体中的涡量方程。

根据前面对理想正压流体在有势力作用下旋涡特性的讨论知道：流动无旋则永远无旋；有旋则永远有旋。也就是说，旋涡具有保持性。只有当关于流动的上述三个条件中，起码有一个遭到破坏时，旋涡的保持性才不再成立。而在工程实际上三个条件中，最常遭到破坏的是理想流体条件。也就是说，流体粘性是促使旋涡发生、发展与消失的最经常和最重要的因素。在粘性流体中，由于粘性的存在，使垂直于速度梯度方向流体微团的两个侧面将受到一对反向切力的作用，从而形成对微团的旋转力矩，致使微团产生旋转运动因而旋涡便发生了。粘性作用还使旋涡从强的地方向弱的地方输送，直至流体中的旋涡分布均匀为止。这种现象叫作旋涡的扩散，下面就以不可压缩粘性流体的平面运动为例，应用涡量方程（9-12）来分析一下旋涡的扩散性。

对于平面运动：$v_z=0$；$\Omega_x=\Omega_y=0$，则有$\Omega_z=\Omega$。将之代入式（9-12）得标量方程

$$\frac{d\Omega}{dt}=\nu\Delta\Omega \tag{d}$$

于某瞬时在流场内任取一点M，在M点邻域内包围M点取一小面积A，其周界为封闭曲线l，根据高斯积分公式可写出

$$\iint_A \Delta\Omega\,dA=\int_L \frac{\partial\Omega}{\partial n}dl$$

式中n代表l外法线方向。由中值公式可得

$$\iint_A \Delta\Omega\,dA=(\Delta\Omega)_M A$$

代回上式，于是

$$(\Delta\Omega)_M=\frac{1}{A}\int_l \frac{\partial\Omega}{\partial n}dl \tag{e}$$

设M点涡量比周围都大，则$\frac{\partial\Omega}{\partial n}<0$，由（e）式得到$(\Delta\Omega)_M<0$，于是根据式（d）

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_M<0$$

此式说明下一时刻M点上的涡量将减小。反之，若M点的涡量比周围小，类似的推理可得出，下一时刻M点的涡量将增加。这说明由于粘性作用，旋涡将在流体内传输，直至流场的旋涡分布达到均匀才会停止。

习 题 九

9-1 叙述旋涡强度和速度环流的定义，并说明它们之间的关系。

9-2 已知平面不可压缩流动速度分布$v_x=-2yt$，$v_y=-2xt$，该流动有旋与否，若无旋求出势函数，并求$t=1$时的等势线，及$t=1$时的沿原点至（1，2）点联线的速度环流。

（$\varphi=-2xyt$；$xy=c$；$\Gamma=-4$）

9-3 已知流线为同心圆族，其速度分布

$$r\leqslant 5,\ \begin{cases} v_x=-\dfrac{1}{5}y \\ v_y=\dfrac{1}{5}x \end{cases};\qquad r\geqslant 5,\ \begin{cases} v_x=\dfrac{-5y}{x^2+y^2} \\ v_y=\dfrac{5x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

试求沿圆周$x^2+y^2=R^2$的速度环流，其中圆的半径R分别为（1）$R=3$；（2）$R=5$；（3）$R=10$。

（当$R=3$时，$\Gamma=\frac{18}{5}\pi$；当$R=5$时，$\Gamma=10\pi$；当$R=10$时，$\Gamma=10\pi$）

9-4 设在$(1,0)$点置有$\Gamma=\Gamma_0$的旋涡，在$(-1,0)$点置有$\Gamma=-\Gamma_0$的旋涡。试求旋涡运动规律及沿下列路线的速度环流。

（1）$x^2+y^2=4$；（2）$(x-1)^2+y^2=1$；（3）$x=\pm 2$，$y=\pm 2$ 的一个方形框；（4）$x=\pm 0.5$，$y=\pm 0.5$ 的一个方形框。

（（1）$\Gamma=0$，（2）$\Gamma=\Gamma_0$，（3）$\Gamma=0$，（4）$\Gamma=0$）

9-5 设平面流动的速度场在极坐标系中为$v_\theta=\frac{\Gamma_0}{2\pi r}\left(1-e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right)$，$v_r=0$式中$\Gamma_0$，$\nu$均为常数，$t$为时间。

（1）求流体微团的角速度ω；$\left[\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu t}e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right]$

（2）求沿任一半径为R的圆周的速度环量Γ；

$$\left[\Gamma_0\left(1-e^{-\frac{R^2}{4\nu t}}\right)\right]$$

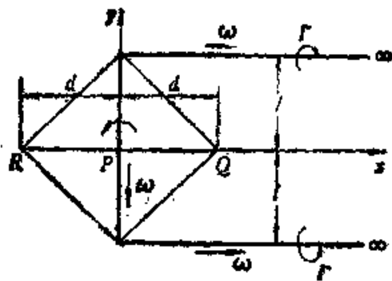
（3）求通过全平面的旋涡总强度。$[\Gamma_0]$

9-6 有一马蹄形旋涡如图所示，两端向右延伸至无限远处。试分别计算P、Q和R三点诱导速度的三个分量v_x，v_y，v_z。

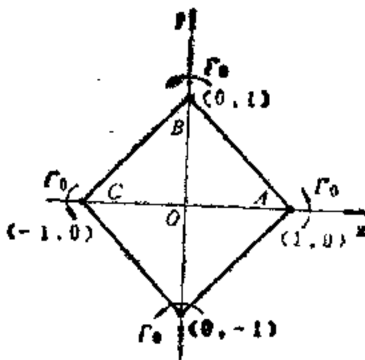
$$\left(P点，v_x=v_y=0，v_z=\frac{\Gamma}{2\pi l}；Q点，v_x=v_y=0，v_z=\frac{\Gamma}{2\pi ld}\sqrt{l^2+d^2}；R点，v_x=v_y=0，\right.$$

$$\left.v_z=\frac{-\Gamma}{2\pi\sqrt{l^2+d^2}}\left(\frac{l}{d}-\frac{d}{e}\right)\right)$$

9-7 在初始瞬时在$(1,0)$，$(-1,0)$，$(0,1)$和$(0,-1)$四点分别置有一个环流为Γ_0的旋涡。求这四个旋涡的运动轨迹。



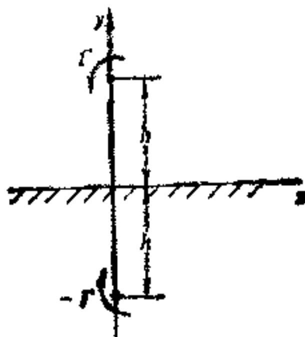
题9-6图



题9-7图

9-8 若流体满足条件（1）外质量力有势（2）流体正压（3）流体是理想的，且在某一瞬时 t，流体的流动为有旋流动，试证流体在 t 时刻前后任何时刻流动均为有旋流动。

9-9 设水平固体壁面上方有一点涡。求证由此形成的流动等同于去掉固体壁面但在原点涡对壁面镜像位置加上一个同强度但方向相反的点涡所形成的流动。



题 9-9 图

第十章　理想流体的平面有势流动

第一节　平面流动及其流函数

平面流动也被称作二元流动或二维流动，它是指那种流体只在相互平行的各自平面上流动，且各平行平面上的流动完全相同的流动。因此只要研究其中一个平面上的流动情况就可以了解流个流场。于是，当把坐标平面取为流动平面来研究平面流动时，所有的流动参数就只和两个坐标自变量与时间自变量有关，使流动的分析简化。同时，在涉及流体体积的一切计算中（如流体的流量，动量及能量的计算），通常只取单位厚度的流体层来考虑问题。

严格讲，在自然界中并不存在真正的平面流动。但由于

（1） 在许多实际存在的流动中作这样的简化处理所带来的误差并不大。

（2） 解平面流动时其数学处理远比解空间流动的要简单与方便。

所以研究平面流动就不仅具有理论上的意义，面且还有其实际价值。

一、平面流动的流函数

在平面流动中，若将流动平面取为oxy坐标面，则不可压缩流体运动的连续性方程就应是

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$$

或写成

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-v_y\right) \tag{10-1}$$

由数学分析可知，式（10-1）成立时，必然存在一个函数$\psi(x,\ y,\ t)$，其中时间自变量t为一参变量，该函数的全微分为

$$\mathrm{d}\psi=(-v_y)\mathrm{d}x+v_x\mathrm{d}y \tag{10-2}$$

但ψ的全微分定义为

$$\mathrm{d}\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\mathrm{d}y \tag{10-3}$$

比较式(10-2)与式(10-3)即得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial x}&=-v_y\\ \frac{\partial\psi}{\partial y}&=v_x\end{aligned}\right\} \tag{10-4}$$

在流体运动学一章中曾得到过流线的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x}=\frac{\mathrm{d}y}{v_y}$$

或

$$(-v_y)\mathrm{d}x+v_x\mathrm{d}y=0 \tag{10-5}$$

将式(10-5)与(10-2)相比较可知，流线的微分方程又可以是　$\mathrm{d}\psi=0$

此式说明，在流线上无限接近的两点处前述的那个函数的增量为零。因此，在整个一根流线上该函数的值应保持不变为一常数。实际上，将前式沿流线积分即为

$$\psi=\text{常数} \tag{10-6}$$

这个函数$\psi(x,\ y,\ t)$即被称为该平面流动的流函数。流函数存在的充分与必要条件是流体的连续性。

上面曾提到，在同一根流线上流函数ψ的数值不变，保持为一常数c

$$\psi=c$$

这也就是该流线的方程。给c以不同的数值：c_1，c_2，…等，即得不同流线的方程，各自代表不同的流线，如图10-1所示。

由此可知，在研究流体的平面流动时，流函数具有十分重要的意义。若已知流函数，则不但可以绘出流线，而且根据式(10-4)还能求出流场中任意点处的速度。

［例10-1］ 设在如图10-2所给的坐标系统中某一平面流动的流函数为

$$\psi(x,\ y,\ t)=-\sqrt{3}\,x+y$$

试求该流动速度的两个坐标分量v_x与v_y，绘出流线，并证明该流动满足连续方程

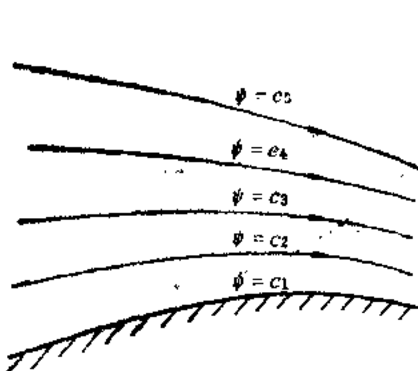


图10-1 流函数与流线

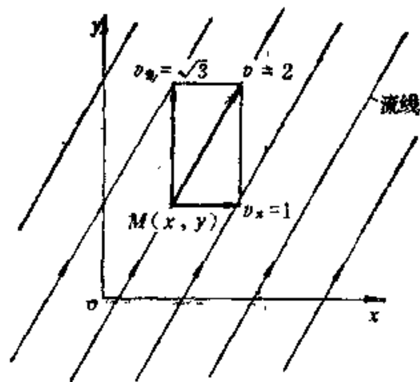


图10-2 一种平面流动之例

［解］ 根据式(10-4)有

$$v_x=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(-\sqrt{3}\,x+y)=1$$

$$v_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}(-\sqrt{3}\,x+y)=\sqrt{3}$$

即流场中所有各点处的速度都大小相等，方向相同：

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{1+3}=2$$

$$\alpha=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1}=60^\circ$$

所以流线为与x轴呈60°夹角的平行线族（如图10-2所示）。

平面流动的连续性方程是

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$$

将所求出的v_x，v_y代入上式恒等于零，故流动满足连续性方程。

二、流函数的物理意义

在图10-3a中，设aa与bb为两根无限接近的流线，它们的流函数分别为ψ及$\psi+d\psi$。通过正交过流断面dn（在nn上）的流量将是

$$dq_V=v dn 1$$

但因

$$v=v_x\cos(v, x)+v_y\cos(v, y)$$

$$\cos(v, x)=\frac{dy}{dn}$$

$$\cos(v, y)=-\frac{dx}{dn}$$

故得

$$dq_V=\left[v_x\frac{dy}{dn}+v_y\left(-\frac{dx}{dn}\right)\right]dn 1$$

$$=v_x dy-v_y dx$$

由式(10-2)可知

$$dq_V=d\psi$$

此结果说明，通过两根无限接近的流线间的流量等于两流线上的流函数的微小差值—微分。

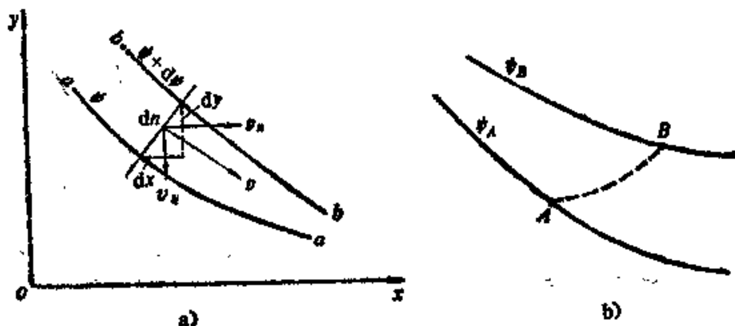


图10-3 流函数与流量的关系

现考虑通过图10-3b上所画的两根流线AA与BB之间的流量。设A，B分别为两根流线上的点。根据前式，该流量可如下求出：

$$q_V=\int dq_V=\int_{\psi_A}^{\psi_B}d\psi=\psi_B-\psi_A$$

式中的ψ_A与ψ_B分别为点A与点B处的流函数值，亦即两根流线上的流函数的值。由此可知，两流线上的流函数之差值即等于通过该两流线间单位厚度过流断面的流量。因为同一根流线上各点的流函数值相同，故两流线间的流量沿流程均相同。同时，流经任意柱面AB(单位厚度）的流量只取决于两端点A，B处的流函数的值，而与曲线AB的形状无关。

［例10-2］ 试求例9-1所给流动中通过点$A(1, 0)$和点$B(2, \sqrt{3})$的连接线AB的过流量q_{VAB}

［解］ 通过AB的流量应等于A与B两点处的流函数值的差，即

$$q_{VAB}=\psi_B-\psi_A$$

根据题给的流动的流函数

$$\psi=-\sqrt{3}x+y$$

可知 $$\psi_B=-\sqrt{3}\,x_B+y_B=-\sqrt{3}\cdot2+\sqrt{3}=-\sqrt{3}$$

$$\psi_A=-\sqrt{3}\,x_A-y_A=-\sqrt{3}\cdot1-0=-\sqrt{3}$$

所以 $$q_{VAB}=-\sqrt{3}-(-\sqrt{3})=0$$

即，通过AB连线的流量为零。

三、流函数与速度势函数的关系

在第七章中已证明过，在有势流动的情况下存在速度势函数$\varphi(x, y, z, t)$，并给出了它和流动的速度分量的关系。在平面势流中就应有

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

前面曾给出

$$v_x=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

对上面四个式子采用交叉相乘即得速度势函数$\varphi(x, y, t)$与流函数$\psi(x, y, t)$的如下关系

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=\frac{\partial\psi}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

或 $$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}=0$$

该式是等势线族$\varphi(x, y, t)=c_1$与流线$\psi(x, y, t)=c_2$正交的条件。即在平面势流中流线与等势线族是相互正交的两族曲线。

在不可压缩流体的平面势流中，速度势函数φ是满足拉普拉斯方程的，即

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

或 $$\nabla^2\varphi=0$$

可以证明，流函数ψ也满足拉普拉斯方程。由于平面势流中不存在旋转角速度，即

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=0$$

所以 $$\frac{\partial v_y}{\partial x}=\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

将$v_x=\frac{\partial\psi}{\partial y}$，$v_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$代入上式后即可得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0\\ \text{或}\quad&\nabla^2\psi=0\end{aligned}\right\}\qquad(10\text{-}7)$$

这就证明了在平面势流中流函数ψ也满足拉普拉斯方程，为一调和函数。

第二节　流　　网

上一节已经证明，在平面势流中流线与等势线族是相互正交的两族曲线。如果作出一组φ函数的等值线（等势线）和一组ψ函数的等值线（流线），这两组曲线将构成彼此正交的

网络。这一网络即称之为流网，如图10-4所示。

流网可以给出关于流动特性的清晰概念。它完全可以决定速度场。在水力机械设计当中经常要绘制流网，并以此来设计导叶和工作轮叶片。所以流网对水力设计者有很大意义。

绘制流网时通常是将网格画成等边的，比较方便。这样作的原因是：速度势函数φ在等势线的法向n（图10-5）上的偏导数就等于该方向的速度。而等势线的法向即流线的切线方向，亦即速度方向。所以有

$$v=\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\frac{d\varphi}{dn} \tag{10-8}$$

根据流速的定义又有

$$v=\frac{dq_V}{dm} \tag{10-9}$$

式中，dq_V是通过相距dm的无限接近的两条流线间的流量（图10-5）。

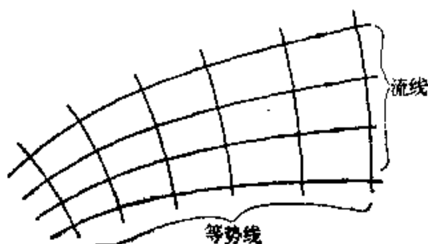


图10-4　流网

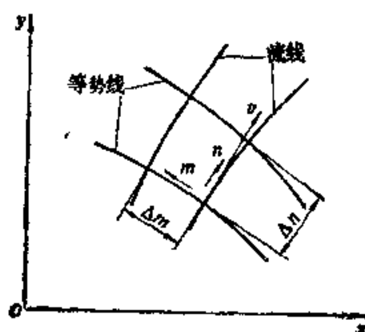


图10-5　流网的绘制

前节已证明$dq_V=d\psi$。于是式(10-9)即可化作

$$v=\frac{d\psi}{dm} \tag{10-10}$$

那末由式(10-8)与(10-10)即可得

$$\frac{d\varphi}{dn}=\frac{d\psi}{dm} \tag{10-11}$$

由此可以看出，如果$d\varphi=d\psi$，则有

$$dm=dn$$

如果在等势线与流线之间取有限间隔时，则式(10-11)即变为

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta n}=\frac{\Delta\psi}{\Delta m} \tag{10-12}$$

若$\Delta\varphi=\Delta\psi$，则有$\Delta n=\Delta m$　　(10-13)

因此，由式(10-13)可知，在绘制流网时只要取$\Delta\varphi=\Delta\psi$，则流网的网格就将是等边的。

对于速度表达式也同样取有限量，则有

$$v=\frac{\Delta\varphi}{\Delta n}\ 或\ v=\frac{\Delta\psi}{\Delta m} \tag{10-14}$$

由式(10-14)可知，两相邻等势线上的φ函数差值除以它的法向间的距离，所得即为速度。也可根据两相邻流线的流函数ψ之差值除以其法向间距离来求速度。这样求出的速度值实际上是网格上速度的平均值。因此网格画得越稠密，所得速度值的精确度就越高。但作起来也

就越繁琐。

第三节 复势与复速度

前已证明，平面势流的速度势函数φ与流函数ψ都是调和函数，满足拉普拉斯方程，即

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0$$

同时还证明了速度势函数φ与流函数ψ之间存在下列关系

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=\frac{\partial\psi}{\partial y}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}&=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\end{aligned}\right\}$$

亦即速度势函数φ和流函数ψ是互为共轭的调和函数。

现在将平面势流的速度势函数φ作为某一复变函数的实部，把其流函数ψ作为虚部，即

$$W=\varphi+i\psi=f(z) \tag{10-15}$$

那么此复变函数因其实部与虚部为共轭的调和函数。（必满足柯西—黎曼条件），因而就必定是一个解析的复变函数。这个复变函数可用来代表所讨论的平面势流。这时的坐标自变量不再是x与y，而是一个复数自变量$z=x+iy$了。这个解析的复变函数$W(z)$叫作该平面势流的复势。

反过来，若有一个复变函数是解析的（即其实部与虚部满足柯西—黎曼条件），则其实部就代表某一理论上存在的平面势流的速度势函数，而其虚部则代表那个流动的流函数。这一点下面要详加讨论。

若已知一平面势流的复势，则流场中任意点处的速度就很容易求出。实际上如将复势对复自变量微分，则根据复变函数求导公式得

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dz}&=f'(z)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}\\&=v_x-iv_y\\&=\bar{v}\end{aligned} \tag{10-16}$$

即复势的导数的实部为流速的x轴（实轴）分量，而其虚部则为流速的y轴（虚轴）分量的负值。该导数用符号$\bar{v}$表示，叫作该平面势流的复速度。

复速度的模等于速度本身的数值，即

$$|\bar{v}|=\left|\frac{dW}{dz}\right|=\sqrt{v_x^2+(-v_y)^2}=|v|$$

复速度的几何上的表示如图10-6。根据复数的表示方法，复速度也可表示为

$$\begin{aligned}\bar{v}=\frac{dW}{dz}&=|v|(\cos\alpha-i\sin\alpha)\\&=|v|e^{-i\alpha}\end{aligned}$$

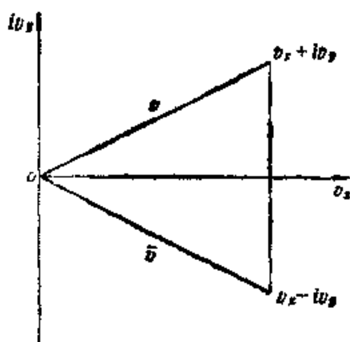


图10-6 复速度的几何表示

如果$\bar{W}$为W的共轭复变数，即

$$\bar{W}=\varphi-i\psi=f(x-iy)=f(\bar{z})$$

则

$$\frac{d\bar{W}}{d\bar{z}}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}-i\frac{\partial\psi}{\partial x}=v_x+iv_y$$

在速度复平面上，$\frac{d\bar{W}}{d\bar{z}}$是$\frac{dW}{dz}$关于实轴$ox$的反影。又

$$\frac{dW}{dz}\frac{d\bar{W}}{d\bar{z}}=(v_x-iv_y)(v_x+iv_y)$$

$$=v_x^2+v_y^2$$

$$=|v|^2$$

所以根据共轭复变数的运算方法可以很简便的求出流场中每一点处的速度v。

第四节 基本平面势流

一、均匀流

运动的流体中各点的速度大小和方向完全相同，则把这种流动叫作均匀流动（如图10-7所示）。

设均匀流动速度为v_∞。若取坐标轴ox的方向与v_∞相同，则$v_x=v_\infty$，$v_y=0$。但是

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=v_\infty$$

$$v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=0$$

且

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy$$

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy$$

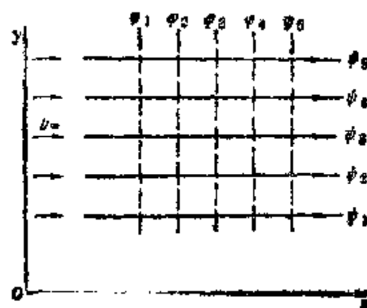


图10-7 均匀流

由此可得：

$$d\varphi=v_\infty dx$$

$$d\psi=v_\infty dy$$

将上两式积分可得

$$\varphi=v_\infty x+c_1$$

$$\psi=v_\infty y+c_2$$

式中之c_1，c_2为积分常数。因其数值并不影响求速度（一经求导它们即消失），所以不妨令$c_1=c_2=0$。所以

$$\varphi=v_\infty x \tag{10-17}$$

$$\psi=v_\infty y \tag{10-18}$$

这就是均匀流的速度势函数与流函数。

均匀流的等势线为$\varphi=v_\infty x=$常数的线，即$x=$常数的线。这是些平行oy轴的直线族，流线为$\psi=v_\infty y=$常数的线，即$y=$常数的线。那是些平行ox轴的直线族，如图10-7所示。

均匀流的复势为

$$W=\varphi+i\psi=v_\infty x+iv_\infty y=v_\infty(x+iy)$$
$$=v_\infty z \tag{10-19}$$

二、源与汇

若流体从一点向四周各方向呈直线均匀的流出，则此点称为源点或点源，相应的流动叫源流，又若流体从四周各方面呈直线均匀地流向一点，则此点称为汇点或点汇，相应的流动叫汇流。参阅图10-8。

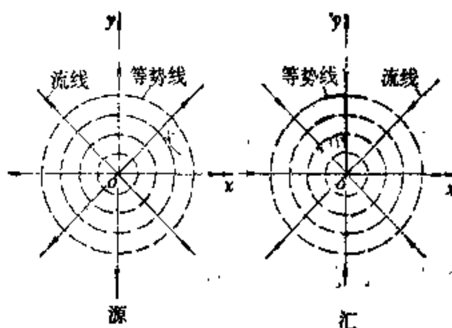


图10-8 源与汇

研究平面源及汇的有势流动本身并没有多大的实际意义，因为实际上很少遇到这样的流动。但是若把源汇与均匀流等其他平面势流叠加以后就可以得到实用上很重要的流动。所以源和汇是解决流体力学中某些问题的基础。

在图10-8中，设源点位于坐标原点o上，此源点的放射量（流量）为q_V。根据连续性可知，通过圆心在原点半径为r的任一圆周形过流断面的流量必然也是q_V。若用极坐标表示，则任一点的流速即为

$$v_\theta=0$$

$$v_r=\frac{q_V}{2\pi r}$$

但

$$v_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

$$v_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

且

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\mathrm{d}r+\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}\psi=\frac{\partial\psi}{\partial r}\mathrm{d}r+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta$$

利用以上各式便得到

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{q_V}{2\pi r}\mathrm{d}r=m\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

$$\mathrm{d}\psi=\frac{q_V}{2\pi r}r\,\mathrm{d}\theta=m\,\mathrm{d}\theta$$

式中$m=\frac{q_V}{2\pi}$，被称作源的强度。将上两式积分可得

$$\varphi=m\ln r \tag{10-20}$$
$$\psi=m\theta \tag{10-21}$$

在上面的积分过程中已令积分常数为零。所得到的积分即为源流的速度势函数与流函数。

由式(10-20)可知，源的等势线为圆心在o点的一族同心圆。而由式(10-21)可知，流线则是通过o点的一族放射线。

源的复势是

$$W=\varphi+i\psi=m\ln r+im\theta$$
$$=m\ln(re^{i\theta})$$

或
$$W=\frac{q_V}{2\pi}\ln z \tag{10-22}$$

若在坐标原点放置的是汇，则流体反向流动，通过半径为r的圆周的流量是$-q_V$，故汇的强度等于$-m$。其复势即为

$$W=-m\ln z=-\frac{q_V}{2\pi}\ln z \tag{10-23}$$

若源的位置不在坐标原点（参阅图10-9），则其复势应是

$$W=m\ln z_1=m\ln(z-a)$$
$$=\frac{q_V}{2\pi}\ln(z-a) \tag{10-24}$$

三、 点涡（环流）

无穷长的直线涡所形成的平面流动，除涡线本身具有旋性外，为一无旋的流场。虽然涡线外面的流体都作圆周运动，但流体质点并不绕自身旋转，因此涡线外面的流动为有势流动。在垂直涡线的坐标面xoy上，涡线表现为一个点，故被称之为点涡，如图10-10所示。

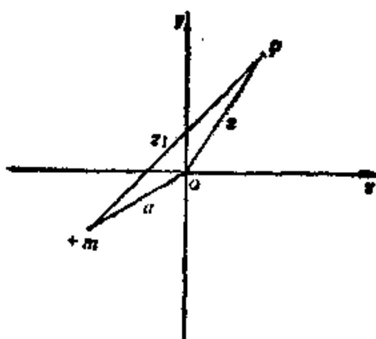


图10-9 任意位置的源

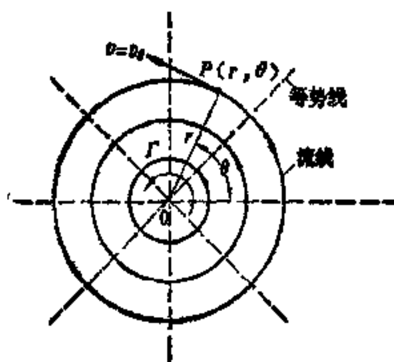


图10-10 点涡

将坐标原点o置于点涡处。若点涡的强度是Γ，则在半径r处流体的感生速度是

$$v_\theta=\frac{\Gamma}{2\pi r},\quad v_r=0$$

但是

$$v_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

$$v_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

同时

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial r}dr+\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}d\theta=\frac{\Gamma}{2\pi}d\theta$$

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial r}dr+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}d\theta=-\frac{\Gamma dr}{2\pi r}$$

积分上两式并取积分常数为零，则得

$$\varphi=\frac{\Gamma}{2\pi}\theta \tag{10-25}$$

$$\psi=-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \tag{10-26}$$

此即为点涡的速度势函数与流函数。

可见点涡的流线是$\psi=-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r=$常数的线，亦即$r=$常数的线，这是些以坐标原点为圆心的同心圆。而等势线则是$\varphi=\frac{\Gamma}{2\pi}\theta=$ 常数的线，或$\theta=$常数的线，即为通过原点的放射线，如图 10-10 所示。

点涡的复势是

$$W=\varphi+i\psi=\frac{\Gamma}{2\pi}\theta-i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

$$=-i\frac{\Gamma}{2\pi}(\ln r+i\theta)$$

$$=-i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln(re^{i\theta})=-i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z$$

$$=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z \tag{10-27}$$

点涡所感生的流体运动，除点涡本身外，都是无旋的有势流动，而点涡本身是这个流动中的奇点。

第五节　势流的叠加

在实际当中有时会遇到很复杂的流动。那时很难去直接解拉普拉斯方程以求得φ或ψ。但是有势流动是可叠加的，可将几个简单的有势流动叠加成为一个复杂的有势流动。当遇到一个复杂的有势流动时，可以首先分析一下它是由哪几个简单的有势流动所组成，分别去研究这些简单的流动，从而去解决较复杂的流动。

下面就平面流动来讨论一下势流的叠加原理。若流场中存在有两个势流，他们的复势分别为

$$W_1=\varphi_1+i\psi_1,\ W_2=\varphi_2+i\psi_2$$

两者之和$W=W_1+W_2$仍为一解析的复变函数，仍可作为某一流动的复势。该流动的速度的两坐标分量应该等于

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_1+\varphi_2)$$

$$=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}$$

$$=v_{1x}+v_{2x}$$

$$v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_1+\varphi_2)$$

$$=\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}$$

$$=v_{1y}+v_{2y}$$

利用流函数求导以求出速度的关系式与上述过程完全一样。上式说明

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$$

即两流动的复势相加可得一新的复势，它所代表的流动就等于两流动相叠加后的合成流动。

由此可知，叠加两个或更多的流动时，所得合成流动的复势即为分流动的复势的代数相加。此即势流的叠加原理。下面将给出几个非常重要的势流叠加的例子

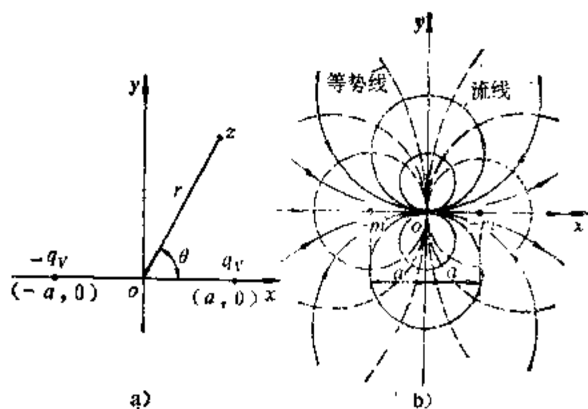


图10-11 偶极子

一、偶极子

设等强度m的源与汇分别位于$(a,0)$与$(-a, 0)$处，如图10-11a所示。源与汇叠加后的流动之复势为

$$W=W_{源}+W_{汇}=m\ln(z-a)-m\ln(z+a)$$

如果使m不变，只让a趋于零，即使源与汇无限靠近，那时汇将把从源中流出的流体全部吸掉而不发生任何流动。但若在源与汇无限靠近时同时增大其强度，以使两者距离与强度之积不变，即

$$\lim_{\substack{a\to 0\\ m\to\infty}}(m2a)=M\ (常数)$$

则极限情况下$(a\to 0,\ m\to\infty)$的流动就称为偶极子流。M称为偶极子的强度。

根据上述偶极子流的定义可求其复势

$$W=\lim_{\substack{a\to 0\\ m\to\infty}}\left[m\ln(z-a)-m\ln(z+a)\right]$$

$$=-\lim_{\substack{a\to 0\\ m\to\infty}}\left[(m\cdot 2a)\frac{\ln(z+a)-\ln(z-a)}{2a}\right]$$

$$=-M\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\ln z)$$

$$=-\frac{M}{z} \tag{10-28}$$

或

$$W=-\frac{M}{re^{i\theta}}=-\frac{M}{r}e^{-i\theta}=-\frac{M}{r}(\cos\theta-i\sin\theta) \tag{10-28$'$}$$

从式（10-28）'得

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=-\frac{M}{r}\cos\theta\\ \psi&=\frac{M}{r}\sin\theta\end{aligned}\right\}\tag{10-29}$$

这就是偶极子流动的速度势函数与流函数。很容易看出，流线是一族与ox轴相切于坐标原点o的圆，而等势线则是一族与oy轴相切于坐标原点的圆（图10-11b）。

二、源加点涡

在坐标原点同时放置一个源（或汇）与一个点涡，来考虑这样叠加所得到的流动。合成流动的复势将是

$$\begin{aligned}W&=\frac{q_V}{2\pi}\ln z-\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z\\ &=\frac{q_V-i\Gamma}{2\pi}\ln z\\ &=\frac{q_V-i\Gamma}{2\pi}(\ln r+i\theta)\end{aligned}$$

将其实部与虚部分开即可得合成流动的速度势函数与流函数的表达式：

$$\varphi=\frac{1}{2\pi}(q_V\ln r+\Gamma\theta)$$

$$\psi=\frac{1}{2\pi}(q_V\theta-\Gamma\ln r)$$

为了得到等势线的方程，可令

$$\varphi=c_1\ (\text{常数})$$

则可得

$$r=c_1e^{-\frac{\Gamma}{q_V}\theta}$$

为了得到流线的方程，可令

$$\psi=c_2\ (\text{常数})$$

则可得

$$r=c_2e^{\frac{q_V\theta}{\Gamma}}$$

可见等势线与流线是两族相互正交的对数螺线（参阅图10-12）。

这种叠加后的流动称为涡源（或涡汇）。水泵压水室内的流动即可看作是一个涡源。而水轮机引水室内的流动则可看作是一个涡汇。

三、单排涡列

设在复流动平面上有一列点涡相互间有相等的距离l，每个点涡的强度都是Γ，见图10-13。现在来讨论由这样的单排涡列形成的流动。

若各点涡分别位于0，$\pm l$，$\pm 2l$，…，$\pm nl$…各点之处，则不与任何一个点涡重合的流体中的一点M（如图10-13所示）处之流动复势应等于各个点涡单独作用时的复势的叠加。

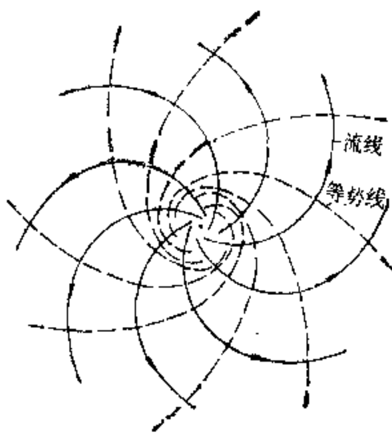


图10-12 源与涡之合成流动

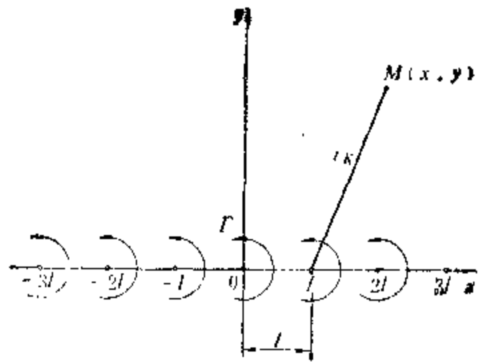


图10-13 单排涡列

位于点（±nl，0）处的点涡在点M处形成的复势为

$$W_n(z)=-\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln(z\mp nl)$$

根据势流叠加原理，所有的点涡在点M处形成的复势即为

$$\begin{aligned}W(z)=&-\frac{i\Gamma}{2\pi}\Big\{\ln z+\ln(z-l)+\ln(z-2l)\\&+\ln(z-3l)+\cdots+\ln(z-nl)+\cdots\\&+\ln(z+l)+\ln(z+2l)+\ln(z+3l)+\cdots\\&+\ln(z+nl)+\cdots\Big\}\\=&-\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\Big\{z(z^2-l^2)\left[z^2-(2l)^2\right]\left[z^2-(3l)^2\right]\cdots\\&\times\left[z^2-(nl)^2\right]\cdots\Big\}\\=&-\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\left[\frac{\pi z}{l}(1-\frac{z^2}{l^2})(1-\frac{z^2}{(2l)^2})\cdots\left(1-\frac{z^2}{(nl)^2}\right)\cdots\right]\\&+c\end{aligned}$$

上式中的常数c可令之为零，因此得

$$W(z)=-\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\left[\frac{\pi z}{l}(1-\frac{z^2}{l^2})\ (1-\frac{z^2}{(2l)^2})\cdots\ (1-\frac{z^2}{(nl)^2})\cdots\right]$$

应用无穷连乘$\sin\pi x$的展开式的公式：

$$\sin\pi x=\pi x(1-x^2)(1-\frac{x^2}{2^2})(1-\frac{x^2}{3^2})\cdots(1-\frac{x^2}{n^2})\cdots$$

当$n\to\infty$时，单排涡列所感生的流动之复势即可写成

$$W(z)=-\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\sin\frac{\pi z}{l}\tag{10-30}$$

为了判断涡列本身有无运动，只需求一下$z=0$点处的涡有无速度即可。为此，由前面W

(z) 的级数表达式求导即可得到复速度为

$$v_x-iv_y=\frac{dW(z)}{dz}=\frac{\Gamma}{2\pi i}\left[\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-nl}+\frac{1}{z+nl}\right)\right]$$

在$z=0$处的速度是由除该处点涡之外的其他点涡所感生的。因此，在求$z=0$点处的速度时可将上式右端方括弧中的第一项去掉，再令$z=0$即得速度：

$$(v_x-iv_y)_{\substack{x=0\\y=0}}=\frac{\Gamma}{2\pi i}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{-nl}+\frac{1}{nl}\right)\right]=0$$

因此得知$z=0$处速度为零。同样，涡列其他各点涡处的速度也为零，都是静止不动的。这就说涡列对其各个点涡自身并不感生速度，整个涡列因而是静止不动的。

涡列在流场中任一点M处所感生的复速度为

$$\bar{v}=v_x-iv_y=\frac{dW}{dz}=-\frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{\cos\frac{\pi z}{l}}{\sin\frac{\pi z}{l}}\frac{\pi}{l}=-\frac{i\Gamma}{2l}\frac{\cos\frac{\pi z}{l}}{\sin\frac{\pi z}{l}}$$

考虑到$z=x+iy$，并根据三角函数和双曲函数的关系可得

$$\bar{v}=v_x-iv_y=-\frac{i\Gamma}{2l}\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right)-i\,\mathrm{sh}\left(\frac{2\pi}{l}y\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{2\pi}{l}y\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right)}$$

将其实、虚部分开后可得

$$\left.\begin{aligned}v_x&=-\frac{\Gamma}{2l}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{2\pi}{l}y\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{2\pi}{l}y\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right)}\\v_y&=\frac{\Gamma}{2l}\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{2\pi}{l}y\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right)}\end{aligned}\right\}\quad(10\text{-}31)$$

这就是单排涡列所感生的速度场，在计算叶栅问题常用此速度计算公式。

四、双排涡列

若在流动平面上有两个平行的直线涡列相距为h，而每列涡中两相邻点涡相距为l。上涡列点涡的强度为$+\Gamma$，下涡列的则为$-\Gamma$。上涡列中之一个点涡的位置设为z_1（图10-14），紧邻上涡列z_1处的点涡的下涡列中某一点涡位于z_2点。这就是前章中所讲到的卡门涡列的情况。

点z_1处的点涡在平面上任意点z处感生的复势为

$$-\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln(z-z_1)$$

整个上涡列在z处感生的复势即为

$$W_1=-\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\left[(z-z_1)(z-z_1-l)(z-z_1+l)(z-z_1-2l)\right.$$

$$(z-z_1+2l)\ \cdots\Big]$$

$$=-\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\left\{(z-z_1)\prod_{n=1}^{\infty}\left[(z-z_1)^2-(nl)^2\right]\right\}$$

$$=-\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\left\{(z-z_1)\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{(z-z_1)^2}{n^2l^2}\right](-n^2l^2)\right\}$$

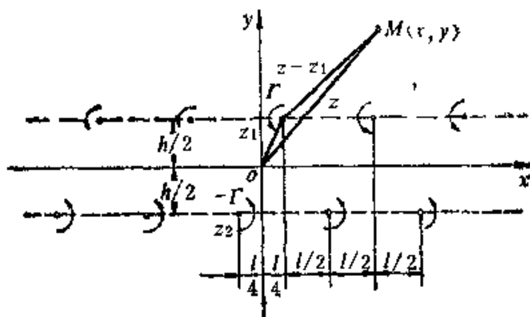


图10-14　双排涡列

同样，下涡列在流动平面上之任意点z处感生的复势为

$$W_2=\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\left\{(z-z_2)\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{(z-z_2)^2}{n^2l^2}\right](-n^2l^2)\right\}$$

如果坐标系的选取是图10-14所示的那样，即z_2与z_1是关于坐标原点对称的，或$z_2=-z_1$，则上式又可写为

$$W_2=\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\left\{(z+z_1)\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{(z+z_1)^2}{n^2l^2}\right](-n^2l^2)\right\}$$

因此双排涡列在平面上任意点z处所形成的复势就应是

$$W=W_1+W_2$$

$$=\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\frac{(z+z_1)\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{(z+z_1)^2}{n^2l^2}\right]}{(z-z_1)\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{(z-z_1)^2}{n^2l^2}\right]}\tag{10-32}$$

利用无穷连乘积中的$\sin\pi x$的展开式公式后得

$$\sin\left[(z+z_1)\frac{\pi}{l}\right]=(z+z_1)\frac{\pi}{l}\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{(z+z_1)^2}{n^2l^2}\right]$$

$$\sin\left[(z-z_1)\frac{\pi}{l}\right]=(z-z_1)\frac{\pi}{l}\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{(z-z_1)^2}{n^2l^2}\right]$$

因此式（10-32）可变为

$$W=\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\frac{\sin\left[(z+z_1)\frac{\pi}{l}\right]}{\sin\left[(z-z_1)\frac{\pi}{l}\right]}\tag{10-33}$$

由此即可求出流场中点M (x, y) 处的复速度为

$$\bar{v}=\frac{dW}{dz}=\frac{i\Gamma}{2l}\left\{\operatorname{ctg}\left[(z+z_1)\frac{\pi}{l}\right]-\operatorname{ctg}\left[(z-z_1)\frac{\pi}{l}\right]\right\}$$

第六节　圆柱体绕流

如图10-15所示的一个无穷长圆柱体被垂直于其轴线的无穷远均匀来流绕过的流动，可被看成是个平面流动。我们假定流体为理想不可压缩的，流动是定常与无旋的。

在流体力学平面势流部分主要是解决固体被流体绕过时，流体与固体之间的相互作用力问题。而圆柱体绕流是最简单、最基本的绕流问题，其他任意剖面柱体的绕流问题则可借助保角变换法转化为圆柱体的绕流问题。

当无穷远均匀来流绕过圆柱体时，由于圆柱的阻挡，流过圆柱体附近的流体质点就会受到扰动离开它原来的直线路径流过。很显然，离圆柱体越远，这种扰动就越小。在离柱体无穷远的地方流体可以说完全不受干扰，仍作均匀的直线运动。

现在将绕圆柱体的流动分两种情况进行研究。

一、圆柱体无环量绕流

无环量的圆柱体绕流可用均匀流与偶极子两个势流相叠加而得到。如图10-16所示，两个相叠加的流动的复势分别为

$$W_1=v_\infty z$$

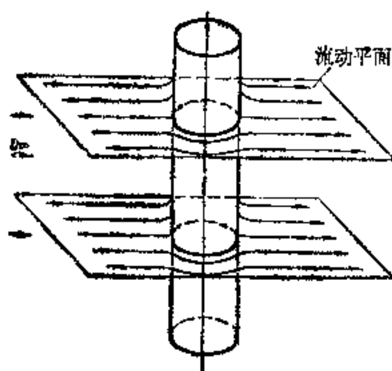


图10-15　绕无穷长圆柱的流动

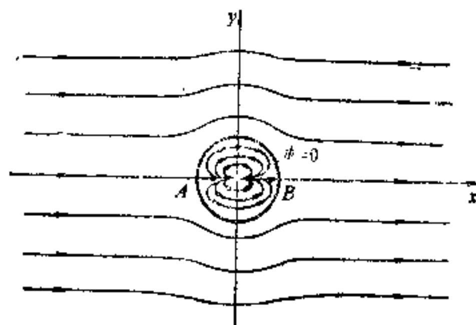


图10-16　圆柱绕流

$$W_2=\frac{M}{z}=\frac{v_\infty a^2}{z}$$

式中　$M=v_\infty a^2$是偶极子的强度；

a——圆柱体的半径；

v_∞——无穷远均匀来流的速度。

两者叠加后的复势是

$$W=W_1+W_2$$
$$=v_\infty z+\frac{v_\infty a^2}{z}$$

$$=v_\infty\left(z+\frac{a^2}{z}\right) \tag{10-34}$$

又因$z=re^{i\theta}$，故复势还可写为

$$W=v_\infty\left(re^{i\theta}+\frac{a^2}{r}e^{-i\theta}\right)$$

$$=v_\infty\left[r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{a^2}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)\right]$$

$$=v_\infty\cos\theta\left(r+\frac{a^2}{r}\right)+iv_\infty\sin\theta\left(r-\frac{a^2}{r}\right)$$

故可得

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=v_\infty\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta\\ \psi&=v_\infty\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\sin\theta\end{aligned}\right\} \tag{10-35}$$

因$r^2=x^2+y^2$，$\sin\theta=\frac{y}{r}$，$\cos\theta=\frac{x}{r}$，故又有

$$\varphi=v_\infty x\left(1+\frac{a^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$\psi=v_\infty y\left(1-\frac{a^2}{x^2+y^2}\right)$$

流线的方程为

$$\psi=v_\infty y\left(1-\frac{a^2}{x^2+y^2}\right)=c(\text{常数})$$

或

$$v_\infty y(x^2+y^2-a^2)=c(x^2+y^2)$$

$c=0$的那根流线（零流线）的方程即为：

$$y=0\text{与}x^2+y^2=a^2$$

在流体绕过静止物体时，物体表面必是一根流线。因此可将$\psi=0$那根流线看成物体的表面。上述的那根零流线$x^2+y^2=a^2$即半径为a的圆柱表面，而另一部分零流线$y=0$则是沿ox轴的那根流线。

流场中任一点$P(x, y)$处的速度是

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=v_\infty\left[1-\frac{a^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$=v_\infty\left[1-\frac{a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2}\right]$$

$$=v_\infty\left[1-\frac{a^2}{r^2}\cos2\theta\right]$$

$$v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-v_\infty a^2\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=-v_\infty\frac{a^2}{r^2}\sin2\theta$$

当$r\to\infty$时，$v_x\to v_\infty$，$v_y\to 0$，即在无穷远处流动变为均匀流。因此，均匀流和偶极子叠加以后所得的复势可以代表圆柱体被均匀流绕过时的流动情况。这是因为两流动叠加以后的流动图形能全部满足圆柱在均匀流中所形成的边界条件。

在圆柱表面上有$r=a$，则圆柱表面上的速度为

$$v_x=v_\infty(1-\cos 2\theta)$$
$$v_y=-v_\infty\sin 2\theta$$
$$\begin{aligned}v^2=v_x^2+v_y^2&=v_\infty^2(1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)+v_\infty^2\sin^2 2\theta\\&=v_\infty^2(2-2\cos 2\theta)\\&=4v_\infty^2\sin^2\theta\end{aligned}$$

故
$$v=2v_\infty\sin\theta \tag{10-36}$$

由此式可知，沿圆柱表面，速度是以正弦规律分布的，且其大小与圆柱半径a无关。

当$\theta=0$或π时，$v=0$。即在相应的两点A与B（图10-16）速度为零，该两点是分流点，也称为驻点。

当$\theta=\frac{\pi}{2}$或$\frac{3}{2}\pi$时，速度取得最大值$v_{max}=2v_\infty$，即在圆柱体表面的上、下两顶点处，速度为无穷远均匀来流速度的两倍。

下面讨论一下沿圆柱体表面压力分布的情况。设无穷远均匀来流的压力是p_∞。根据伯努里方程（忽略重力项）可得求圆柱体表面任一点处的压力p的方程：

$$p+\frac{1}{2}\rho v^2=p_\infty+\frac{1}{2}\rho v_\infty^2$$

移项并将式（10-36）代入后得

$$\begin{aligned}p-p_\infty&=\frac{1}{2}\rho v_\infty^2-\frac{1}{2}\rho 4v_\infty^2\sin^2\theta\\&=\frac{1}{2}\rho v_\infty^2(1-4\sin^2\theta)\end{aligned}$$

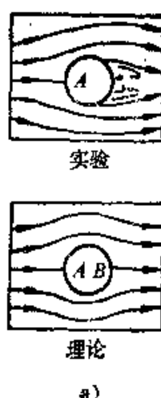
或写成
$$\frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2}=1-4\sin^2\theta$$

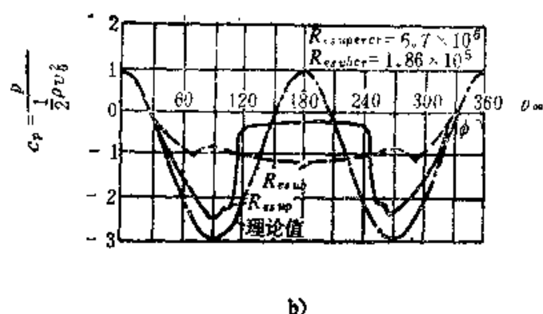
令$c_p=\dfrac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2}$，$c_p$称为压力系数，则

$$c_p=1-4\sin^2\theta \tag{10-37}$$

由此式可知，圆柱体表面上任意点处的压力（或压力系数）与圆柱半径无关。

图10-17上点划线所表示的为上面给出的表面压力的分布曲线。在$\theta=30^\circ$，150°，210°与330°处$c_p=0$。压力分布对称于ox轴与oy轴，因此压力的合力应等于零，即流体作用于圆柱体上的合力等于零。这一结论不只适用于圆柱体，同时还可以推广到任意剖面形状的柱体绕流的问题中去。但一先决条件应是流体在绕过物体时不发生脱流现象，即流体不从物体表面分离而形成旋涡。理想流体均匀地绕过物体或物体在理想流体中作等速运动时不受合力的作用，这就是著名的达朗伯尔疑题。





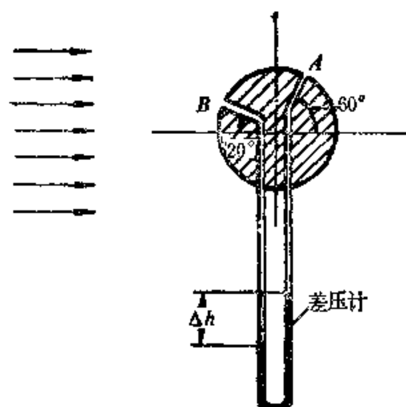


图 10-17　圆柱表面的压力分布

图10-18　圆柱绕流表面压力

在实际流体中，由于粘性的作用，流体在绕过圆柱时必然产生粘性摩擦，而且在圆柱绕流的后面部分形成脱流和尾涡(图10-17)，圆柱表面上的速度分布与压力分部不再是关于ox轴对称的了，流动图案和上述的理想绕流截然不同。图10-17b中的实线所代表的压力分布曲线即为实验所得的结果。因此，圆柱体在实际流体的绕流过程中将会受到一以阻力形式出现的合力作用。

［例10-3］　如图10-18所示的一个半径$a=1$m的圆柱体被无穷远速度为$v_\infty=50$m/s的均匀来流绕过。现从圆柱表面上开两个测压孔A和B。其位置为$\theta_A=60°$，$\theta_B=160°$。从两测压孔分别接出测压管到水银差压计（如图所示)。如果流体的密度是1.25kg/m^3(空气)，水银的密度为13.6，试求差压计中的液柱差Δh。又问差压计中哪支测压管中的液柱的液面较低。

［解］　差压计液面差可根据静力学原理如下计算：

$$\Delta h=\frac{\Delta p}{\gamma_{Hg}}=\frac{1}{\gamma_{Hg}}|p_B-p_A|$$

根据圆柱无环量绕流时表面压力分布的公式可知

$$p_B-p_\infty=\frac{1}{2}\rho v_\infty^2(1-4\sin^2\theta_B)$$

$$p_A-p_\infty=\frac{1}{2}\rho v_\infty^2(1-4\sin^2\theta_A)$$

故得

$$p_B-p_A=\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 4(\sin^2\theta_A-\sin^2\theta_B)$$

$$=2\rho v_\infty^2(\sin^2\theta_A-\sin^2\theta_B)$$

因此

$$\Delta h=\frac{1}{\gamma_{Hg}}2\rho v_\infty^2|\sin^2\theta_A-\sin^2\theta_B|$$

$$=\frac{2\rho v_\infty^2}{g\cdot\rho_{Hg}}|\sin^2\theta_A-\sin^2\theta_B|$$

$$=\frac{2\times1.25\times50^2}{9.81\times13600}\times|\sin^2 60°-\sin^2 160°|\,\text{m}$$

$$=0.0297\text{m}$$
$$=29.7\text{mm}$$

二、圆柱体的有环量绕流

假如我们让前面讨论过的圆柱再以等角速度ω绕其轴心顺时针旋转，如图10-20所示，则其绕流图形就同均匀流，偶极子及点涡三个流动的叠加后的情况相同。

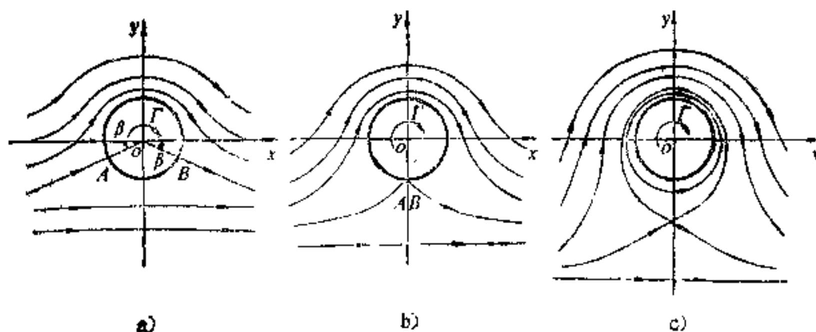


图10-19　圆柱体有环量绕流

圆柱的旋转所感生的流体运动相当于一个位于圆柱轴线处放置一线涡（在平面上观察即为一点涡）所感生的流动。如果ω的方向如图所给，则圆柱上半部流体的流速与均匀流来流方向一致，因而流体的运动速度是增加的。但下半部则相反，流速是减小的。这就使原来在x轴上的分流点A与B向下移动。其移动的程度依赖于ω或点涡强度Γ的大小，下面将仔细分析这一情况。

圆柱有环量绕流的复势为：

$$W=v_\infty\left(z+\frac{a^2}{z}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z$$

由于点涡Γ的方向为顺时针，故应为负值（参考前面点涡一节），故复势为

$$W=v_\infty\left(z+\frac{a^2}{z}\right)-\frac{|\Gamma|}{2\pi i}\ln z \tag{10-38}$$

在分流点$z_分$处流速应等于零，故

$$\frac{dW}{dz}=v_\infty\left(1-\frac{a^2}{z_分^2}\right)+\frac{i|\Gamma|}{2\pi}\frac{1}{z_分}=0$$

根据上式便可解出分流点的位置$z_分$：

$$\frac{z_分^2}{a^2}+\frac{z_分}{a}\frac{i|\Gamma|}{2\pi av_\infty}-1=0$$

所以得
$$z_分=a\left[-\frac{i|\Gamma|}{4\pi av_\infty}\pm\sqrt{1-\left(\frac{|\Gamma|}{4\pi av_\infty}\right)^2}\right] \tag{10-39}$$

由式（10-39）可知，分流点的位置视点涡强度Γ与均匀流的速度v_∞而定，现分别讨论如下：

（1）第一种情况

$$|\Gamma|<4\pi av_\infty\text{或}\frac{|\Gamma|}{4\pi av_\infty}<1$$

令 $|\Gamma|/4\pi a v_\infty=\sin\beta$代入式（10-39）则得

$$z_{分}=a[\pm\cos\beta-i\sin\beta] \tag{10-40}$$

所以分流点在圆柱上的A、B两点处，如图10-20a所示。若已知分流点在A与B点，则围绕圆柱的环量必等于$4\pi a v_\infty\sin\beta$。

（2） 第二种情况

$$|\Gamma|=4\pi a v_\infty 或 \frac{|\Gamma|}{4\pi a v_\infty}=1$$

在此情况下$|\Gamma|/4\pi a v_\infty=\sin\beta=1$，$\beta=\frac{\pi}{2}$。将之代入式（10-39)得

$$z_{分}=-ia \tag{10-41}$$

即两个分流点合而为一，且位置圆柱表面的底部，如图10-20b所示。

（3） 第三种情况

$$|\Gamma|>4\pi a v_\infty 或 \frac{|\Gamma|}{4\pi a v_\infty}>1$$

令$|\Gamma|/4\pi a v_\infty=\mathrm{ch}\beta$，并将之代入式（10-39）得

$$\left.\begin{aligned}&z_{分}=ia[-\mathrm{ch}\beta\pm\mathrm{sh}\beta]\\&z_{分1}=-iae^{\beta},\quad z_{分2}=-iae^{-\beta}\end{aligned}\right\} \tag{10-42}$$

或

$$z_{分1}z_{分2}=-a^2$$

若$z_{分1}=z_{分2}=-ia$(即当$e^{\beta}=e^{-\beta}$时)，则流动即成为第二种情况。不然$z_{分}$与$z_{分2}$的模中必然有一个小于a，而另一个大于a，亦即一个分流点在圆柱内部(这实际上不可能)，可不予考虑，而另一个在圆柱表面之外，如图10-20c所示。在此情况下，有部分流体在圆柱周围形成一个环形流动，形成封闭的流线，与周围其他绕流的流体截然分开。

有环量绕流时速度场不再为对称的了。平面上任一点的复速度为

$$\bar{v}=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}=v_\infty\left(1-\frac{a^2}{z^2}\right)+i\frac{|\Gamma|}{2\pi}\frac{1}{z} \tag{10-43}$$

给定任一点z，代入上式后将实、虚部分开，即得该点速度的x，y轴分量。

圆柱表面速度的求法与上述同，(令$z=ae^{i\theta}$即可)。但我们可按另一方法求：表面速度等于无环量绕流时的速度加上点涡在表面引起的速度之和，即

$$v=2v_\infty\sin\theta+\frac{|\Gamma|}{2\pi a} \tag{10-44}$$

可见速度的大小不再关于ox轴对称了，而关于oy轴还是对称的。根据伯努里方程，压力的表面分布也有同样的特点。

下面来讨论流体作用在圆柱体上的合力问题。如图10-21所示，在圆柱体表面任取一微小弧段$\mathrm{d}l$，其张角为$\mathrm{d}\theta$，则作用在$\mathrm{d}l$上的流体总压力$\mathrm{d}P$的两个分量是

$$\mathrm{d}P_x=-\mathrm{d}P\cos\theta=-p\mathrm{d}l\cos\theta=-p\cos\theta\mathrm{d}l$$

$$\mathrm{d}P_y=-\mathrm{d}P\sin\theta=-p\mathrm{d}l\sin\theta=-p\sin\theta\mathrm{d}l$$

将$\mathrm{d}l=a\mathrm{d}\theta$代入上式得

$$\mathrm{d}P_x=-pa\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

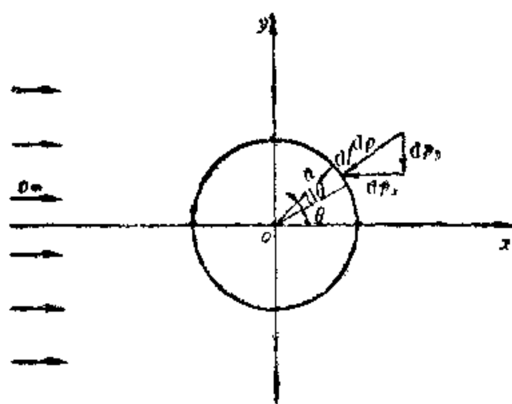


图10-20 圆柱表面上的总压力

$$dP_y = -pa\sin\theta d\theta$$

合力的x，y轴分量可积分求得

$$\left.\begin{aligned} f_X &= \int dP_x = -\int_0^{2\pi} pa\cos\theta d\theta \\ f_Y &= \int dP_y = -\int_0^{2\pi} pa\sin\theta d\theta \end{aligned}\right\} \tag{10-45}$$

根据圆柱表面速度及伯努里方程可求表面压力p：

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$= p_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho\left(2v_\infty\sin\theta + \frac{|\Gamma|}{2\pi a}\right)^2$$

将之代入式（10-45）得：

$$f_X = -\int_0^{2\pi}\left[p_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho\left(2v_\infty\sin\theta + \frac{|\Gamma|}{2\pi a}\right)^2\right]a\cos\theta d\theta$$

$$= 0 \tag{10-46}$$

$$f_Y = -\int_0^{2\pi}\left[p_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho\left(2v_\infty\sin\theta + \frac{|\Gamma|}{2\pi a}\right)^2\right]a\sin\theta d\theta$$

$$= \rho v_\infty |\Gamma| \tag{10-47}$$

由式（10-46）与（10-47）可得出下列结论：

（1） $f_X=0$，说明在理想流体中，当均匀流绕过圆柱时即便有环量存在，流体作用在圆柱上的合力沿均匀流动方向的分量（即阻力）也等于零。

（2） f_Y与均匀流方向垂直，故此分力称作升力或举力。$f_Y=\rho v_\infty|\Gamma|$称作茹可夫斯基升力公式。此式说明在有环量的圆柱绕流时，圆柱体将受流体的一个合力作用，此合力垂直于均匀来流，大小为点涡强度Γ，均匀来流速度v_∞和流体的密度ρ三者的乘积。若把逆时针方向的环量作为其正方向，则茹可夫斯基升力公式还可写成

$$f_Y = -\rho v_\infty \Gamma \tag{10-48}$$

（3） 若把来流方向或环量方向反过来，则升力方向也与前述的相反。综合前述的，不管来流与环量方向如何，只要将速度v_∞沿环量的反方向转90°，则所指的方向即为升力f_Y的方向了。

第七节　勃拉修斯公式与茹可夫斯基定理

在上节中我们曾得到一结论，即圆柱体被理想流体绕过时，流体作用在其上的力只有垂直来流方向的升力而无沿来流方向的所谓阻力。下面我们将证明，任何断面形状的柱体被理想流体绕过时都将如此。

一、勃拉修斯公式

设有一任意断面形状的柱体为流体绕过形成一平面流动。若已知其绕流复势W，则可用

下述方法求出流体作用在柱体上的力及力矩。

如图10-21所示，当把z轴取为柱体轴线时，柱体的剖面形状如图上xoy面上的封闭周线l所围成的那样。假定流体作用在此柱体上的合力是F，其两坐标分量为F_x与F_y。由于现还不知道F的作用点的位置，因此可归结为作用在坐标原点o处的作用力F_x与F_y以及对o点的力矩M。

如同速度一样，在复平面上作F的关于ox轴的镜象（反影）来表示该力：

$$F=F_x-iF_y$$

在封闭曲线l上取一微段dl，并设该处的压力为p，速度为v，dl处的切线与ox轴之夹角为α，则在复平面上

$$dz=dx+idy=dse^{i\alpha}$$

$$d\bar{z}=dx-idy=dse^{-i\alpha}$$

式中dx，dy为dl的两坐标分量。由上两式可知

$$d\bar{z}=dze^{-2i\alpha} \qquad (10\text{-}49)$$

作用在dl段（单位厚度）上的力及其分量为

$$dF=pdl,\quad dF_x=-pdy,\quad dF_y=pdx$$

故
$$\begin{aligned}dF&=dF_x-idF_y=-pdy-ipdx\\&=-ip(dx-idy)\\&=-pid\bar{z}\end{aligned}$$

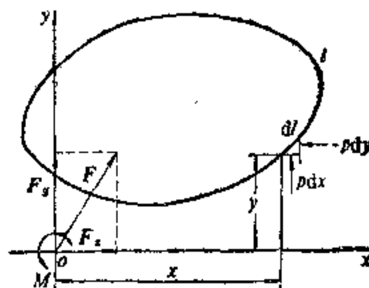


图10-21　任意剖面柱体绕流受力图

式中的p可根据伯努里方程来求：

$$p+\frac{1}{2}\rho v^2=c$$

或
$$p=c-\frac{1}{2}\rho v^2$$

式中之c为常数。由此可得

$$dF=-i\left(c-\frac{1}{2}\rho v^2\right)d\bar{z}$$

沿柱体剖面的周线l积分一周得：

$$F=\int dF=\oint_l -i\left(c-\frac{1}{2}\rho v^2\right)d\bar{z}$$

$$=\frac{1}{2}i\rho\oint_l v^2d\bar{z} \qquad (10\text{-}50)$$

由于物体表面是一流线，故在ds处速度v的方向与dl之切线方向相同，亦即v与ox轴之夹角为α。根据复速度的定义可得

$$\frac{dW}{dz}=v_x-iv_y=ve^{-i\alpha} \qquad (10\text{-}51)$$

将式（10-51）及式（10-49）代入式（10-50）得

$$F=\frac{i\rho}{2}\oint_l v^2e^{-2i\alpha}dz=\frac{i\rho}{2}\oint_l (ve^{-i\alpha})^2dz$$

$$=\frac{i\rho}{2}\oint_l\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz$$

或
$$F_x-iF_y=\frac{i\rho}{2}\oint_l\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz \tag{10-52}$$

作用在dl段的作用力dF对点O的力矩dM是

$$dM=pdxx+pdyy=-ydF_x+xdF_y$$

当考虑到

$$i(x+iy)[dF_x-idF_y]=(-ydF_x+xdF_y)+i(xdF_x+ydF_y)$$

因此　　$dM=idz(dF_x-idF_y)$ 之实部

沿柱体剖面的周线 l 积分一周后得

$$M=-\frac{\rho}{2}\oint_l\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 zdz\text{的实部}$$

或写成

$$M=R_e\left\{-\frac{\rho}{2}\oint_l\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 zdz\right\} \tag{10-53}$$

式中符号R_e表示某复数的实数部分。式（10-52）与（10-53）称为勃拉修斯公式或勃拉修斯—卡布雷金公式。应用此两式，可根据已知的绕流复势直接求出流体作用于柱体上的合力及力矩。

二、茹可夫斯基升力公式（定理）

根据勃拉修斯公式可以推出便于计算流体对被绕流柱体的作用力的公式——茹可夫斯基升力公式(定理)。下面我们来推导它。

在流场中任意点处的复速度都可以展开成复数幂级数，即

$$\frac{dW}{dz}=A_0+\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z^2}+\frac{A_3}{z^3}+\cdots \tag{10-54}$$

因而
$$\left(\frac{dW}{dz}\right)^2=A_0^2+\frac{2A_0A_1}{z}+\frac{A_1^2+2A_0A_2}{z^2}+\cdots$$

于是
$$F_x-iF_y=\frac{i\rho}{2}\oint_l\left[A_0^2+\frac{2A_0A_1}{z}+\frac{A_1^2+2A_0A_2}{z^2}+\cdots\right]dz \tag{10-55}$$

由于
$$\oint_l dz=0;\quad \oint_l\frac{dz}{z^2}=\left[-\frac{1}{z}\right]_l=0$$

依此可类推
$$\oint_l\frac{dz}{z^3}=\oint_l\frac{dz}{z^4}=\cdots=0$$

而
$$\oint_l\frac{dz}{z}=[\ln z]_l=[\ln(re^{i\theta})]_l=[\ln r+\ln e^{i\theta}]_l$$

$$=0+[i\theta]_0^{2\pi}=2\pi i$$

将之代入式（10-55）得：

$$F_x-iF_y=\frac{i\rho}{2}2\pi i2A_0A_1=-2\pi\rho A_0A_1 \tag{10-56}$$

同理可得

$$M=R_e\left\{-\frac{\rho}{2}\oint_l\left[A_0^2+\frac{2A_0A_1}{z}+\frac{A_1^2+2A_0A_2}{z^2}+\cdots\right]z\mathrm{d}z\right\}$$

$$=R_e\{-i\pi\rho[A_1^2+2A_0A_2]\} \tag{10-57}$$

由此可知，作用在物体上的力及力矩只与$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}$展开式中头三个系数$A_0$，$A_1$与$A_2$有关。而其中的$A_0=\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right)_{z\to\infty}=\bar{v}_\infty$，即系数$A_0$实为无穷远来流的复速度。而系数$A_1$可由下列积分求出：

$$\oint_l\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right)\mathrm{d}z=\oint_l\left(A_0+\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z^2}+\cdots\right)\mathrm{d}z=2\pi iA_1$$

但又有
$$\oint_l\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right)\mathrm{d}z=\oint_l\mathrm{d}W=\oint_l\mathrm{d}\varphi+i\oint_l\mathrm{d}\psi$$

因为沿柱体表面积分一周时$\oint_l\mathrm{d}\psi=0$而

$$\oint_l\mathrm{d}\varphi=\Gamma$$

代入前式得

$$2\pi iA_1=\Gamma$$

故
$$A_1=\frac{\Gamma}{2\pi i}$$

将A_0，A_1之值代入式（10-56）与式（10-57）得

$$F=F_x-iF_y=i\rho\bar{v}_\infty\Gamma \tag{10-58}$$

$$M=R_e[-2\pi i\rho\bar{v}_\infty A_2] \tag{10-59}$$

由式（10-58）可知

$$\bar{F}=F_x+iF_y=-i\rho v_\infty\Gamma \tag{10-60}$$

此即茹可夫斯基升力公式。此力与无穷远来流速度方向相垂直，其指向为将v_∞逆着环量方向转一直角后所指的方向。其大小等于流体密度，环量及无穷远来流速度三者的乘积。若以F_L表示升力，v_∞表示无穷远均匀来流的速度，Γ表示围绕柱体一周的环量，则茹可夫斯基升力公式或定理可写成：

$$F_L=\rho v_\infty\Gamma$$

这一结论在圆柱体有环量绕流时曾推出过。可见圆柱体的情况只不过是茹可夫斯基定理应用的一个特例而已。

至于力矩的计算，要取决于公式中的A_2之值。这就要根据具体流动的复势表达式来确定。

第八节　平面势流的保角变换解法

像圆柱这种剖面简单的柱体的绕流问题，可以通过基本的平面势流的叠加而得到解决。但若想求得剖面形状较复杂的柱体的绕流复势，用同样的办法就不太适用。在流体力学中有一种办法对付这种问题—应用复变函数中的保角变换法解决平面流动的势流问题。其基本想

法是：根据一个已知的流动，如绕圆柱的平面势流，用保角变换法将之变成另一种复杂剖面柱体的平面势流，而该平面势流正是我们所要求得其解的流动。下面简要的介绍一下保角变换法的要点：

保角变换是用某一个解析的复变函数将一个平面的某一区域变为另一个平面上的某一区域。那个解析的复变函数称为变换函数或变形函数。

假定在复变数$z=x+iy$平面上某区域S内给定某一解析的复变函数或变换函数

$$\zeta=f(z)$$

亦即在z平面的S区域内的每一点上，该函数是单值的且可微分的。因此在z平面上S区域内的任何一点必在另一复数平面$\zeta=\xi+i\eta$上有一个与之相对应的点，如图10-22所示。对应于S区域的所有点z，通过$\zeta=f(z)$，必在ζ平面上形成一个新的区域S'。因而，z平面的S区域通过单值的解析变换函数$\zeta=f(z)$转变为ζ平面上的S'区域。假定在z平面上S区域内给定一点z以及经过点z的两条曲线L_1，L_2，则在ζ平面上的S'区域内必有与之相对应的点ζ以及经过该点的两条曲线L'_1，L'_2。

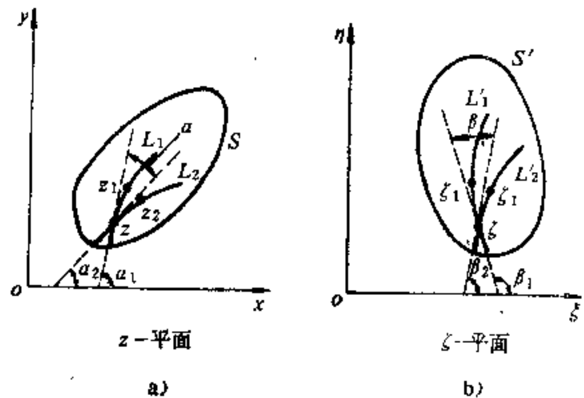


图10-22 图形的保角变换

在z平面的曲线L_1上取一点$z_1=z+\Delta z_1$，在曲线L_2上取一点$z_2=z+\Delta z_2$，则在ζ平面的L'_1与L'_2上必有与之相对应的$\zeta_1=\zeta+\Delta\zeta_1$与$\zeta_2=\zeta+\Delta\zeta_2$，如图所示。因为$\zeta=f(z)$是解析函数，所以不论$z+\Delta z$从何方向趋近$z$，下列极限始终为一常值：

$$\lim_{\Delta z_1\to 0}\frac{\Delta\zeta_1}{\Delta z_1}=\lim_{\Delta z_2\to 0}\frac{\Delta\zeta_2}{\Delta z_2}=f'(z) \tag{10-61}$$

因为

$$\Delta\zeta_1=|\Delta\zeta_1|e^{i\beta_1},\quad \Delta\zeta_2=|\Delta\zeta_2|e^{i\beta_2}$$

$$\Delta z_1=|\Delta z_1|e^{i\alpha_1},\quad \Delta z_2=|\Delta z_2|e^{i\alpha_2}$$

代入上式有

$$\lim_{\Delta z_1\to 0}\left[\frac{|\Delta\zeta_1|}{|\Delta z_1|}e^{i(\beta_1-\alpha_1)}\right]=\lim_{\Delta z_2\to 0}\left[\frac{|\Delta\zeta_2|}{|\Delta z_2|}e^{i(\beta_2-\alpha_2)}\right]$$

当考虑z_1与z_2离z点很近时可近似的有

$$\frac{|\Delta\zeta_1|}{|\Delta z_1|}=\frac{|\Delta\zeta_2|}{|\Delta z_2|},\quad \beta_1-\alpha_1=\beta_2-\alpha_2$$

或

$$\frac{|\Delta\zeta_1|}{|\Delta\zeta_2|}=\frac{|\Delta z_1|}{|\Delta z_2|},\quad \beta_1-\beta_2=\alpha_1-\alpha_2 \tag{10-62}$$

由式(10-62)可知，利用单值解析变换函数所作的图形变换，在导数$f'(z)$不等于零或无穷大的各点处具有保角性。因而两组相互正交的曲线族经过保角变换后所得到的两组曲线族仍是正交的。

本章开始即阐明过，平面势流的流谱是由两族相互正交的曲线，即等势线与流线所组成。既然在保角变换时正交性不破坏，所以可借助某一适当的变换函数将一种势流变换成另一种势流。这样即可根据一种已经充分分析清楚的较简单的势流变换成所需研究的未知流动，求出其复势。

设在z平面上流动的复势是：

$$W_z = W(z)$$

其复速度是

$$v_z = \frac{dW_z}{dz}$$

通过某一变换函数$\zeta = f(z)$则可得到流动在ζ平面上的复势

$$W_\zeta = W[f^{-1}(\zeta)] = W(\zeta)$$

式中$f^{-1}(\zeta)$是$\zeta = f(z)$的反函数。在ζ平面上，复速度为

$$v_\zeta = \frac{dW_\zeta}{d\zeta}$$

同时还有

$$\frac{dW_\zeta}{d\zeta} = \frac{dW_z}{dz} \bigg/ \frac{d\zeta}{dz}$$

流体在z平面中任意点处有一定的速度，变换到ζ平面上以后在相应点处的速度也必需是一定的。那末根据上式$\frac{d\zeta}{dz}$必须是单值函数，同时不能等于零，否则ζ平面上该点的流速将为无穷大，而这在实际上是不可能的。

在z平面上流动的分流点处的速度等于零，即$\frac{dW_z}{dz} = 0$，因而

$$\frac{dW_\zeta}{d\zeta} = \frac{dW_z}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = 0$$

故通过变换，分流点仍变为分流点。

另外，设在z平面上沿任一封闭曲线C的速度环量为：

$$\Gamma_z = \oint_C \frac{dW_z}{dz} dz \text{的实数部分}$$

变换到ζ平面以后，沿对应的封闭曲线C'的速度环量为：

$$\begin{aligned}
\Gamma_\zeta &= \oint_{C'} \frac{dW_\zeta}{d\zeta} d\zeta \text{的实数部分} \\
&= \oint_C \frac{dW_z}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta} \cdot d\zeta \text{的实数部分} \\
&= \oint_C \frac{dW_z}{dz} dz \text{的实数部分} \\
&= \Gamma_z
\end{aligned} \tag{10-63}$$

即通过保角变换后速度环量不改变。

还有一点需注意，即在变换时无穷远处的流动速度如何变化的问题。设$v_{z\infty}$为z平面上无穷远处的速度，$v_{\zeta\infty}$为ζ平面上的无穷远处的速度。假设某变换函数$\zeta = f(z)$使z平面上的无穷

远点变换到ζ平面上的无穷远点，则

$$v_{\zeta\infty}=\left(\frac{\mathrm{d}W_\zeta}{\mathrm{d}\zeta}\right)_{\zeta\to\infty}=\left(\frac{\mathrm{d}W_z}{\mathrm{d}z}\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\right)_{\zeta\to\infty}$$

$$=\left(\frac{\mathrm{d}W_z}{\mathrm{d}z}\right)_{z\to\infty}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\right)_{\zeta\to\infty}$$

$$=v_{z\infty}\Big/\left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right)_{z\to\infty} \qquad (10-64)$$

此式说明，若$\zeta=f(z)$将无穷点变为无穷远点，则无穷远点处的速度在变换时将按上式的关系发生变化。

第九节　椭圆柱与平板绕流

本节将讨论应用保角变换法确定均匀流绕过椭圆柱体与平板时所形成的平面流动的复势的问题

一、椭圆柱体的绕流

由复变函数理论可知，复变函数

$$z=\zeta+\frac{c^2}{\zeta}\quad 或\quad \zeta=\frac{1}{2}\left(z\pm\sqrt{z^2-4c^2}\right)$$

为一在除点$\zeta=0$点以外的整个平面区域内单值解析的复变函数。它可将ζ平面上的一个圆域变换成z平面上的一个椭圆域。

设在ζ平面（一般称此复变平面为辅助平面）上有一半径为a的圆被无穷远速度为v^*_∞（为简单起见，一开始不妨设其方向沿实轴正方向，如图10-23所示）的均匀来流所绕过。前已讨论过，在此辅助平面上流动的复势为：

$$W^*=v_\infty{}^*\left(\zeta+\frac{a^2}{\zeta}\right) \qquad (10-65)$$

变换函数$z=\zeta+\dfrac{c^2}{\zeta}$可使平面$\zeta$上的无穷远点变换成$z$平面（一般称此平面为物理平面）上的无穷远点，因为当$\zeta\to\infty$时$\dfrac{c^2}{\zeta}\to0$，故z也趋向无穷，这很容易从变换函数式上观察出来。

再来看两平面上无穷远处的速度之间的关系。由式(10-64)可知，在物理平面z上无穷远处的复速度应为：

$$v_\infty=v_\infty{}^*\Big/\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\right)_{\zeta\to\infty}$$

$$=v_\infty{}^*\Big/\left(1-\frac{c^2}{\zeta^2}\right)_{\zeta\to\infty}$$

$$=v_\infty{}^* \qquad (10-66)$$

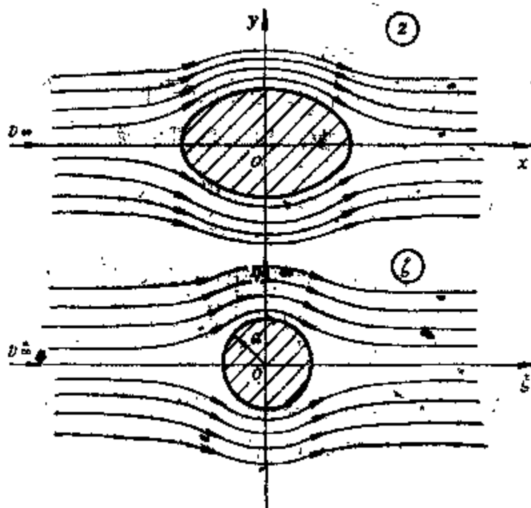


图10-23　椭圆柱体的绕流

即在z平面上无穷远处的速度的大小和方向都

$$
\begin{cases}
W = v_\infty^* \left(\zeta + \dfrac{a^2}{\zeta} \right) \\
\quad = v_\infty \left(\zeta + \dfrac{a^2}{\zeta} \right) \\
\zeta = \dfrac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - 4c^2} \right)
\end{cases} \tag{10-67}
$$

根号前之符号取正号的原因是因当$\zeta = a$时，$z = a + \dfrac{c^2}{a} = \dfrac{a^2 + c^2}{a}$之故。由上式可有

$$
\begin{aligned}
W &= v_\infty \left(\zeta + \frac{c^2}{\zeta} - \frac{c^2}{\zeta} + \frac{a^2}{\zeta} \right) \\
&= v_\infty \left[z + \frac{2(a^2 - c^2)}{z + \sqrt{z^2 - 4c^2}} \right]
\end{aligned} \tag{10-68}
$$

这就是物理平面一个椭圆柱体为无穷远速度为v_∞的均匀来流绕过时的复势。式中的a与c可根据椭圆的长、短半轴的大小来确定。

二、椭圆柱体有环量绕流

有环量的椭圆柱体的绕流复势同样可用前述的变换函数，从圆柱体的有环量绕流复势求得。在求解时需注意的是，用$z = \zeta + \dfrac{c^2}{\zeta}$作变换时，在物理平面与辅助平面上环量值相同，这在前节已指出过。

在辅助平面ζ上绕圆柱的复势是

$$
W^* = v_\infty^* \left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta} \right) + \frac{\Gamma^*}{2\pi i} \ln \zeta
$$

于是经变换后，物理平面上绕椭圆的复势即为：

$$
W = v_\infty \left[z + \frac{2(a^2 - c^2)}{z + \sqrt{z^2 - 4c^2}} \right] + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 4c^2} \right) \tag{10-69}
$$

式中的$\Gamma = \Gamma^*$。

三、平板绕流

如图10-24所示，在物理平面z上有铅直放置的平板，其长度为$4a$。速度为v_∞的无穷远均匀来流绕过此平板，现来求其绕流复势。

通过变换函数$z = \zeta - \dfrac{a^2}{\zeta}$，可将辅助平面上的半径为$a$的圆的绕流变换成物理平面上绕该平板的流动，进而可求得其绕流的复势。

与前面椭圆柱绕流的分析相同，这里提出的变换函数也是将一平面的无穷远点变为另一平面的无穷远点，并且无穷远处的速度之大小与方向在变换时不改变。

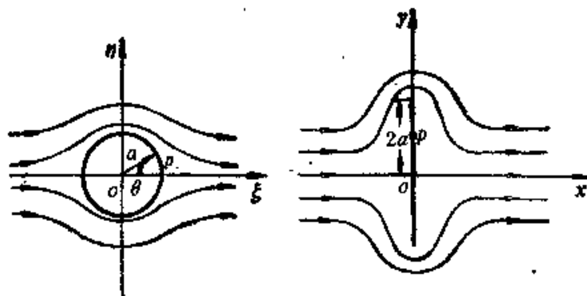


图10-24 平板绕流

在辅助平面ζ上圆的某点$A^*(\xi,\ \eta)$上为

$$\zeta=ae^{i\theta}$$

它在物理平面z上之对应点将是

$$z=\zeta-\frac{a^2}{\zeta}=ae^{i\theta}-\frac{a^2}{ae^{i\theta}}=ae^{i\theta}-ae^{-i\theta}$$

$$=i2a\sin\theta$$

即对应点A的两坐标x与y为

$$\left.\begin{aligned}x&=0\\y&=2a\sin\theta\end{aligned}\right\}\tag{10-70}$$

在ζ平面上当θ由 0 变化到$\frac{\pi}{2}$时，在z平面上y由0变化到$2a$；当θ由$\frac{\pi}{2}$变到π时，y由$2a$变到0；当θ由π变到$\frac{3\pi}{2}$时，y由0变到$-2a$，最后当θ由$\frac{3\pi}{2}$又变回到2π(即0)时，y则由$-2a$又变回到0。可见通过所给的变换函数，半径为a的圆对应的是高为$4a$的铅直平板。

因为变换函数是$z=\zeta-\frac{a^2}{\zeta}$，其反变换函数即为

$$\zeta=\frac{1}{2}\left(z\pm\sqrt{z^2+4a^2}\right)$$

由于$\zeta=a$时，$z=0$，故上式根号前应取正号。于是垂直平板的绕流复势即为：

$$W=v_\infty^*\left(\zeta+\frac{a^2}{\zeta}\right)=v_\infty^*\left(\zeta-\frac{a^2}{\zeta}+\frac{a^2}{\zeta}+\frac{a^2}{\zeta}\right)$$

$$=v_\infty^*\left(\zeta-\frac{a^2}{\zeta}+\frac{2a^2}{\zeta}\right)$$

$$=v_\infty\left[z+\frac{4a^2}{z+\sqrt{z^2+4a^2}}\right]$$

$$=v_\infty\left[\frac{z(z+\sqrt{z^2+4a^2})+4a^2}{z+\sqrt{z^2+4a^2}}\right]$$

$$=v_\infty\sqrt{z^2+4a^2}\tag{10-71}$$

这就是绕铅直平板的复势。绕水平平板的复势将在后面的机翼一章中讲到。

第十节　断裂绕流概述

在前面分析了理想流体对柱体的绕流的解法。那时流体被假设成理想的，流动是连续的，在被绕流的物体后面流线是闭合的。但实际上流体为有粘性的，故流体绕过物体时一般总要产生分离现象，使流线在物体后面不能闭合(如图10-25所示)。这就是所谓的断裂绕流。流体从物体表面上分离一般多在物体的最大迎流断面处。为了更好地说明这种现象，亥姆霍兹首先抛开了速度场连续的假设，而引进在物体尖缘处出现脱体流线（或称自由流线）并且伸展到物体后面无穷远这一事实。在物体后面，自由流线将围成一个无限大的"死水区"。

设从无穷远流来的流线遇到物体周线的点A处（A为驻点，$v_A=0$）之后分流成为两支流

线沿周线流到点B_1与B_2，然后离体。离体之后的两条自由流线B_1C_1与B_2C_2将伸展到无穷远处，并把流动区域分成流动区域Ⅰ和静止区域（或称死水区）Ⅱ。流动区域Ⅰ可被认为是连续的势流，而区域Ⅱ作为死水区看待只是一种近似，它与实际的流动情况仍有出入。实际上，流动的间断面，即自由流线并不伸向无穷远，死水区中的流体也并非静止的，而是充满大量旋涡的一个区域。

根据亥姆霍兹的假设，伸向无穷远的死水区中，流体的速度到处为零。如果不考虑重力的影响，则在该区域中的压力到处也应一样。因而自由流线（即为死水区的边界）上的压力也应为同样大小。于是由伯努里方程可知，自由流线B_1C_1与B_2C_2上各处的速度必须保持为一常数。这个自由流线因为伸展到无穷远，故自由流线上的速度就等于流体无穷远处的速度。

下面举一断裂绕流之例。设在水渠（如图10-26所示）内横着放置一平板，平板边缘离

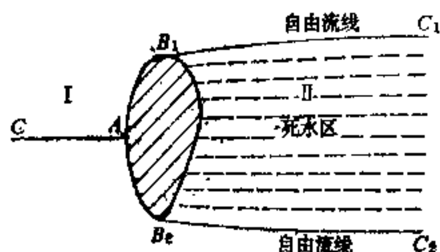


图10-25　断裂绕流

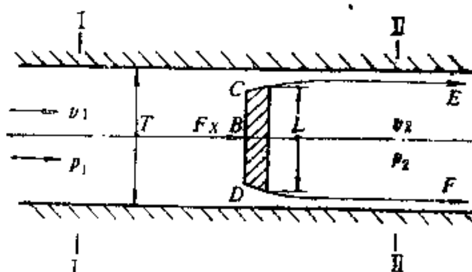


图10-26　水渠内的平板断裂绕流

渠边距离相等。速度为v_1的无穷远来流沿渠道冲向平板，并在绕过平板时产生离体的断裂流，在平板后形成一死水区。我们最感兴趣的是平板对流动的阻力或水流对平板的推力。

流体冲向平板，在点B处分流，然后分两路流到两边缘点C与D。从C与D开始流动就脱离了平板而形成两自由流线CE与DF伸到无穷远。平板与自由流线将流动分为动区域Ⅰ与死水区Ⅱ，而且这两区域内的流动都是有势的（后者为静止的，当然有势）。若忽略质量力，则分流点B处因速度为零，由伯努里方程可知，此处压力将最大：$p_B=p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2$。式中$p_1$与$v_1$为平前无穷远处的压力与速度。从脱流点$B$到平板边缘$C$与$D$的过程中流速将从零增大到$v^2$。由于过流断面的减小，$v_2$显然要大于$v_1$。因而点$C$与$D$处的压力必小于$p_1$，更小于点$B$处的压力。可见压力从平板中心到边缘压力是逐渐降低的。从平板边缘到板后无穷远的自由流线上（CE与DF）压力将等于死水区内的压力。因死水区内各处的压力相等且为一常数，故在自由流线上的压力也为这一常数。写出平板前无穷远点与板后无穷远点的伯努里方程：

$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_E+\frac{1}{2}\rho v_2^2$$

后可得：

$$p_E=p_1+\frac{\rho}{2}\left(v_1^2-v_2^2\right) \tag{10-72}$$

由于$v_2>v_1$，从上式可知，$p_E<p_1$。而p_E实际上即为死水区Ⅱ内的压力。可见平板前面的压力大于其后面的压力，于是平板前后出现一压差，形成了流动阻力。

下面讨论一下绕流阻力的大小问题。设水渠宽为T，平板宽为L。在平板前后较远处分别取断面Ⅰ-Ⅰ与Ⅱ-Ⅱ，其上之流速分别为v_1与v_2，压力分别为p_1与p_2。根据动量方程有：

$$-F_X+p_1T-p_2T=\rho v_1T(v_2-v_1)$$

或

$$F_X=T[p_1-p_2-\rho v_1(v_2-v_1)] \tag{10-73}$$

式中之F_X即为流体作用于平板上力，或称流动阻力（参看图10-26)。

由伯努里方程可知，

$$p_1-p_2=\frac{1}{2}\rho\left(v_2^2-v_1^2\right)$$

将之代入式(10-73)得：

$$F_X=\frac{1}{2}\rho T(v_2-v_1)^2 \tag{10-74}$$

式(10-74)给出了流动的阻力.对水渠中的平板绕流，通常只知道v_1与v_2中的一个。当v_1已知时，还必须设法求出v_2。为此我们改写式(10-74)如下：

$$F_X=\frac{1}{2}\rho Tv_2^2\left(1-\frac{v_1}{v_2}\right)^2$$

或

$$F_X=\frac{1}{2}\rho Tv_1^2\left(\frac{v_2}{v_1}-1\right)^2$$

即当知道v_1与v_2中之一后，只须再知道比值$\frac{v_2}{v_1}$或$\frac{v_1}{v_2}$，即能求出阻力F_X了。

通常阻力F_X写成如下形式

$$F_X=c_x\frac{1}{2}\rho v_2^2L \tag{10-75}$$

将式(10-75)与式(10-74)相比较可知

$$c_x=\frac{T}{L}\left(1-\frac{v_1}{v_2}\right)^2$$

$$=\frac{T}{L}\left(1-K\right)^2$$

式中$K=v_1/v_2$。c_x被叫作阻力系数，其值与渠宽，板宽与K值有关。而其中关键是K值。

在断裂绕流的讨论中主要是解决求K值的问题。利用速度端图法，通过保角变换，便可求出板宽与渠宽的比值与K值的关系式.在较高一级的流体力学教程中都有关于其解法(如史瓦茨法）的讨论，这里不详述了。下面只给出其结果如右表

L/T	k	c_x
1.0	0	1.0
0.697	0.2	0.942
0.397	0.4	0.908
0.180	0.6	0.890
0.045	0.8	0.882
0	1.0	0.880

右表所给出的阻力系数c_x值和实验结果相差较大，其原因是忽略了粘性与解法中所作的一些假设与实际流动不甚符合。实际上在死水区中流体并非静止的，而是有大量紊乱的旋涡存在于其中。因此实际的阻力要大得多。

第十一节　平面势流的水电比拟解法

水电比拟是一种解决平面势流的实验解法。它是根据流动的有势流场与电场这两种不同的物理现象服从于同一数学规律而建立的。因而只要在模拟的电场中测量出一些量，即可根据一定的换算关系得到流场中相应的量。我们知道，电场的测量要比流场测量简单易行，因此水电比拟法在流体力学中得到广泛的应用。它可以帮助我们解决叶栅、机翼等的平面绕流的动力特性，解决水工建筑物中的渗流，解决海港工程中的波浪等诸问题。在本节中只简要介绍水电比拟法的原理与方法。

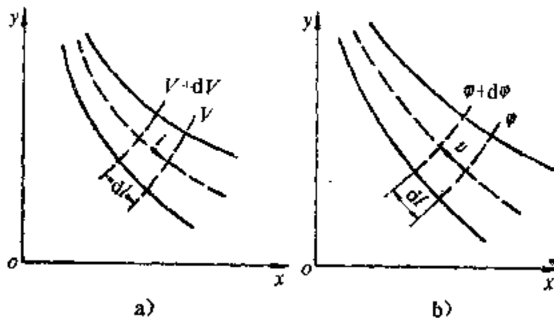


图10-27　电场与流场的模拟

如图10-27a所示，在电场的电流平面上取一电流束，并截取一微段dl。根据欧姆定律可得

$$i=-c\frac{\partial V}{\partial l}$$

式中i是电流密度，c是导电系数，V是电位势。取电流的坐标分量i_x与i_y：

$$i_x=-c\frac{\partial V}{\partial x},\quad i_y=-c\frac{\partial V}{\partial y}\tag{10-76}$$

根据电场的连续性可知：

$$\frac{\partial i_x}{\partial x}+\frac{\partial i_y}{\partial y}=0\tag{10-77}$$

在均匀导电介质的电场中导电系数在整个电场中是常数，即c=常数。于是由式(10-76)与式(10-77)可得

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0\tag{10-78}$$

即电场中的电位势V必满足拉普拉斯方程。

在图10-27b中我们给定一有势的平面流场，并取一流束。截取一微段dl的流束后，由势流的原理可知流速$v=\frac{\partial \varphi}{\partial l}$或

$$v_x=\frac{\partial \varphi}{\partial x},\quad v_y=\frac{\partial \varphi}{\partial y}\tag{10-79}$$

式中φ为速度势函数，v_x与v_y为速度v的两坐标分量。我们已知平面势流的势函数满足拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0$$

由上述分析可知，当把电场与势流场作比较时发现：电位势与速度势函数是两个对应量，电流与流速为另一对应量。电流与电位势的关系与流速与势函数的关系相同，电位势与速度势

函数都遵守同一的数学规律——拉普拉斯方程。这就给我们以将电场与势流场作比拟的启示，并通过电场某些量的测量来获取流场中相应量的值。我们知道拉普拉斯方程的解只有在边界条件相同时才相同。因此我们只要作一电场使之与所要求解的流场具有相似的边界条件，那么就可以由电场代替流场了。这就是水电比拟的原理。

下面举一例来讨论如何实现电场与流场的模拟以及求解的方法。如图10-28所示的一个平面势流场中一翼型为无穷远来流速度为v_∞的均匀流所绕过。该平面势流的边界条件是：

（1）在无穷远处等势线φ=常数是与v垂直的直线。实际上，在离翼型较远的地方，等势线即可近似的认为是垂直v_∞的直线，如图上的直线1-2与3-4。

（2）离翼型无穷远处的流线也是直线，平行于v_∞的方向。同样，在离翼比较远的地方即可认为流线是直的了，如图所示的直线1-3，2-4。

（3）在翼型表面上不可能有流体穿过，流体只能沿该面流动，即流体在翼型表面各点的速度的法向分量必须为零$v_n=\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}=0$（$n$为翼型表面的法向，或说翼型表面为一流线）。

为了在电场中模拟这样的边界条件，该电场必须作成：

（1）作一大小适中的矩形电解质槽（如图10-29），其两个对边1′-2′与3′-4′处安放电极板以形成两个等电位线，以及模拟流场中无穷远处的等势线。

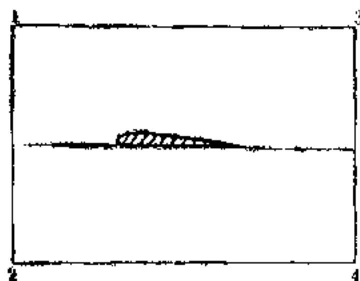


图10-28 翼形绕流边界条件

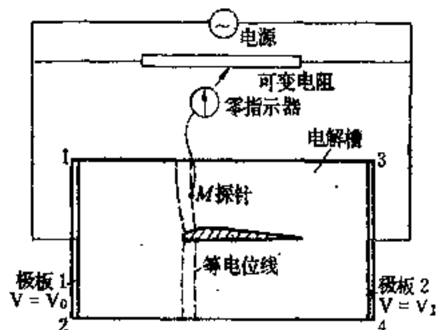


图10-29 模拟电场的边界条件

（2）电解槽的另两对边1′-3′与2′-4′应该电流线，故此两边必须用绝缘体作成，使电流不致于从该两边流出流进，而只能沿之流动形成电流线，从而模拟了流场中无穷远处的直流线。

（3）机翼的模型应该用绝缘材料作成，以使其表面成为电流线，来模拟流场中翼型表面为流线的特点。

这样一来就得到一个边界条件和流场几乎完全相同的模拟电场。为了得到流场中的等势线，只需如图所示，用惠斯登电桥原理设计一电路来测出电场各点的电位，然后绘出等电位线即可。

这一测量电路由一个两端与电极板1与2并联的可变电阻及一个一端与滑线电阻相接触，另一端与探针相接的惠斯登电桥构成。该电桥的一对臂由滑线电阻器构成，另一对臂则由电解槽中的电解液构成。每当固定一个滑线电阻上的一个中点P，就可在槽中测到一系列电位与P点电位相同的等电位点M，它们即代表了等速度势线。

翼型表面上某点i处的速度可如下求出：

$$v_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial l_i} \approx \frac{\Delta \varphi_i}{\Delta l_i}$$

式中Δl_i为i点处流线方向的微小线段或等势线间距离。在无穷远处有

$$v_\infty \approx \frac{\Delta \varphi_\infty}{\Delta l_\infty}$$

故
$$\frac{v_i}{v_\infty} = \frac{\Delta s_\infty}{\Delta l_i}\quad, \quad v_i = \frac{\Delta l_\infty}{\Delta l_i} v_\infty \tag{10-80}$$

前面式中$\Delta\varphi_\infty$与$\Delta\varphi_i$分别是未受扰动的无穷远处与点i处两根相接近的等势线之间的势函数之差。在用电场模拟流场时，我们将把相应的电位差在该两处取为相同的值，例如可取为0.1伏。所以只要在模拟电场中测出Δl_i与Δl_∞的大小即可根据流场中无穷远处的速度v_∞用式(10-80)求出翼型表面任一点i处的速度。

压力系数如下法求：由伯努里方程可知

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 = p_i + \frac{1}{2}\rho v_i^2$$

$$p_i - p_\infty = \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho v_i^2$$

故
$$c_{pi} = \frac{p_i - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2} = 1 - \left(\frac{v_i}{v_\infty}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\Delta l_\infty}{\Delta l_i}\right)^2 \tag{10-81}$$

因此只要测出电场中的Δl_∞与Δl_i的数值，即可求出点i处的压力系数。

习 题 十

10-1　有下列三种平面流动：

(a)　$u_x = 1,\ u_y = 2$

(b)　$u_x = ax,\ u_y = -4y$

(c)　$\varphi = \frac{m}{2\pi r}\cos\theta$

试问这三种流动是否存在流函数？若存在，试画出它们的流谱。

((a) 存在；(b)存在；(c)存在)

10-2　已知平面势流的流函数为：

(a)　$\psi = Ax + By$

(b)　$\psi = \frac{q_V}{2\pi}\theta$

(c)　$\psi = m\ln r$

(d)　$\psi = v_\infty r\sin\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$

上列式中A，B，q_V，m，v_∞，a均为常数，试求各流动的速度势函数。

$$\left(\varphi = Bx - Ay;\ \frac{q_V}{2\pi}\ln r + c;\ -m\theta + c;\ v_\infty r\cos\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + c\right)$$

10-3　一平面流动的x方向的流速分量为$u_x = 3ax^2 - 3ay^2$。在点(0,0)处$u_x = u_y = 0$。试求过$A(0,0)$与$B(1,1)$两点联线的流量

($2a$ m³/s)

10-4　设在坐标原点放置一个强度为$q_{V1}=30\text{m}^3/\text{s}$的点源，在点（1，0）（单位为m)处放另一个点源，强度为$20\text{m}^3/\text{s}(q_{V2})$。试求：

（1）　点A（-1，0）处的流速分量u_x与u_y

（2）　假设无穷远处压力为零，密度$\rho=2\text{kg/m}^3$，计算A（-1,0）点处的压力。

（$u_x=-6.37\text{m/s}$；$u_y=0$；$p_A=-40.58\text{N/m}^2$）

10-5　设一椭圆柱体的截面轮廓线的方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$。该椭圆柱为一无穷远来流速度$v_\infty=5\text{m/s}$的均匀来流（$u_\infty$沿$x$轴方向）所绕过，试求此绕流之复势。

$$\left(W(z)=5\left[z-\frac{2}{z+\sqrt{z^2-16}}\right]\right)$$

10-6　有一半径$a=2\text{m}$的圆柱体被无穷远来流速度为$v_\infty=5\text{m/s}$的均匀流所绕过。如果发现在绕过圆柱体时只在圆柱表面上有一个驻点（0，-2m）。试问绕此圆柱时是否还有环量存在？若有，试求此环量。

（有环量：$|\Gamma|=125.7\text{m}^2/\text{s}$）

第十一章　空间势流

本章研究流体的空间有势流动问题，主要是研究比较简单的空间势流——轴对称流动问题。流体机械中很多过流通路中的流动都可近似地简化为轴对称流，故研究轴对称流很有实际价值。

第一节　空间势流及其流例

在空间某区域中运动的流体，若流动为有势的，就存在一速度势函数φ (x, y, z, t)。流动的各速度分量为：

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{11-1}$$

不可压缩流体的连续性方程是：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \tag{11-2}$$

将式（11-1）代入式（11-2）后得：

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

亦即速度势函数满足拉普拉斯方程。

根据流动在被绕流物体表面上$v_n=\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$与在无穷远处流动不受物体干扰，因而$v=v_\infty$这两个边界条件去解拉普拉斯方程时其解应该是唯一的。

一般的空间流动无流函数存在。只有轴对称流才存在流函数。

下面介绍几种基本的空间势流。

一、均匀流

在圆柱坐标系（r，θ，z）中，设无穷远来流速度v_∞与z轴平行，则在均匀流的流场各处有：

$$v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=v_\infty,\quad v_r=v_\theta=0$$

故速度势函数为：

$$\varphi=\int\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z=\int v_\infty\mathrm{d}z=v_\infty z \tag{11-3}$$

二、点源（汇）

除了前一章所讨论的平面源（汇）外，在空间流动中还有与之相类似的空间源（汇）流动。设在坐标原点O放置一点源。它向四周空间所放射的流量设为q_V。因向四周均匀流动，故有

$$v4\pi R^2=q_V$$

式中　R——空间某点到点源（现为坐标原点）的距离；

v——该处的速度（方向为径向）。故流动的速度为

$$v=\frac{q_V}{4\pi R^2} \tag{11-4}$$

在球坐标系（R，θ，β）中，点源流动中某点处的速度与速度势函数的关系是：

$$\left.\begin{aligned} v_R&=\frac{\partial\varphi}{\partial R}=\frac{q_V}{4\pi R^2}\\ v_\theta&=\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0\\ v_\beta&=\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}=0\end{aligned}\right\} \tag{11-5}$$

由式（11-5）可知，点源的速度势函数φ仅是坐标R的函数，与其他两坐标θ与β无关．所以有

$$\frac{d\varphi}{dR}=\frac{q_V}{4\pi R^2}$$

或

$$d\varphi=\frac{q_V}{4\pi}\quad\frac{dR}{R^2}$$

积分后得：

$$\varphi=-\frac{q_V}{4\pi R} \tag{11-6}$$

这就是空间点源（汇）的速度势函数。对于点源来讲$q_V>0$，而对于点汇则$q_V<0$

三、偶极子

考虑分布于空间某一条直线l上的一个点源与一个点汇。其流量（或强度）为$\pm q_V$。设在l上的A点处放点汇，而在相距为Δl的另一点A'放点源。我们用势流叠加原理来确定点源与点汇形成的合成流场的速度势函数。如图10-1所示，设空间某点M到点源的距离为R'，到点汇的距离是R，，则应用式（11-6）得合成流动的速度势函数：

$$\varphi=-\frac{q_V}{4\pi R'}+\frac{q_V}{4\pi R}$$

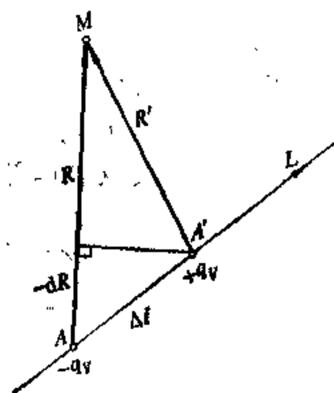


图11-1　偶极子的势函数

仿照平面偶极子势函数的求法，使点源与点汇无限靠近，同时使其强度无限增大，以使

$$\lim_{\substack{\Delta l\to 0\\ q_V\to\infty}} q_V\Delta l=m\ （常数）$$

这时有

$$\varphi=-\frac{q_V\Delta l}{4\pi}\ \frac{\frac{1}{R'}-\frac{1}{R}}{\Delta l}$$

在极限情况下：

$$\varphi=-\frac{m}{4\pi}\ \frac{d}{dl}\left(\frac{1}{R}\right)$$

从图11-1可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{1}{R^2}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}l}=\frac{\cos\theta}{R^2}$$

于是偶极子的速度势函数即为：

$$\varphi=-\frac{m}{4\pi R^2}\cos\theta \qquad (11\text{-}7)$$

式中 m——偶极子的强度。

四、空间连续分布的源

设在空间某体积为V的区域内（图11-2）连续分布着点源（汇），且在单位体积上的强度为q，它是体积V中的点坐标的函数。q也就是在体积V中点源分布的密度。

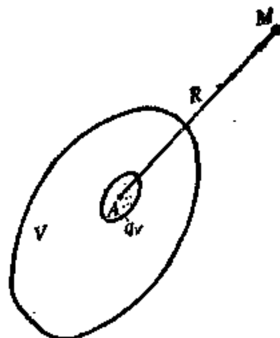


图11-2 连续分布的源

取包含有点A的体积元素$\mathrm{d}V$，相对应的源的强度为$q\mathrm{d}V$，由它而形成的M点的速度势函数为

$$\mathrm{d}\varphi=-\frac{q\mathrm{d}V}{4\pi R}$$

式中R是连结A与M两点的矢径$\boldsymbol{AM}$的长度。根据势流叠加原理，整个体积V中连续分布的点源在点M处所形成的速度势函数即为：

$$\varphi=-\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{q\mathrm{d}V}{R} \qquad (11\text{-}8)$$

上面讨论的是在某一个体积V内连续分布着点源（汇）的情况。当然点源（汇）也可能连续地分布在某个面上或线上。那时可通过类似的讨论而得出类似的结果。不过那时的q应理解为面上或线上的点源分布密度；而式（11-8）中的体积分也应改成面或线积分。

第二节 轴对称流动

所谓轴对称流动，是指流体在过某空间固定轴（例如z轴）的所有平面上的运动情况完全相同的流动。因此只要研究其中一个平面上的流动就可以了解整个空间内流体的运动情况。例如圆管中的流动，沿轴向流经旋成体的流动，以及水轮机工作轮内流体的流动等都可以认为是轴对称流动。

把流动的对称轴取作柱坐标系的z轴（如图11-3所示），则流动各参数与坐标θ无关，且在许多情况下$v_\theta=0$。在轴对称流动中，不可压缩流体定常流动的连续方程写成柱坐标的形式为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{\partial}{\partial z}(rv_z)=0\\ &\text{或}\quad \frac{\partial}{\partial z}(rv_z)=\frac{\partial}{\partial r}(-rv_r)\end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}9)$$

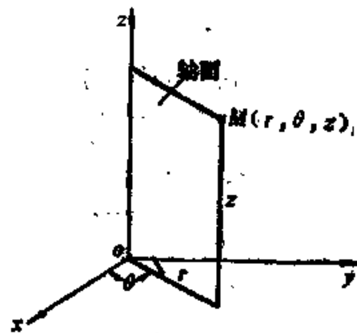


图11-3 轴对称流中的柱坐标系统

流线的微分方程是

$$\frac{\mathrm{d}r}{v_r}=\frac{\mathrm{d}z}{v_z} \qquad \text{或}\ v_z\mathrm{d}r-v_r\mathrm{d}z=0$$

或写成

$$(rv_z)\mathrm{d}r-(rv_r)\mathrm{d}z=0 \qquad (11\text{-}10)$$

把式（11-9），(11-10)与式（10-1），(10-2)作比较可知，式(11-11)左端的表达式必是某一空间函数ψ (r, z, t) 的全微分，即

$$d\psi=(rv_z)dr-(rv_r)dz$$

但由全微分定义可知：

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial r}dr+\frac{\partial\psi}{dz}dz(t\text{为参变量})$$

于是有

$$v_r=-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial z}, \quad v_z=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} \tag{11-11}$$

由式（11-10）可知，在同一根流线上$d\psi=0$，或

$$\psi=\text{常数} \tag{11-12}$$

这个空间函数ψ (r, z, t) 即称为该对称流的流函数。根据轴对称流动的定义可知，在由一根流线围绕流动的对称轴回转所形成的旋成面上（即流面上）流函数ψ 的值应保持为一常数。不同的常数代表不同的流线及对应的流面（图11-4）

前章已证明，在平面流动中两流线上的流函数值之差等于通过该两流线间单位厚度过流断面的流量。而在轴对称流动中，用相类似的方法可证明，两旋成流面上流函数值之差等于通过两流面之间过流断面的流量除以2π，即

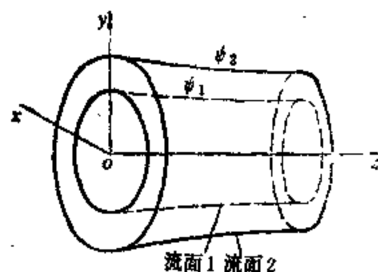


图11-4　流函数与流面

$$\psi_2-\psi_1=\frac{q_V}{2\pi} \tag{11-13}$$

下面我们来讨论几个基本的轴对称流的流函数。

在球坐标系（R, θ, β）中，轴对称轴的连续方程⊖是：

$$\frac{\partial(R^2\sin\theta v_R)}{\partial R}-\frac{\partial(R\sin\theta v_\theta)}{\partial\theta}=0$$

则在流场中必存在一函数ψ (R, θ)，它使

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=R^2\sin\theta v_R, \quad \frac{\partial\psi}{\partial R}=-R\sin\theta v_\theta$$

此函数ψ叫轴对称流的流函数。

速度势函数φ与速度有下列关系：

$$v_R=\frac{\partial\varphi}{\partial R}, \quad v_\theta=\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$$

由上列四个式子可得轴对称流的流函数与速度势函数的下列关系：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial R}&=-\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}&=R^2\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial R}\end{aligned}\right\} \tag{11-14}$$

⊖ Л.П.Лойчянский, "Механика Жидкости И. Газа стр. 383, Москва, 1957

1） 均匀流的流函数

设有一速度为v_∞的空间均匀流。当把z轴取为v_∞方向时，在球坐标系（R，θ，β）中即为一轴对称流（流动参数和β无关）。在空间某点M（R，θ，β）处有

$$v_R=v_\infty\cos\theta, \quad v_\theta=-v_\infty\sin\theta$$

亦即
$$\frac{\partial\varphi}{\partial R}=v_\infty\cos\theta, \quad \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-v_\infty\sin\theta$$

根据式（11-14)即有

$$\frac{\partial\psi}{\partial R}=-\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-\sin\theta Rv_\theta=v_\infty R\sin^2\theta$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=R^2\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial R}=R^2\sin\theta v_R=v_\infty R^2\sin\theta\cos\theta$$

将上两式中任一个积分即可得

$$\psi=\frac{1}{2}v_\infty R^2\sin^2\theta \tag{11-15a}$$

此即空间均匀流的流函数。

2） 空间点源（汇）的流函数

设在坐标原点有一点源，强度为q_V。设空间某点M（R，θ，β）的速度为v，则必有

$$v_R=\frac{q_V}{4\pi R^2}, \quad v_\theta=0$$

即
$$\frac{\partial\varphi}{\partial R}=\frac{q_V}{4\pi R^2}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0$$

根据式（10-14）即有

$$\frac{\partial\psi}{\partial R}=-\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=R^2\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial R}=R^2\sin\theta\frac{q_V}{4\pi R^2}=\frac{q_V}{4\pi}\sin\theta$$

将最后一式积分，再考虑第一式即得

$$\psi=-\frac{q_V}{4\pi}\cos\theta \tag{11-15b}$$

3） 空间偶极子的流函数

空间偶极子的速度势函数由式（11-7）可写为

$$\varphi=\frac{m}{4\pi R^2}\cos\theta$$

上式右端现在取了正号的原因是偶极子极性与式（11-7）所指的相反，即此处的偶极子是点源在左面，而点汇在右面取极限所形成的。于是

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-\frac{m}{4\pi R^2}\sin\theta$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial R}=-\frac{m}{2\pi R^3}\cos\theta$$

根据式（11-14）有

$$\frac{\partial\psi}{\partial R}=\frac{m}{4\pi R^2}\sin^2\theta$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=-\frac{m}{2\pi R}\sin\theta\cos\theta$$

积分之后即得空间偶极子的流函数：

$$\psi=-\frac{m}{4\pi R}\sin^2\theta \tag{11-15c}$$

第三节 圆球绕流

绕圆球的空间轴对称流动和绕圆柱的平面流动二者情况类似。当把空间均匀流与空间偶极子流动叠加后即可获得圆球绕流的速度势函数与流函数。

如图11-5所示的一绕圆球的流动，在无穷远处有速度为v_∞的均匀流。我们试把一强度为m的偶极子放在坐标原点处，并将之与均匀来流叠加，分析将得到何种合成流场。

合成流场之流函数应为均匀流的流函数与偶极子的流函数相加（势流叠加原理）：

$$\psi=\psi_{均}+\psi_{偶}$$

$$=\frac{1}{2}v_\infty R^2\sin^2\theta-\frac{m}{4\pi R}\sin^2\theta$$

$$=\left(\frac{1}{2}v_\infty R^2-\frac{m}{4\pi R}\right)\sin^2\theta \tag{11-16}$$

$\psi=0$的流线（面）为零流线（面），其方程为：

$$\left(\frac{1}{2}v_\infty R^2-\frac{m}{4\pi R}\right)\sin^2\theta=0$$

即

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}v_\infty R^2-\frac{m}{4\pi R}=0\\&\theta=0,\ \pi\end{aligned}\right\} \tag{11-17}$$

前一方程为球面方程。写成标准形式即为

$$R^3-\frac{m}{2\pi v_\infty}=0$$

即零流线（面）是半径为$a=\sqrt[3]{m/2\pi v_\infty}$的圆(球)。后一方程表示还有$z$轴也是零流线(面)。

因此可知，若想得到一个均匀流绕一半径为a的球的流场，则偶极子强度必须是

$$m=2\pi a^3v_\infty$$

将上式代入式（11-17）后即得均匀流绕半径为a的球的流动的流函数：

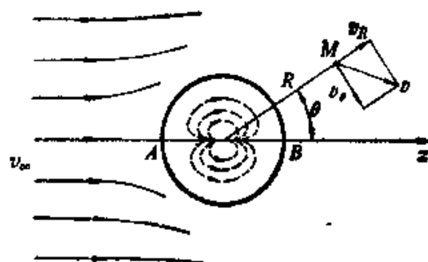


图11-5 圆球绕流

$$\psi=\frac{1}{2}v_\infty R^2\left[1-\left(\frac{a}{R}\right)^3\right]\sin^2\theta \tag{11-18}$$

均匀流绕半径为a的圆球流动的速度势函数应是均匀流势函数与以$m=2\pi a^3 v_\infty$为强度的偶极子的速度势函数的和：

$$\varphi=v_\infty z+\frac{m}{4\pi R^2}\cos\theta$$

$$=v_\infty R\cos\theta+\frac{2\pi a^3 v_\infty}{4\pi R^2}\cos\theta$$

$$=v_\infty R\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^3\right]\cos\theta \tag{11-19}$$

或

$$\varphi=v_\infty z\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^3\right] \tag{11-20}$$

流场中任一点的速度为：

$$\left.\begin{aligned} v_R&=\frac{\partial\varphi}{\partial R}=v_\infty\left[1-\left(\frac{a}{R}\right)^3\right]\cos\theta \\ v_\theta&=\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-v_\infty\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^3\right]\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{11-21}$$

在圆球表面上有$R=a$，代入式（11-21）即得圆球表面上的速度：

$$\left.\begin{aligned} v_R&=0 \\ v_\theta&=-\frac{3}{2}v_\infty\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{11-22}$$

当$\theta=0$和π时，$v_\theta=0$，因而在该两点A与B处速度为零，故称此两点为驻点。最大速度发生在$\theta=\pm\frac{\pi}{2}$处，速度为：

$$|v_\theta|_{\max}=\frac{3}{2}v_\infty$$

把此结果与绕圆柱流动时作比较发现，绕圆球时表面速度最大值不如绕圆柱时的大。这一点从物理过程可直观地理解，因在绕圆球时流体有较宽裕的空间流过物体，故流速增大的程度较小。

圆球表面压力分布可根据伯努里方程求出：

因为

$$p-\frac{\rho v^2}{2}=p_\infty+\frac{\rho v_\infty^2}{2}$$

故压力系数为：

$$c_p=\frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2}=1-\left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2=1-\frac{9}{4}\sin^2\theta \tag{11-23}$$

由式（11-23）可知，在球表面上压力分布是关于水平轴及铅直轴对称的，因而其合力应该等于零。故圆球被均匀流绕过时不受流体的合力作用。

第四节 旋成体绕流

许多飞行体及流体机械的过流部件形状是旋成体或近似于旋成体。它们为流体沿轴向绕

过时所形成的流场相当于旋成体的纵向绕流的流场。

如图11-6所示，无穷远速度为v_∞的均匀来流沿轴向流向旋成体并绕过它。对于这类绕流问题，可用源与汇在旋成体对称轴上的连续分布与均匀流相叠加的办法来解。

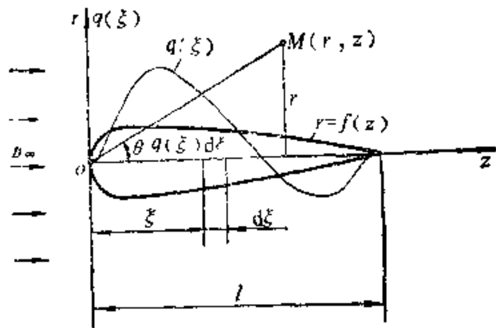


图11-6　绕旋成体的流动

把式（11-15a）中的自变量换成柱坐标自变量r，θ，z，取对称轴为z轴，并注意到$R\sin\theta=r$，则均匀流的流函数即成为：

$$\psi=\frac{1}{2}v_\infty r^2 \tag{11-24}$$

把式（11-6）代入（11-14）得源流的流函数的导数：

$$\frac{\partial\psi}{\partial R}=0,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\frac{q_V}{4\pi}\sin\theta$$

积分上式，并取积分常数为零，则得空间点源的流函数：

$$\psi=-\frac{q_V}{4\pi}\cos\theta$$

将上式换成柱坐标表达式：

$$\psi=-\frac{q_V}{4\pi}\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

若空间内源位于z轴上离坐标原点为ξ之处，则其流函数为：

$$\psi=-\frac{q_V}{4\pi}\frac{z-\xi}{\sqrt{r^2+(z-\xi)^2}} \tag{11-25}$$

设源（汇）强度的分布密度为：

$$q(\xi)=\lim_{\Delta\xi\to 0}\frac{\Delta q_V}{\Delta\xi}=\frac{dq_V}{d\xi}$$

由于旋成体表面为封闭的，则在用分布的源（汇）与均匀流叠加时也必须形成一封闭的流线，这样就要求：

$$\int_0^l q(\xi)d\xi=0$$

即在对称轴上的l段分布的源（汇）强度的总合为零，也就是有多大强度的源分布于此段上就必须有同样强度的汇分布于其上。

设在点ξ处的一微小段$d\xi$上分布的源汇在空间某点M（r，z）所形成的流函数为$d\psi$，则由式（11-25）得

$$d\psi=-\frac{q(\xi)d\xi}{4\pi}\frac{z-\xi}{\sqrt{r^2+(z-\xi)^2}}$$

则连续分布于l段上的源汇在空间任一点M（r，θ，z）所形成的流函数即为：

$$\psi=\int d\psi=-\frac{1}{4\pi}\int_0^l\frac{q(\xi)(z-\xi)}{\sqrt{(z-\xi)^2+r^2}}d\xi \tag{11-26}$$

把均匀流的流函数式（11-24）与上式相加后即为均匀流绕旋成体流动的流函数：

$$\psi=\psi_{\text{均匀}}+\psi_{\text{源汇分布}}=\frac{v_\infty r^2}{2}-\frac{1}{4\pi}\int_0^l\frac{q(\xi)(z-\xi)}{\sqrt{(z-\xi)^2+r^2}}\mathrm{d}\xi$$

令$\psi=0$，即取零流线的方程，即代表了旋成体的母线的方程：

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^l\frac{(z_k-\xi)}{\sqrt{(z_k-\xi)^2+r_k^2}}q(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{v_\infty r_k^2}{2} \tag{11-27}$$

式中　z_k，r_k——封闭的零流线上各点的坐标。

若已知旋成体表面的母线的方程$r_k=f(z_k)$则可根据式（11-27）这一积分方程求出未知的源汇强度的分布密度$q(\xi)$。

由于解积分方程的解析法困难较大，所以一般采用近似的数值计算法。如图11-7所示，将旋成体轴线分成若干等分段，在每个小段上可把$q(\xi)$近似地当作常量。段分得越细，计算越准确。若以q_1，q_2，$\cdots q_n$，n为分段的数目，则积分方程（11-27）左端积分可近似写成

$$\int_0^l\frac{(z_k-\xi)}{\sqrt{(z_k-\xi)^2+r_k^2}}q(\xi)\mathrm{d}\xi=\sum_{i=1}^n q_i\int_{z_{i-1}}^{z_i}\frac{(z_k-\xi)}{\sqrt{(z_k-\xi)^2+r_k^2}}\mathrm{d}\xi$$

而上式中的

$$\begin{aligned}\int_{z_{i-1}}^{z_i}\frac{(z_k-\xi)}{\sqrt{(z_k-\xi)^2+r_k^2}}\mathrm{d}\xi&=\int_{z_k-z_{i-1}}^{z_k-z_i}-\frac{z_k-\xi}{\sqrt{(z_k-\xi)^2+r_k^2}}\mathrm{d}(z_k-\xi)\\&=\sqrt{(z_k-z_{i-1})^2+r_k^2}-\sqrt{(z_k-z_i)^2+r_k^2}\\&=\rho_{(i-1)k}-\rho_{ik}\end{aligned}$$

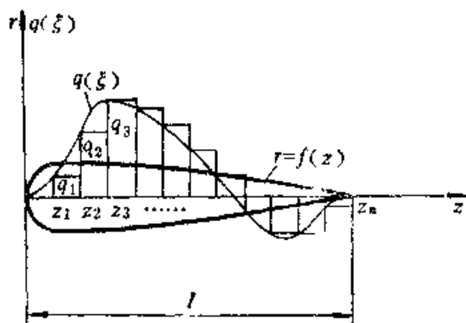


图11-7　积分方程数值解法

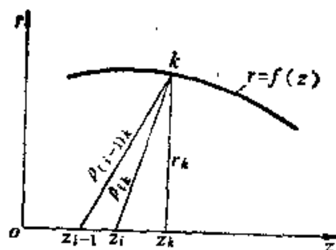


图11-8　旋成体表面曲线的确定

式ρ为旋成体表面点K（r_k，z_k）到其轴线上各分段的向径之长度（如图11-8所示）。

因此式（11-27）可写为：

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^n q_i\left[\rho_{(i-1)k}-\rho_{ik}\right]=\frac{v_\infty r_k^2}{2} \tag{11-28}$$

上述方程在0到l的范围内的任一个z_k或$r_k=f(z_k)$的值都适用，所以要解的是一个方程组：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^n q_i\left[\rho_{(i-1)1}-\rho_{i1}\right]=\frac{v_\infty r_1}{2}\\&\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^n q_i\left[\rho_{(i-1)2}-\rho_{i2}\right]=\frac{v_\infty r_2}{2}\\&\cdots\cdots\\&\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^n q_i\left[\rho_{(i-1)n}-\rho_{in}\right]=\frac{v_\infty r_n}{2}\end{aligned}\right\} \tag{11-29}$$

若已知v_∞及旋成体表面母线方程$r_k=f(z_k)$，则上述方程组中的ρ，r等均为已知数，由n个方程解n个未知数q_1，q_2，…，q_n当然很容易。求出源汇强度的分布密度后，便可求得流动之流函数，进而算出流场的速度分布与压力分布。

第五节　不定常势流的附加质量

当一物体在边界无限大的，且一开始处于静止状态的理想流体介质中作等速直线运动时，如果在固结于地面上的坐标系统中观察流体的运动，则流动应是不定常的有势流动。流体的运动是由运动着的物体带动的，流体各处的速度大小不一，而且在无限远处流体还应是静止的。因而流体应该具有一定的动能。假若有某一质量的流体以物体运动速度为其流速运动时正好具有前述的由物体带动而在整个流场产生的动能，则这部分流体的质量即称之为附加质量。

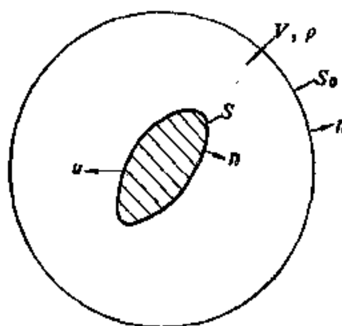


图11-9　在理想流体中运动的物体

一、运动流体所具有的动能

如图11-9所示，一具有表面s，形状任意的物体在一开始是静止的理想流体中运动，其运动速度为$\boldsymbol{u}$，为一常量。现取一控制面S_0将物体包围于其中。如果在界面S与控制面S_0之间流体的体积是V，则其动能为：

$$
\begin{aligned}
T&=\int_V \frac{1}{2}\rho(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})\mathrm{d}V\\
&=\frac{1}{2}\rho\int_V \nabla\varphi\nabla\varphi\mathrm{d}V
\end{aligned}
\tag{11-30}
$$

式中　ρ——流体的密度；

$\boldsymbol{u}$——任意点的流速；

φ——速度势函数。

根据体积积分与曲面积分之变换的格林定理及$\nabla^2\varphi=0$，可将式（11-30）写成

$$T=\frac{1}{2}\rho\int_\Sigma \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{11-31}$$

式中Σ是包围体积V的表面，故应为S与S_0组成。当注意到在物体表面S上单位外法线是指向体积V之内部时，式(10-31)即可写为

$$T=\frac{1}{2}\rho\int_{S_0}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S-\frac{1}{2}\rho\int_S \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{11-32}$$

下面我们来证明上式右端的第一个积分等于零：

由连续性可知，

$$\int_V \nabla\boldsymbol{u}\mathrm{d}V=0$$

此体积积分可分为两个面积分。由高斯转换公式即可有

$$\int_{S_0}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S-\int_S \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0$$

但$\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，且在表面$S$上流体运动时的速度之法向分量$u_n=U_n$，即流体只能在表面上滑动，不能脱离表面形成空隙。因而上式中第二个积分为零。故

$$\int_{S_0}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}S=0$$

设c为任一常数，则应有

$$\int_{S_0}c\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}S=0$$

用式（11-32）减此式有：

$$T=\frac{1}{2}\rho\int_{S_0}(\varphi-c)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}S-\frac{1}{2}\rho\int_{S}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}S$$

因在无限远处流体仍是静止的，则在该处的速度势函数最多不过是个常数。那么现在让所取的控制面S_0趋向无限远，并且让c取为无穷远处的φ值，则上式左端的第一个积分即变为零，因而有

$$T=-\frac{1}{2}\rho\int_{S}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}S \tag{11-33}$$

此即为物体在原为静止的边界无限大的理想流体中运动时所造成的流体之动能。式中S为物体的表面，n为其外法线，φ为流体的速度势函数。

二、附加质量

根据本节开始所定义的附加质量及上面导出的流体动能的公式，我们来求出附加质量的表达式。设M'是流体附加质量，则：

$$\frac{1}{2}M'u^2=-\frac{1}{2}\rho\int_{S}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}S$$

所以

$$M'=-\frac{\rho}{u^2}\int_{S}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}S \tag{11-34}$$

对任意形状的物体而言，其感生速度场的势函数与他在流体中运动方向有关。那么由式(11-34)可见，与该物体相关的流体的附加质量就将是与物体形状有关的。一般来说一个物体应对应有三个主轴方向的流体附加质量。对于轴对称体而言，则只有两附加质量的主值。而对球体而言则只有一个。

［例］ 设一半径为a的球体以速度u在理想流体中作等速直线运动。试求与该球相关的流体的附加质量。

［解］ 根据求附加质量的公式（11-34），必须先找到速度势函数。现在是球运动，而无限远的流体为静止的，故应把本章前述的绕球流动的速度势函数减去一均匀流速度势函数，以代表这种运动的速度势函数：

$$\varphi(R,\ \theta)=u\left(R+\frac{1}{2}\frac{a^3}{R^2}\right)\cos\theta-uR\cos\theta$$

$$=\frac{1}{2}u\frac{a^3}{R^2}\cos\theta$$

因在球坐标系中向径方向即球表面之法线方向故有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}(R,\ \theta)=\frac{\partial\varphi}{\partial R}(R,\ \theta)=-u\frac{a^3}{R^3}\cos\theta$$

所以在球表面上（$R=a$）有

$$\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\frac{-1}{2}u^2a\cos^2\theta$$

将之代入式（11-34）即得附加质量：

$$M'=\frac{-\rho}{u^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\beta\int_0^{\pi}(-\frac{1}{2}u^2a\cos^2\theta)a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2}{3}\pi a^3\rho$$

即对于球体而言，附加质量等于与球同体积流体质量的一半。

之所以叫附加质量的原因在于，当物体在流体中运动时可以完全忽略流体的存在，但必须在物体之质量上附加一部分质量（式11-34）所给定的质量。

习 题 十一

11-1　利用轴对称流流函数的定义和空间无旋运动的前提（$\omega=0$），证明轴对称流 流 函数ψ（R，θ）满足下列方程

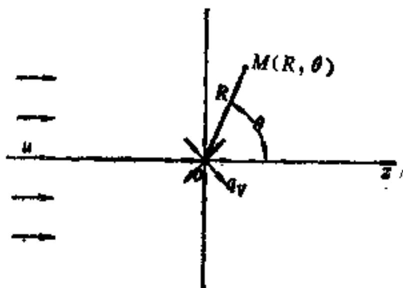
$$R^2\frac{\partial^2\psi}{\partial R^2}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta})=0$$

11-2　试用势流叠加原理求如题11-1图上所示的均匀来流和坐标原点处的点源所合成的流 动的流函数ψ（R，θ）。均匀来流在无穷远处之速度为u，点汇强度为q_V，并求零流线之方程。

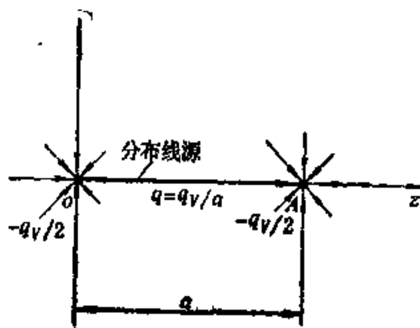
$$\psi(R,\ \theta)=\frac{1}{2}uR^2\sin^2\theta-\frac{q_V}{4\pi}(1+\cos\theta)$$

零流线方程：

$$R=\sqrt{\frac{q_V}{4\pi u}}\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}$$



题11-1图



题11-2图

11-3　如题11-2图所示，在z轴上oA段上分布有均匀线 源，分布密度为$q=\frac{q_V}{a}$。q_V为线 源 的 强度，a为oA长度。在点o与A两点放置相同强度的点汇，它们的总强度为$-q_V$。试证明流场中 任一点P（R，θ）处的流函数为

$$\psi(R,\ \theta)=c\left[(R_1-R_2)^2-a^2\right]\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

式中R_1，R_2分别为点P到o与A的向径，并求c的值。

第十二章　粘性流体流动与绕流阻力

前面两章讨论了平面和空间的理想流体运动。在研究粘性比较小的流体的某些流动现象时，可以将有粘性的真实流体近似地按无粘性的理想流体处理。这会给数学分析带来很大的简化，并能给出与实验相当符合的结果。例如，在无分离绕体流动中的速度分布，压力分布、升力等，理想流体理论都给出了与实验相符合的结果。但在研究小粘性流体的另外一些流动现象时，理想流体理论可能给出完全背离实际的结果。例如，理想流体理论给出绕体阻力为零的结果，而这是与实际情况绝不相容的。在研究粘性较大的流体流动时，一般是不能采用理想流体模型的。

这一章我们讨论粘性流体运动的规律，目的是要解决绕流阻力问题。如上所述理想流体模型无法解决阻力问题，究其根源是因为忽略了粘性的缘故。粘性阻力分成摩擦阻力与压差阻力两种。摩擦阻力是指流体在被绕流物体表面上作用的摩擦切应力在物体运动方向上的合力。它显然与流体粘性有关。压差阻力指垂直于物面的压力在物体运动方向上的合力。压差阻力中包括尾涡阻力，它是由于流动与物面分离，在物后形成尾涡区所引起的压差阻力。尾涡阻力的解决离开粘性也是不可能的。因此我们必须放弃理想流体模型，而把流体看成是有粘性的。象过流问题一样，我们将要探求绕流阻力产生的原因及其计算方法。为此，首先必须研究粘性流体的运动规律。因而，本章从讨论粘性流动中的应力状况开始，继而建立粘性流体运动微分方程，然后讨论粘性流动的求解，并着重讨论大雷诺数下求解粘性流动的边界层理论。本章讨论围绕一个中心问题，就是被绕流物体的阻力问题。

第一节　粘性流体中的应力及应力形式的运动微分方程

一、粘性流体中的应力

粘性流体中的表面应力比较复杂，为了能够清楚地表示这些应力，通常引用一些特殊的符号，这些符号既能表示出应力作用面的方位，同时又能表示各应力分量的方向。

过粘性流体中一点M任取一表面A，它在M点的法线方向为n，则在M点处的表面应力记为p_n（见图12-1）。由于流体粘性的作用，p_n不再是沿作用面A的法线方向n了。所以它可以分解出一个法向应力分量，记为p_{nn}；和一个切向应力分量，记为τ_{nt}。在这类带两个下标的符号中，规定"p"表示法向应力分量、"τ"表示切向应力分量，并且第一个下标表示作用面的法线方向，第二个下标则表示应力分量的方向。

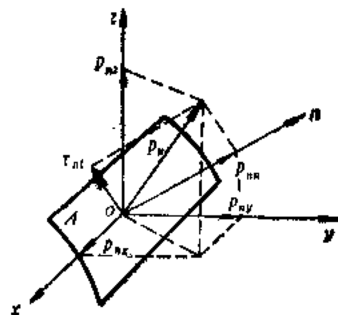


图12-1　任意表面上的应力

特别地，如果过M点取以x轴向为法线方向的平面A_x，则M点以A_x为作用面的应力为p_x，它的法向应力分量为p_{xx}（沿x轴向），切向应力分量则为τ_{xt}（见图12-2）。τ_{xt}还可以进一步分解成两个沿坐标轴y、z方向的分量τ_{xy}、τ_{xz}。类似地，

流体力学宋

在过M点的A_y、A_z作用面上，表面应力 p_y、p_z 的三个坐标轴方向分量为：p_{yx}、τ_{zy}、τ_{xz}、p_{yy}、τ_{yx}、τ_{yz}；p_{zz}、τ_{zx}、τ_{zy}。故在粘性流体中任意一点M，都存在上述三个应力 p_x、p_y、p_z，它们由九个沿坐标轴方向的应力分量所决定：

$$
\begin{Bmatrix} p_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & p_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & p_{zz} \end{Bmatrix} \tag{12-1}
$$

对确定粘性流体中一点的应力状态，式（12-1）是重要的。下面我们对它进行两点讨论。

1．式（12-1）只有六个独立分量

式（12-1）中九个应力分量并不完全独立，可以简化为六个独立分量。为说明这个事实，在流体中取一平行六面体流体微团，各边平行于坐标轴其长分别为dx、dy、dz，并以M点为体积中心（图12-3）。过M点作平行y坐标轴的轴线My'，计算作用在流体微团上的所有

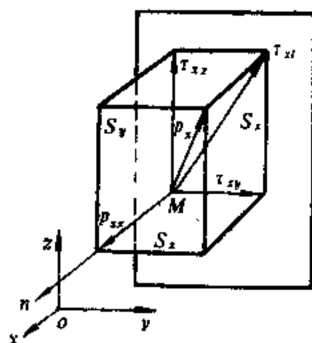


图12-2 垂直于坐标轴的表面上应力

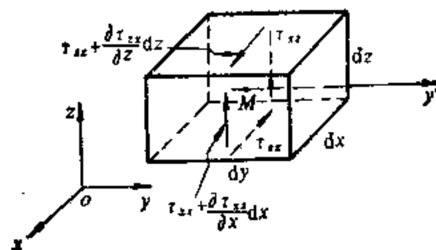


图12-3 切向应力分量相等

力（包括惯性力）对My'轴之力矩。

微团只要取得充分小，质量力与表面力皆可认为是均匀分布的，则质量力必通过体积中心、而表面力必通过各相应表面的面积中心。这么一来，只有如图12-3上所示四个切向应力对My'轴有矩。顺便指出表面应力正方向的规定，当作用面的外法线方向与坐标轴指向一致时，表面应力标为顺坐标轴方向；当作用面的外法线方向与坐标轴指向相反时，表面应力标为逆坐标轴方向的。

根据达朗贝尔原理列出对My'轴之力矩方程：

$$
\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\times\frac{1}{2}\mathrm{d}z+\tau_{zx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\times\frac{1}{2}\mathrm{d}z-\left(\tau_{xz}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}\mathrm{d}x\right)
$$

$$
\mathrm{d}y\mathrm{d}z\times\frac{1}{2}\mathrm{d}x-\tau_{xz}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\times\frac{1}{2}\mathrm{d}x=0
$$

即

$$
2\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z-2\tau_{xz}-\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}\mathrm{d}x=0
$$

当令dx、dy、d$z\longrightarrow0$时可得下列第一式，并同理可得另外两式：

$$
\tau_{zx}=\tau_{xz},\quad \tau_{xy}=\tau_{yx},\quad \tau_{yz}=\tau_{zy} \tag{12-2}
$$

可见式（12-1）中六个切向应力可合并为三个，加上三个法向应力分量则式（12-1）只

有六个独立的应力分量。

2、流体中一点的应力完全由式（12-1）所决定。

粘性流体中一点M任意方位（具有法向$\boldsymbol{n}$）作用面上的应力p_n，均可由式（12-1）中应力分量决定出来。

以粘性流体中的点M为顶点、隔离出一个四面体流体微团$MABC$，其棱与坐标轴平行，长度分别为dx、dy、dz，底面ABC可有任意方位、法线方向为$\boldsymbol{n}$，四面体各表面应力及其在x轴方向分量等皆如图12-4所示。法向应力以拉力为正，压力为负。

分析四面体的受力，利用达朗贝尔原理列出x轴方向的力平衡方程式：

$$P_{nx}\Delta ABC - P_{xx}\Delta ABM - \tau_{yx}\Delta BCM - \tau_{zx}\Delta ACM$$

$$+ f_x \rho dV - \frac{dv_x}{dt}\rho dV = 0$$

根据立体几何知识可得

$$\Delta ABM = \Delta ABC\cos\alpha$$

$$\Delta BCM = \Delta ABC\cos\beta$$

$$\Delta ACM = \Delta ABC\cos\gamma$$

$$dV = \frac{1}{3}\Delta ABM\,dx = \frac{1}{3}\Delta ABC\cos\alpha\,dx$$

上面式中$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$为ΔABC法线方向$\boldsymbol{n}$的方向余弦。把这些关系式代入平衡方程式中，约简并令A、B、$C\longrightarrow M$时，则可得下列第一式，并同理可得下面另外两式：

$$\begin{aligned} p_{nx} &= p_{xx}\cos\alpha + \tau_{yx}\cos\beta + \tau_{zx}\cos\gamma \\ p_{ny} &= \tau_{xy}\cos\alpha + p_{yy}\cos\beta + \tau_{yz}\cos\gamma \\ p_{nz} &= \tau_{xz}\cos\alpha + \tau_{yz}\cos\beta + p_{zz}\cos\gamma \end{aligned} \tag{12-3}$$

或表成矢量形式则为

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}_x\cos\alpha + \boldsymbol{p}_y\cos\beta + \boldsymbol{p}_z\cos\gamma \tag{12-3)'$$

由式（12-3）或式（12-4）可见，作用在粘性流体中某一点处任意方位作用面上的应力，皆可由式（12-1）来决定。

二、应力形式的运动微分方程式

现在来建立以式（12-1）应力分量所表示的粘性流体的运动微分方程。为此在运动的粘性流体中A点邻近，取出一个其棱与坐标轴平行的平行六面体流体微团，它的边长分别为

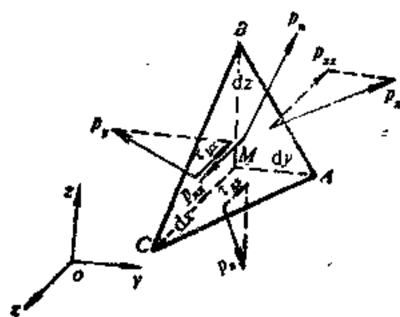


图12-4 任意方位表面上应力的确定

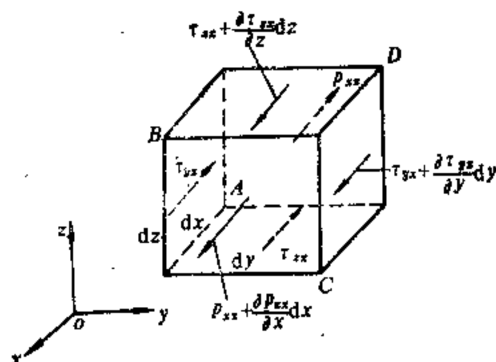


图12-5 粘性流体的运动微分方程

dx、dy、dz（图 12-5），并且各表面应力的x轴向分量也在图中标出。下面类似于推导欧拉运动微分方程时那样，分析流体微团的动力关系。

流体微团充分小，表面应力与质量力分布的不均匀性可予忽略。那末作用在流体微团上、沿x轴方向的合力为：

$$\left(p_{xx}+\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx\right)dydz-p_{xx}dydz+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dxdz$$

$$-\tau_{yx}dxdz+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dxdy-\tau_{zx}dxdy+f_x\rho dxdydz$$

$$=\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dxdydz+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dxdydz+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dxdydz+f_x\rho dxdydz$$

流体微团质量与x轴向加速度的乘积为：

$$\rho dxdydz\frac{dv_x}{dt}$$

根据牛顿第二定律有：

$$\rho dxdydz\frac{dv_x}{dt}=\left(\rho f_x+\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)dxdydz$$

化简并令dx、dy、$dz\longrightarrow 0$则得在A点处成立的下列沿x轴向的第一式，并同理可得y、z轴向的另外两式：

$$\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt}&=f_x+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)\\
\frac{dv_y}{dt}&=f_y+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)\\
\frac{dv_z}{dt}&=f_z+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right)
\end{aligned}\tag{12-4}$$

式（12-4）即为以应力形式表示的粘性流体运动微分方程。

在方程组（12-4）中，质量力F_X、F_Y、F_Z一般是已知的，对不可压缩流体密度ρ也是已知的，则方程式中还包含有六个应力及三个速度分量、共九个待定的未知量。式（12-4）包含三个方程，再加上连续性方程（8-3b）′，总共也只有四个方程，是解不出九个未知量的。因此，下面我们将寻找补充关系式，以得到封闭的方程组，使求解成为可能。

第二节　粘性流体中的应力与变形速度的关系

一、切向应力与变形速度的关系

牛顿根据纯剪切流实验，总结出计算切应力的粘性公式（1-8）：

$$\tau=\mu\frac{du}{dn}$$

如在第一章第五节中分析过的那样，$\frac{du}{dn}=\frac{d\varphi}{dt}$。而$\frac{d\varphi}{dt}$代表流体微团的角变形速度，所以上式说明，切应力与流体微团的角变形速度成正比，比例系数就是流体的动力粘度。

在三元流动中，流体沿三个坐标平面的角变形速度，由第八章第三节知分别为：

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y},\quad \frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z},\quad \frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}$$

把牛顿粘性公式推广到三元流动，则可得切应力与角变形速度的下列关系式：

$$\begin{aligned}\tau_{xy}=\tau_{yx}&=\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\\ \tau_{yz}=\tau_{zy}&=\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\\ \tau_{xz}=\tau_{zx}&=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\end{aligned}\tag{12-5}$$

上式常被称为广义牛顿内摩擦定律，是关于切应力的三个补充关系式，它们将切应力与角变形速度联系了起来。

二、法向应力与变形速度的关系

为导出法向应力与线变形速度、粘性流体动压力之间关系，首先建立法向应力与线变形速度间关系式；然后定义粘性流体中的动压力并建立法向应力与动压力间关系式；最后，对所得的两个关系式进行综合就可得出所要的结果。下面就来分段讨论上面提出的各个问题。

1．法向应力与线变形速度间关系

在运动的粘性流体中取一流体微团，它在xy平面上的投影为一边长是$2a$的正方形$ABCD$（图12-6），设在它的四个界面上只作用着切应力τ。联接微团四个边的中点，得到另一个其边与坐标轴平行的正方形流体微团$EFGH$，它的边长为$\sqrt{2}a$（图12-6），其上作用着主应力p_{xx}、p_{yy}。

由图不难看出下列力平衡关系：

$$\sqrt{2}\,ap_{xx}=2a\tau\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\,a\tau$$

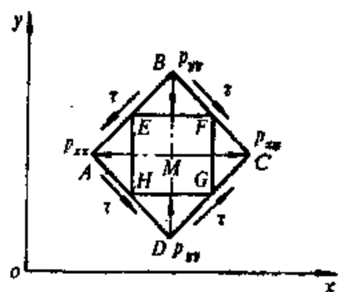


图12-6 法向应力与切向应力的关系

消掉公因子$\sqrt{2}a$得下列第一式，并同理可得下列第二式：

$$p_{xx}=\tau,\quad p_{yy}=-\tau$$

上式"－"号表示为压力。由此可得

$$p_{xx}-p_{yy}=2\tau\tag{a}$$

由于切应力τ的剪切作用，在时段∂t内正方形$ABCD$变形成菱形$AB'C'D'$，原直角改变了$\partial\gamma$那样大小（图12-7）。根据牛顿粘性公式：

$$\tau=\mu\frac{\partial\gamma}{\partial t}\tag{b}$$

把式(b)代进式(a)后得：

$$p_{xx}-p_{yy}=2\mu\frac{\partial\gamma}{\partial t}\tag{c}$$

见图12-7，在变形过程中$AC\longrightarrow AC'$、$BD\longrightarrow B'D'$，那末相应的单位线段之伸长：

$$\delta e_x=\frac{CC'}{AC}=\frac{\frac{CC'}{2}}{\frac{AC}{2}}=\frac{MM'}{AM}\tag{d}$$

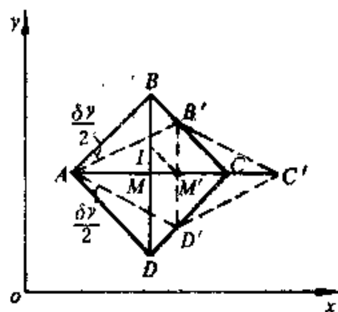


图12-7 正方形微元的剪切变形

过M'点作BC的平行线交BD于E，由图上几何关系可以得到：

$$MM'=\frac{EM'}{\sqrt{2}}=\frac{BB'}{\sqrt{2}}=\frac{AB}{\sqrt{2}}\mathrm{tg}\left(\frac{\delta\gamma}{2}\right)\approx AB\frac{\delta\gamma}{2\sqrt{2}}$$

$$AM=\frac{AB}{\sqrt{2}}$$

把上结果代回式(d)得下面第一式，并同理得下列第二式：

$$\delta\varepsilon_x=\frac{\delta\gamma}{2},\quad \delta\varepsilon_y=-\frac{\delta\gamma}{2}$$

由此导出
$$\delta\varepsilon_x-\delta\varepsilon_y=\delta\gamma$$

所以
$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}=\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial t}-\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial t}$$

上面右式中，$\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial t}$与$\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial t}$分别表示沿$x$与$y$轴方向的单位长线段之伸长速度，从第八章第三节

知它们应分别等于$\frac{\partial v_x}{\partial x}$、$\frac{\partial v_y}{\partial y}$则

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}=\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{\partial v_y}{\partial y}$$

把此结果代入式(c)得下列第一式，并同理可得下列的第二式：

$$\begin{aligned}p_{xx}-p_{yy}&=2\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)\\ p_{xx}-p_{zz}&=2\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\end{aligned}\tag{12-6}$$

2. 粘性流体中的动压力

粘性流体中一点$M(x_0,\ y_0,\ z_0)$的流体动压力p定义为：以M为球心、具有无限小半径r的球面A上，作用着的法向应力之负算术平均值。用数学式子可表示为：

$$p=\lim_{r\to 0}\frac{-1}{4\pi r^2}\oint\!\!\!\oint_A \boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{p}_n\mathrm{d}_A\tag{12-7}$$

上式中积分号下$\mathbf{y}_0$表示沿球半径方向的单位矢量。

下面我们来建立粘性流体中M点的动压力p与过该点以坐标轴方向为法向的三个作用平面上之法向应力p_{xx}、p_{yy}、p_{zz}的关系式。为此我们来计算式(12-7)中的积分：

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to 0}\frac{-1}{4\pi r^3}\oint\!\!\!\oint_A \boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{p}_n\mathrm{d}A=\lim_{r\to 0}\frac{-1}{4\pi r^3}\oint\!\!\!\oint_A \boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{p}_x\cos\alpha+\boldsymbol{p}_y\cos\beta+\boldsymbol{p}_z\cos\gamma)\mathrm{d}A\\ &=\lim_{r\to 0}\left(\frac{-1}{4\pi r^3}\oint\!\!\!\oint_A \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}_x\cos\alpha\mathrm{d}A\right)+\lim_{r\to 0}\left(\frac{-1}{4\pi r^3}\oint\!\!\!\oint_A \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}_y\cos\beta\mathrm{d}A\right)\\ &\quad+\lim_{r\to 0}\left(\frac{-1}{4\pi r^3}\oint\!\!\!\oint_A \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_z\cos\gamma\mathrm{d}A\right)\\ &=I_1+I_2+I_3\end{aligned}\tag{a}$$

积分号下$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$为面元$\mathrm{d}A$法线的方向余弦。

我们来分别计算式(a)中三个积分

$$I_1=\lim_{r\to 0}\frac{-1}{4\pi r^3}\oiint_A \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}_x\cos\alpha\,\mathrm{d}A$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{-1}{4\pi r^3}\oiint_A r\cos\alpha\,\boldsymbol{p}_x\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{-1}{4\pi r^3}\oiint_A\left(x-x_0\right)\boldsymbol{p}_x\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

积分号下$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\mathrm{d}A\boldsymbol{r}_0$，应用奥——高积分公式则有

$$I_1=\lim_{r\to 0}\frac{-1}{4\pi r^3}\iiint_V\nabla\cdot\left[(x-x_0)\boldsymbol{p}_x\right]\mathrm{d}V$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{-1}{4\pi r^3}\iiint_V\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[(x-x_0)p_{xx}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left[(x-x_0)\tau_{xy}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[(x-x_0)\tau_{xz}\right]\right\}\mathrm{d}V$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{-1}{4\pi r^3}\iiint_V\left[p_{xx}+(x-x_0)\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}V$$

引用积分中值定理，设M'为球内的中值点时则

$$I_1=\lim_{r\to 0}\frac{-1}{4\pi r^3}\left[p_{xx}+(x-x_0)\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)\right]_{M'}\times\frac{4\pi r^3}{3}$$

$$=\frac{-1}{3}\lim_{r\to 0}\left[p_{xx}+(x-x_0)\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)\right]_{M'}$$

当$r\longrightarrow 0$时，$M'\longrightarrow M$、$x-x_0\longrightarrow 0$、$(p_{xx})_{M'}\longrightarrow(p_{xx})_M$，故极限情况下得到，

$$I_1=\frac{-1}{3}(p_{xx})_M$$

如果省掉下标“M”则得下列第一式，并同理得另外两式

$$I_1=\frac{-1}{3}p_{xx},\quad I_2=\frac{-1}{3}p_{yy},\quad I_3=\frac{-1}{3}p_{zz}\tag{b}$$

把式(b)代回式(a)得

$$\lim_{r\to 0}\frac{-1}{4\pi r^3}\oiint_A\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{p}_n\mathrm{d}A=\frac{-1}{3}(p_{xx}+p_{yy}+p_{zz})\tag{c}$$

然后再把式(c)代回粘性流体动压力定义式(12-7)，则得到粘性流体动压力与沿坐标轴方向法向应力关系式，

$$p=-\frac{1}{3}(p_{xx}+p_{yy}+p_{zz})\tag{12-8}$$

最后，把式(12-6)与式(12-8)联立，解出三个法向应力则

$$p_{xx}=-p-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}+2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$p_{yy}=-p-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}+2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y}\tag{12-9}$$

$$p_{zz}=-p-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}+2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

式(12-9)为应用广义牛顿内摩擦定律所得到的关于法向应力的三个补充方程。它们将粘性流体中的法向应力和线变形速度联系了起来。

第三节 纳维-斯托克司方程

在前面两节中，我们建立了应力形式的运动微分方程；和应力与变形速度间的关系式。这为建立粘性流体运动的纳维—斯托克司微分方程做了充分准备，现在就来导出这一组方程。

把式(12-5)与式(12-9)的应力表示式代入应力形式的微分方程组(12-4)中。以组中第一方程为例，

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt}&=f_x-\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right\}\\&=f_x-\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[-p-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}+2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}\right]\right.\\&\quad\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\right]\right\}\\&=f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left\{\left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right]\right.\\&\quad\left.+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\right\}\\&=f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left\{\nabla v_x+\frac{\partial}{\partial x}\left[(\nabla\cdot\boldsymbol{v})-\frac{2}{3}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\right]\right\}\end{aligned}$$

将上式加以整理可得下列第一式，并同理可得其它两式：

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt}&=f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta v_x+\frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\\\frac{dv_y}{dt}&=f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\Delta v_y+\frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial y}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\\\frac{dv_z}{dt}&=f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta v_z+\frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial z}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\end{aligned}\tag{12-10}$$

方程组(12-10)就是粘性流体运动微分方程，适用于一切牛顿流体。方程于1827年和1845年，从不同角度被纳维和斯托克司分别独立得到，故上方程常被叫做纳维—斯托克司方程(简称N-S方程)。实际上，纳维一斯托克司方程是对单位质量流体所写的牛顿运动方程，左式为单位质量与加速度之乘积；右式则为作用在单位质量流体上的质量力、压力与粘性力之和。

对不可压缩流体，由于$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$则式(12-10)变成下面形式：

$$\frac{dv_x}{dt}=f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta v_x$$

$$\frac{dv_y}{dt} = f_Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta v_y \qquad (12\text{-}11)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = f_Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta v_z$$

或写成矢量方程则得：

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{v} \qquad (12\text{-}11)'$$

式(12-11)与式(12-11)′是不可压缩流体的纳维—斯托克司方程。如果流体没有粘性($\nu=0$)，则(12-11)变成理想流体运动的欧拉微分方程；如果流体静止，则(12-11)成为欧拉平衡微分方程。所以式(12-11)是不可压缩流体运动最普遍的微分方程。但式(12-11)又是式(12-10)的特殊情况，故可说方程(12-10)是牛顿流体运动的最普遍的微分方程式。

不可压缩流体运动方程式(12-11)中，包含四个待定系数v_x、v_y、v_z，p。三个运动方程，再加进不可压缩流体连续性方程：

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

那末方程也有四个了，原则上可以求解不可压缩粘性流体的运动问题了。但为了定解还须给出初始条件与边界条件：

1)初始条件　$t=0$时，在所考虑流场中给出

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x、y、z)，\quad p = p(x、y、z)$$

2)边界条件　下面只列出三种最常用的边界条件

静止固壁上满足粘附条件$\boldsymbol{v}=0$；

运动固壁上须满足$\boldsymbol{v}_{流} = \boldsymbol{v}_{固}$；

自由界面上须满足$p_{nn} = -p_{大}$，$\tau_{n t} = 0$

另外，在求解许多实际问题时，譬如求解粘性流体绕水力机械叶轮的流动，采用圆柱坐标则更方便；对绕圆球的流动，则更宜于用球坐标来求解。所以下面我们列出粘性不可压缩流体，在柱坐标和球坐标系内的纳维—斯托克司方程式：

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla v_r - \frac{v_\theta^2}{r} = f_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\Delta v_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2}\right)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} = f_\theta - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\right) \qquad (12\text{-}11)''$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla v_z = f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta v_z$$

式中

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla = v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla v_r - \frac{v_\theta^2 + v_\beta^2}{r} = f_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$+\nu\left(\Delta v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\beta}{\partial\beta}\right)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla v_\theta+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\beta\cot\theta}{r}=f_\theta-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+$$

$$\nu\left(\Delta v_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\beta}{\partial\beta}\right) \qquad (12\text{-}11)'''$$

$$\frac{\partial v_\beta}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\Delta v_\beta+\frac{v_\beta v_r}{r}+\frac{v_\theta v_\beta\cot\theta}{r}=f_\beta-\frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\beta}$$

$$+\nu\left(\Delta v_\beta+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\beta}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\beta}-\frac{\beta}{r^2\sin^2\theta}\right)$$

式中

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla=v_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{v_\beta}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\beta}$$

$$\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$$

在本节的最后，我们介绍一下纳维—斯托克司方程的求解问题。粘性不可压缩流体运动方程（12-11）是一个二阶非线性偏微分方程组，数学上还没有为我们提供普遍有效的解法。但对一些简单流动，由于流动的特点使方程或者能化为线性方程，或者能化为简单的非线性方程，这时可找出方程的准确解来。具有准确解的问题为数很少(迄今大约找出七十几个)，而且很少能应用到实际中去。因此通常我们不得不根据各种流动在力学上的特征，略去方程中某些次要项，将方程加以简化，得出近似方程，进而求解。这类求解的近似方法，可以分为两种情况：小Re数情形，可忽略惯性力项；大Re数情形，可忽略粘性力项。下面就来讨论在各具体情况下纳维—斯托克司方程的求解。

第四节　库埃特流与泊肃叶流

在这一节中我们讨论$N—S$方程的准确解。即在某些简单问题中，方程的非线性(惯性)项会自动消失，$N—S$方程成为线性的，从而可求到它的准确解。下面将以平行平板间粘性流体的二元流动及等径圆管中粘性流体的定常流动为例，说明$N—S$方程准确解的求法。

一、平行平板间的二元层流

设有两相距为h、水平放置的无限长平板，两板间有不可压缩粘性流体，流体在压力差和以一定速度u在自身平面内移动的上板的拖动下，自左至右做定常流动(图12-8)。设不计质量力，求解此流动。

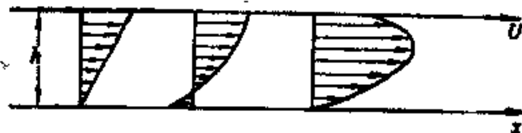


图12-8　平板间的二元层流

如图上那样取坐标系后则$v_y=v_z=0$，$v_x=v(x, y)$；$\rho=c$；$\frac{\partial}{\partial t}=0$；$f_x=f_y=f_z=0$，代入$N—S$方程（12-11）与连续性方程（8-3$b$)′则得到解题的方程组：

$$v\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

由第二、三方程推知$p=p(x)$；由第四方程得$v=v(y)$，代回第一方程中则有：

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}y^2}=\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{a}$$

边界条件：$y=0$，h时$v=0$，v_0。 (b)

式(a)左端为y的函数，右端为x的函数，两边相等的条件是均为常数。由此推得：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=c$$

可见压力按x的线性函数。沿板长方向分布。注意到$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=c$后，积分式(a)可得：

$$v=\frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}y^2+c_1y+c_2 \tag{c}$$

由边界条件（b）定积分常数：

$$c_2=0,\ c_1=\frac{u}{h}-\frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}h \tag{d}$$

把式(d)代回式(c)得速度分布：

$$v=\frac{u}{h}y-\frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(hy-y^2) \tag{12-12}$$

式（12-12）就是平板间二元流动的速度分布公式，为二次曲线。当$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}<0$时，整个横截面上速度为正值，分布见图12-8；当$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}>0$时，则在静止的下板附近可能产生倒流。上面所讨论的流动，叫做压力差和粘性拖动双重作用下的库埃特流。当无压力差$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0$，平板间流体仅在上板的粘性拖动之下流动，速度分布可由式（12-12）得到：

$$v=\frac{u}{h}y \tag{12-12$'$}$$

这是纯剪切库埃特流。

二、等直径圆管中的层流

设有粘性不可压缩流体，在水平放置的等直径圆管中，在压力差的作用下作定常层流运动，若质量力允许忽略，试求解此流动。

如取圆管某截面为r-θ平面，z轴与管轴重合顺流动方向，则在这样的柱坐标系中：$\rho=c$；$v_r=v_\theta=0$，$v_z\neq0$，由于流动的轴对称性和连续性$v_z=v(r)$；流动轴对称则$\frac{\partial}{\partial\theta}=0$；因定常流动则有$\frac{\partial}{\partial t}=0$；质量力不计，则$f_r=f_\theta=f_z=0$。因此在柱坐标系内的解题方程组，

根据（12-11）″为：

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$0=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

由一、二方程推知$p=p(z)$并注意$v=v(r)$，则得解题方程：

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} \tag{a}$$

边界条件：$r=r_0$、0时$v=0$和有限值 (b)

式（a）左端为r的函数，而右端为z的函数，两边相等的条件是同为常数。由此得出：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=c$$

这说明压力函数$p=p(z)$是z的线性函数。设沿z轴相距L的两点压力为p_1、p_2则

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=-\frac{p_1-p_2}{L}=-\frac{\Delta p}{L} \tag{c}$$

把式(c)代回式(a)积分得：

$$v=-\frac{\Delta p}{4\mu L}r^2+c_1\ln r+c_2 \tag{d}$$

由边界条件(b)定出积分常数c_1、c_2：

$$c_1=0, \qquad c_2=\frac{\Delta p}{4\mu L}r_0^2 \tag{e}$$

把式（e）代回式(d)则：

$$v=\frac{\Delta p}{4\mu L}(r_0^2-r^2) \tag{12-13}$$

上式说明、速度沿圆管截面按旋转抛物面分布。此结果已在第四章第三节式（4-5）中得到。上述不可压缩粘性流体在圆管中的压差流动，常冠以法国医生泊肃叶的名字，叫泊肃叶流。

由上二流例可见，对定常的平行流动来说，惯性力项将不出现，因而N—S方程可化为线性微分方程，故可以积分求出准确解。

第五节　低速粘性流体绕小球的运动

本节以小球的粘性绕流作为小雷诺数下，求近似解的一例。下面让我们来考虑以低速v_∞运动的粘性流体，绕过一个半径为r_0的小球作定常流动时，小球所遭受的阻力问题。这类流动问题，因特征尺寸r_0与特征流速v_∞都小，所以流动雷诺数$Re=r_0v_\infty/\nu$很小，属于小雷诺数流动。雷诺数代表惯性力与粘性力之比，雷诺数很小说明惯性力比粘性力小很多，因此作为零次近似我们可以将N—S方程中的惯性力全部略去。这么一来，N—S方程就化为

线性方程了，再把质量力也略去后，对不可压缩粘性流动的解题方程组可由（8-3b）及（12-11）′得出：

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0$$

$$0=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\Delta\boldsymbol{v} \qquad \text{(a)}$$

对于解球体绕流，为了方便可以取一球坐标系 r、θ、β：坐标原点0取在球心，r 从0点起算；θ 角从x轴起算，x轴的方向与来流方向重合；β 角则以

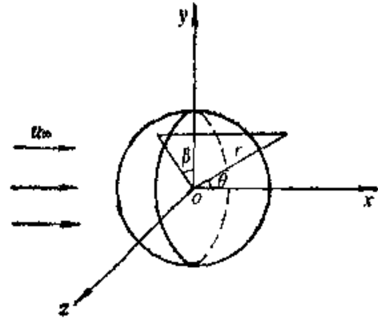


图12-9　绕球流动的球坐标系

y轴为始边（参图12-9）。根据流动定常及绕球流动的轴对称性，在上述球坐标系内：$\frac{\partial}{\partial t}=0$，$\frac{\partial}{\partial\beta}=0$，$v_\beta=0$则方程组(a)取下列形式

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{2v_r}{r}+\frac{v_\theta\cot\theta}{r}=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\mu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-\frac{2v_r}{r^2}-\frac{2\cot\theta}{r^2}v_\theta\right) \qquad \text{(b)}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}=\mu\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right)$$

边界条件则为：在圆球$r=r_0$上，$v_r=v_\theta=0$；在无穷远$r=\infty$处，$v_r=v_\infty\cos\theta$、$v_\theta=-v_\infty\sin\theta$。

式(b)是由三个方程组成的线性偏微分方程组，未知函数为$v_r(r,\ \theta)$，$v_\theta(r,\ \theta)$及$p(r,\ \theta)$。下面采用分离变量的方法解此方程组，为此设未知函数具有下列式样：

$$v_r=f(r)F(\theta),\ v_\theta=g(r)G(\theta),\ p=p_\infty+\mu h(r)H(\theta) \qquad \text{(c)}$$

对照无穷远处边界条件，则未知函数表示式应该改写成下列形状：

$$v_r=f(r)\cos\theta,\ v_\theta=-g(r)\sin\theta,\ p=p_\infty+\mu h(r)H(\theta) \qquad \text{(c)}'$$

那末，要求上述未知函数(c)′适合方程组(b)及相应边界条件，这等价于$f(r)$、$g(r)$、$h(r)$与$H(\theta)$须满足（把式(c)′代入式(b)与边界条件时得到的）下列方程及边界条件：

$$\cos\theta\left(f'-\frac{g}{r}+\frac{2f}{r}-\frac{g}{r}\right)=0$$

$$H(\theta)h'(r)=\cos\theta\left(f''-\frac{f}{r^2}+\frac{2f'}{r}-\frac{f}{r^2}+\frac{2g}{r^2}-\frac{2f}{r^2}+\frac{2g}{r^2}\right) \qquad \text{(d)}$$

$$H'(\theta)\frac{h}{r}=\sin\theta\left(-g''+\frac{g}{r^2}-\frac{2g'}{r}-\frac{g}{r^2}\cot^2\theta-\frac{2f}{r^2}+\frac{g}{r^2}\csc^2\theta\right)$$

边界条件：$f(a)=0$，$g(a)=0$，$f(\infty)=v_\infty$　$g(\infty)=v_\infty$。从方程组(d)中可以看出，要把变数θ分离出来则$H(\theta)$须取成$\cos\theta$，那末(c)′与方程组(d)就变成：

$$v_r=f(r)\cos\theta,\ v_\theta=-g(r)\sin\theta,\ p=p_\infty+\mu h(r)\cos\theta \qquad \text{(c)}''$$

$$f'+\frac{2(f-g)}{r}=0$$

$$h' = f'' + \frac{2}{r}f' - \frac{4(f-g)}{r^2} \tag{e}$$

$$\frac{h}{r} = g'' + \frac{2}{r}g' + \frac{2(f-g)}{r^2}$$

边界条件仍旧是：$f(a)=0$，$g(a)=0$，$f(\infty)=v_\infty$，$g(\infty)=v_\infty$。即在我们可以在上述边界条件下，求解方程组(e)了。

首先由式$(e)_1$(代表方程组(e)的第一个方程式，下面依此类推）得g的表达式：

$$g = \frac{r}{2}f' + f \tag{f}$$

把式(f)代入式$(e)_3$，则得h的表示式：

$$h = \frac{1}{2}r^2 f''' + 3rf'' + 2f' \tag{g}$$

将式(f)与(g)代入式$(e)_2$，则得到确定未知函数$f(r)$的常微分方程式：

$$r^3 f'''' + 8r^2 f''' + 8rf'' - 8f' = 0 \tag{h}$$

微分方程式(h)是众所周知的欧拉方程，它的解具有$f(r)=r^k$的形式，k为待定指数。把$f=r^k$代入式(h)，则得确定指数k的代数方程式：

$$k(k-1)(k-2)(k-3) + 8k(k-1)(k-2) + 8k(k-1) - 8k = 0$$

解出后得四个根：

$$k = -3,\ -1,\ 0,\ 2$$

于是得四阶常微分方程(h)之通解：

$$f(r) = \frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + C + Dr^2$$

代回式(f)、(g)后得$g(r)$、$h(r)$的表达式：

$$g(r) = -\frac{A}{2r^3} + \frac{B}{2r} + C + 2Dr^2$$

$$h(r) = \frac{B}{r^2} + 10rD$$

由边界条件可确定任意常数A，B，C，D，结果为：

$$A = \frac{1}{2}v_\infty r_0^3,\quad B = -\frac{3}{2}v_\infty r_0,\quad C = v_\infty,\quad D = 0$$

代回$f(r)$，$g(r)$，$h(r)$式中得：

$$f(r) = \frac{r_0^3 v_\infty}{2r^3} - \frac{3r_0 v_\infty}{2r} + v_\infty$$

$$g(r) = -\frac{r_0^3 v_\infty}{4r^3} - \frac{3r_0 v_\infty}{4r} + v_\infty \tag{i}$$

$$h(r) = -\frac{3r_0 v_\infty}{2r^2}$$

把式(i)代入式(c)″，则得到绕小球粘性流动的速度与压力分布：

$$v_r(r,\theta) = v_\infty\cos\theta\left[1 - \frac{3r_0}{2r} + \frac{r_0^3}{2r^3}\right]$$

$$v_\theta(r,\theta)=-v_\infty\sin\theta\left[1-\frac{3a}{4r}-\frac{r_0^3}{4r^3}\right] \tag{12-14}$$

$$p(r,\theta)=-\frac{3\mu r_0 v_\infty}{2r^2}\cos\theta+p_\infty$$

在取得速度与压力的表示式(12-14)的基础上，可以进而计算小球的运动阻力了。球面是以r为法线方向的表面，则作用在其上的应力为p_r，在球坐标系中它的三个分量为：

$$p_{rr}=-p+2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$\tau_{r\theta}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right) \tag{j}$$

$$\tau_{r\beta}=\mu\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial_\beta}-\frac{v_\beta}{r}\right)$$

在球面上：$v_r=v_\theta=0$，从而$\frac{\partial v_r}{\partial\theta}=\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}=0$，并由连续性方程(b)得$\frac{\partial v_r}{\partial r}=0$。把这些结果代入(j)得：

$$p_{rr}=-p$$

$$\tau_{r\theta}=\mu\frac{\partial v_\theta}{\partial r}$$

$$\tau_{r\beta}=0$$

第三式系由于$v_\beta=0$，$\frac{\partial}{\partial\beta}=0$的结果。把式(12-14)代入上式并令$r=r_0$，则得球面应力：

$$p_{rr}=\frac{3\mu v_\infty}{2r_0}\cos\theta-p_\infty$$

$$\tau_{r\theta}=-\frac{3\mu v_\infty}{2r_0}\sin\theta \tag{k}$$

小球阻力D为球面应力p_{rr}，$\tau_{r\theta}$在x轴向投影与面元dS之积的总和，即

$$D=\int_A(p_{rr}\cos\theta-\tau_{r\theta}\sin\theta)dA$$

A为球面，把它用垂直于x轴的平面分割成许多圆带形面元dA(参图12-10)，则$dA=2\pi(r_0\sin\theta)r_0d\theta$代入上积分后：

$$\begin{aligned}D&=\int_0^\pi(p_{rr}\cos\theta-\tau_{r\theta}\sin\theta)2\pi r_0^2\sin\theta d\theta\\&=2\pi r_0^2\int_0^\pi\left[\frac{3\mu v_\infty}{2r_0}\cos^2\theta+\frac{3\mu v_\infty}{2r_0}\sin^2\theta\right]\sin\theta d\theta\\&\quad-2\pi r_0^2p_\infty\int_0^\pi\sin\theta\cos\theta d\theta=3\pi\mu v_\infty r_0\int_0^\pi\sin\theta d\theta\\&=6\pi\mu v_\infty r_0\end{aligned} \tag{12-15}$$

此式于1851年首先由斯托克司得到，故称为斯托克司阻力公式。阻力公式(12-15)说明，小球所受阻力与来流速度、流体动力粘度及球半径r_0均成正比。根据上述阻力可计算圆球阻力

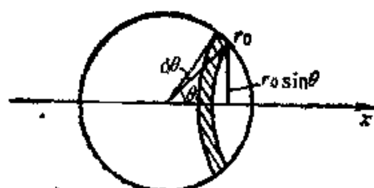


图12-10 小球的表面分割

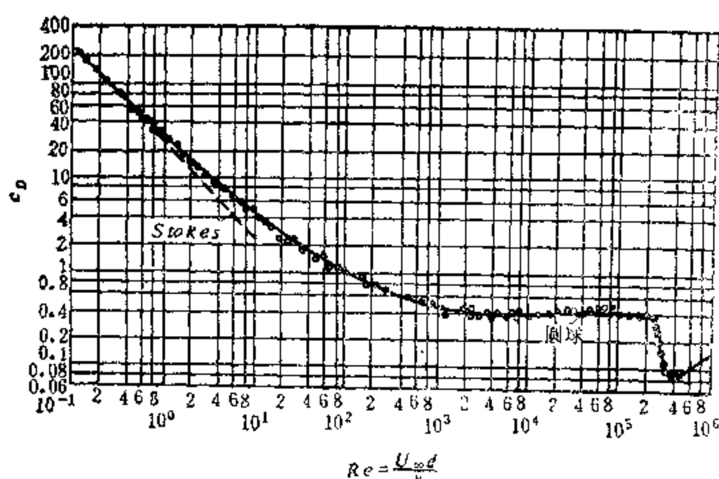


图12-11 圆球阻力系数与雷诺数关系曲线

系数：

$$C_D=\frac{D}{\frac{1}{2}\rho v_\infty \pi r_0^2}=\frac{24}{R_e} \tag{12-16}$$

式中 雷诺数 $R_e=\frac{v_\infty d}{\nu}$，$d$——圆球直径。

实验表明，斯托克司结果只适用于$R_e\leqslant1$的情况，超出此范围则须采用其它经验公式。现把这些算式一起列出如下：

$$C_D=\frac{24}{R_e} \qquad R_e\leqslant1$$

$$C_D=\frac{B}{\sqrt{R_e}} \qquad R_e=10\sim1000$$

$$C_D=0.48 \qquad R_e=1000\sim2\times10^5$$

阻力系数与雷诺数的实验关系曲线，参看图12-11。

［例12-1］ 设有粒径$d=2\times10^{-4}$m的煤粉在炉膛内温度1300℃的烟气中作相对运动，相对运动速度$v=0.45$m/s，此时烟气的运动粘度$\nu=234\times10^{-6}$m²/s，试计算煤粉颗粒所遭受的阻力（$\rho_{烟气}=0.23$kg/m³）。

［解］ 运动雷诺数

$$R_e=\frac{vd}{\nu}=\frac{0.45\times2\times10^{-4}}{234\times10^{-6}}=0.385<1$$

阻力

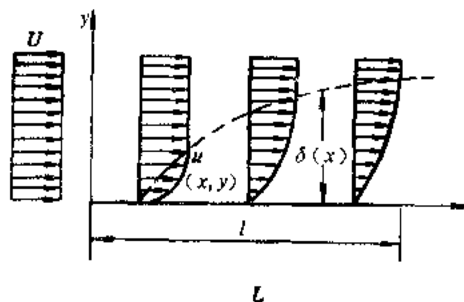
$$\begin{aligned}F_D&=C_D\times\frac{\pi}{4}d^2\times\frac{1}{2}\rho v^2\\&=\frac{24}{R_e}\times\frac{\pi}{4}d^2\times\frac{1}{2}\rho v^2\\&=\frac{24}{0.385}\times\frac{\pi}{4}(2\times10^{-4})^2\times\frac{1}{2}(0.23)(0.45)^2\text{N}\\&=3.97\text{N}\end{aligned}$$

第六节　边界层概念及勃朗特边界层方程

在前面两节，我们讨论了不可压缩流体N-S方程的准确解及小雷诺数下的近似解。准确解数目很少，远不能满足工程实际的需要；小雷诺数近似解也只能应用于范围狭窄的一部分实际问题中，如小颗粒、小液滴在流体中的低速沉降和轴承润滑等。绝大多数工程（如航空、航海、水利、动力等）实际流动，都属于大雷诺数流动，所以研究大雷诺数流动具有重大实际意义。从本节开始，我们介绍大雷诺数情形下的近似解法，即边界层理论。

一、边界层概念

如果将一平板顺流放在空气或水等粘性不大的流体中被绕流时，测出板顺流各截面沿法线方向速度分布，则速度剖面如图12-12所示。根据平板各处的速度分布剖面，可以把整个流场明显地分成性质不同的两个流域：一个是紧贴平板的薄层流域，称为边界层；一个是边界层以外的整个流域，叫外流区。



L

图12-12　平板上的边界层

在边界层内，流速沿板法向迅速由板面上零值变到边界层外边界上的来流速度值u（参图12-12），速度梯度$\frac{\partial v_x}{\partial y}$很大，比$\frac{\partial v_x}{\partial x}$大一个量级。因此即使流体粘度$\mu$很小，粘性力$\tau=\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}$仍可达到很高的数值。实际上，在边界层中粘性力是一个与惯性力具有同样量级的量。此外，由于$\frac{\partial v_x}{\partial y}$很大，故流团受到强烈的剪切、从而边界层内产生了很强的旋涡。所有这些都是在边界层厚度δ内发生的，而δ定义为边界层内速度达到外部来流速度u的99%地方至板的距离。δ一般很小，例如对叶片式流体机械，边界层厚δ约为几个毫米。已经探明相对厚度$\frac{\delta}{l}\sim\frac{1}{\sqrt{R_e}}$（$l$为板长），可见当$R_e$很大时$\frac{\delta}{l}$将是个小量。

外流区速度剖面变化缓慢，$\frac{\partial v_x}{\partial y}$很小。因此粘性应力$\tau=\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}$也很小，与惯性力相比可以全部略去，流体可当成理想的。又由于来流是均匀的，所以外区流动还是无旋的。

如上所述，在大R_e数流动情况下，应当把流场分成边界层流动和外部流动两个区域。外部流动属于理想流体势流，已在前面两章详细讨论过其解法。因此，我们可以认为外流已经解出，特别是边界层外边界上的压力与速度分布为已知，它将作为解边界层流动的外边界条件。边界层内流动，则是粘性流体的有旋运动，其控制方程为N-s方程。

二、勃朗特边界层方程式

由上所述在大R_e数情形下，只要在边界层内考虑流体的粘性就可以了。虽然凡是粘性流动其运动方程仍然是N-s方程，但根据实验提供的结果：1)边界层相对厚度$\frac{\delta}{l}$为一小量；

2） 边界层内粘性力与惯性力同阶。则在边界层内N-S方程可以得到重大简化。简化后的方程叫作勃朗特边界层方程式，是处理边界层流动的基本方程，下面就来导出对平板的二元边界层方程。

取直角坐标系oxy，x轴与板重合，y轴垂直于平板(参图12-12)。在这个坐标系内写出不可压缩粘流基本方程组：

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) \tag{a}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right)$$

为了对方程内各项的量级进行比较，将方程组(a)无量纲化。为此引进无量纲参数：

$$v'_x=\frac{v_x}{U},\quad v'_y=\frac{v_y}{U},\quad p'=\frac{p}{\rho U^2}$$

$$x'=\frac{x}{l},\quad y'=\frac{y}{l},\quad t'=\frac{t}{T} \tag{b}$$

式中 U——来流速度；

l——平板长度；

T——某特征时间。

把式(b)代进式(a)后得无量纲方程组：

$$\frac{\partial v'_x}{\partial x'}+\frac{\partial v'_y}{\partial y'}=0$$

$$St\frac{\partial v'_x}{\partial t'}+v'_x\frac{\partial v'_x}{\partial x'}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y'}=-\frac{\partial p'}{\partial x'}+\frac{1}{R_e}\left(\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2}\right) \tag{c}$$

$$St\frac{\partial v'_y}{\partial t'}+v'_x\frac{\partial v'_y}{\partial x'}+v'_y\frac{\partial v'_y}{\partial y'}=-\frac{\partial p'}{\partial y'}+\frac{1}{R_e}\left(\frac{\partial^2 v'_y}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 v'_y}{\partial y'^2}\right)$$

式中 $St=\frac{l}{TU}$ 为斯特罗哈数，$Re=\frac{Ul}{\nu}$ 为雷诺数。

下面我们对方程组(c)中每一项，评估它们在边界层内的量级。在评估前对量级作几点说明：

1） 评估量级，首先必须确定一个标准量级，其它量级都是和这个标准量级比较而言的。在边界层问题中，我们是取$\delta'=\delta/l$为标准量级的，$\delta'\ll 1$。

2） 所谓一个量A在边界层内与某个量B是同量级的，是指此二量之比值在边界层内等于非零常数。二量同阶用记号"～"表示，则在边界层内二量同阶可记做：$A\sim B$或$\frac{A}{B}\sim\delta'^0$。

3） 说一个量A在边界层内与δ'^n同量级时，是指量A在边界层内相对于δ'^n之平均水平而言，并不排斥A在边界层内个别点上取值高于或低于量级δ'^n。如在平板边界层内，速度分量$v_x\sim U$；但不排斥v_x在平板上驻点取零值。

4） 如$A\sim\delta'^n$，$B\sim\delta'^m$则$A\pm B\sim\delta'^r$（r为m，n中之较小者）；$A\cdot B\sim\delta'^{(m+n)}$。

下面来对方程组(c)中每一项，在边界层内的量级进行评估。

1．v'_x 与 $\frac{\partial v'_x}{\partial y'}$，$\frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2}$，$\frac{\partial v'_x}{\partial x'}$，$\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2}$ 的量级

在边界层内 v_x 与 U 同量级，所以 $v'_x=\frac{v_x}{U}\sim\frac{v}{U}=1$ 可以记成 $v'_x\sim 1$。因 y 的量级为 δ，则 $y'=\frac{y}{l}$ 的量级为 δ'，又 $v'_x\sim 1$，从而 $\partial y'\sim\delta'$，$\partial v'_x\sim 1$ 故 $\frac{\partial v'_x}{\partial y'}$ 的平均水平为 $\frac{1}{\delta'}$，记为 $\frac{\partial v'_x}{\partial y'}\sim\frac{1}{\delta'}$。再者，$\partial y'\sim\delta'$、$\partial\left(\frac{\partial v'_x}{\partial y'}\right)\sim\frac{1}{\delta'}$ 则 $\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial v'_x}{\partial y'}\right)\sim\frac{1}{\delta'^2}$，即 $\frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2}\sim\frac{1}{\delta'^2}$。在边界层内 $v'_x\sim 1$、$x'\sim 1$，从而 $\frac{\partial v'_x}{\partial x'}\sim 1$；同理 $\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2}\sim 1$。总起来有 $v'_x\sim 1$，$\frac{\partial v'_x}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2}\sim 1$，$\frac{\partial v_x}{\partial y'}\sim\frac{1}{\delta'}$，$\frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2}\sim\frac{1}{\delta'^2}$。

2．v'_y 及 $\frac{\partial v'_y}{\partial y'}$，$\frac{\partial v'_y}{\partial y'^2}$，$\frac{\partial v'_y}{\partial x'}$，$\frac{\partial^2 v'_y}{\partial x'^2}$ 的量级

从方程组(c)中第一方程得

$$\frac{\partial v'_y}{\partial y'}=-\frac{\partial v'_x}{\partial x'}\sim 1$$

$$v'_y=\int_0^{y'}\frac{\partial v'_y}{\partial y'}\,dy'=y'\sim\delta'$$

由此容易得：$\frac{\partial v'_y}{\partial x'}\sim\delta'\frac{\partial^2 v'_y}{\partial x'^2}\sim\delta'\frac{\partial v'_y}{\partial y'}\sim 1\frac{\partial^2 v'_y}{\partial y'^2}\sim\frac{1}{\delta'}$。

3．$St\frac{\partial v'_x}{\partial t}$ 与 $St\frac{\partial v'_y}{\partial t}$ 的量级

如无突然加速度，则可设它们与位变加速度同阶：$St\frac{\partial v'_x}{\partial t}\sim v'_x\frac{\partial v'_x}{\partial x'}\sim 1$，$St\frac{\partial v'_y}{\partial t}\sim v'_x\frac{\partial v'_y}{\partial x'}\sim\delta'$。

4．$\frac{\partial p'}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial p'}{\partial y'}$ 的量级

受方程组(a)控制的运动流体中，共作用着三种力：惯性力、压力与粘性力。其中主动力只有惯性力与粘性力两种，压力为起平衡作用的反作用力。故压力的量级应与二主动力中之大者相同，而在边界层中二主动力同阶，所以有：$\frac{\partial p'}{\partial x'}\sim 1$，$\frac{\partial p'}{\partial y'}\sim\delta'$。

我们重新写出无量纲运动方程组(c)，并标出方程中各项的量级，对它们进行分析比较，忽略掉高阶小量，就可以简化纳维—斯托克司方程。

$$\overset{1}{\frac{\partial v'_x}{\partial x'}}+\overset{1}{\frac{\partial v'_y}{\partial y'}}=0$$

$$
St\overset{1}{\frac{\partial v_x'}{\partial t'}}+\overset{1}{v_x'}\overset{1}{\frac{\partial v_x'}{\partial x'}}+\overset{\delta'}{v_y'}\overset{\frac{1}{\delta'}}{\frac{\partial v_x'}{\partial y'}}=-\overset{1}{\frac{\partial p'}{\partial x'}}+\frac{1}{R_e}\left(\overset{1}{\frac{\partial^2 v_x'}{\partial x'^2}}+\overset{\frac{1}{\delta'^2}}{\frac{\partial^2 v_x'}{\partial y'^2}}\right) \tag{d}
$$

$$
St\overset{\delta'}{\frac{\partial v_y'}{\partial t'}}+\overset{1}{v_x'}\overset{\delta'}{\frac{\partial v_y'}{\partial x'}}+\overset{\delta'}{v_y'}\overset{1}{\frac{\partial v_y'}{\partial y'}}=-\overset{\delta'}{\frac{\partial p'}{\partial y'}}+\frac{1}{R_e}\left(\overset{\delta'}{\frac{\partial^2 v_y'}{\partial x'^2}}+\overset{\frac{1}{\delta'}}{\frac{\partial^2 v_y'}{\partial y'^2}}\right)
$$

比较方程组(d)内各项的量级：

1) 在第二、三方程右边括号中，第二项比第一项大两个量级，故第一项可以略掉。

2) 整个第三方程的量级为δ'，比其它方程小一个量级。故可把第三方程略去，但所剩方程组就不封闭了。考虑到$\frac{\partial p'}{\partial y'}\sim\delta'$与$\frac{\partial p'}{\partial x'}\sim 1$相比，在一级近似范围内可认为$\frac{\partial p'}{\partial y'}=0$。把此式补充进上述剩余方程中，则所得方程组就封闭了，它们是：

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial v_x'}{\partial x'}+\frac{\partial v_y'}{\partial y'}=0 \\
St\frac{\partial v_x'}{\partial t'}+v_x'\frac{\partial v_x'}{\partial x'}+v_y'\frac{\partial v_x'}{\partial y'}=-\frac{\partial p'}{\partial x'}+\frac{1}{R_e}\frac{\partial^2 v_x'}{\partial y'^2} \\
\frac{\partial p'}{\partial y'}=0
\end{gathered} \tag{e}
$$

利用关系式(b)把方程组转换回有量纲形式，我们得到

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0 \\
\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\
\frac{\partial p}{\partial y}=0
\end{gathered} \tag{12-17}
$$

方程组(12-17)的边，初条件为

1) 边界条件：$y=0$处，$v_x=v_y=0$；$y=\delta$处，$v_x=U(x)$。其中$U(x)$是边界层外边界上，解外流所得的速度分布。

2) 初始条件：$t=t_0$时，给出速度函数$v_x(x,y)$，$v_y(x,y)$。

勃朗特考虑到在边界层内$\frac{\partial p}{\partial y}=0$，即压力穿过边界层不变，也就是说压力沿物面的分布$p(x,t)$及变化率$\frac{\partial p}{\partial x}$就等于它沿边界层外边界的分布及变化率。而绕边界层外边界的理想流体流动，可近似地用绕形成边界层的物体的理想流体流动来代替。但理想流体运动方程在物面上为

$$
\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}
$$

代入方程(12-17)则得

$$
\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0 \tag{12-18}
$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

相应的边界、初始条件为

1） 边界条件：$y=0$，$v_x=v_y=0$；$y=\delta$，$v_x=U(x)$，其中$U(x)$是理想流体绕物体流动中，物面上的流速分布。

2） 初始条件：$t=t_0$时，v_x、v_y分布已知。

方程(12-18)是勃朗特于1904年在汉堡第三届国际数学会上提出来的，故称为勃朗特边界层方程，这是求解边界层流动的基本微分方程。方程(12-18)虽为对二元平板导出的，但它也适用于曲率半径较大、并且曲率半径变化较小的曲面边界层。另外，方程组(12-18)还是在层流前提下导出的，但只要略为改变第二个方程的形式，则就还可以推广应用于边界层内为紊流的情况

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y} \qquad (12\text{-}19)$$

上式中τ为摩擦切应力：

对于层流 $$\tau=\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$(12\text{-}20)$$

对于紊流 $$\tau=\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}+\rho l^2\left|\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

第七节 边界层动量积分关系式

勃朗特边界层方程比纳维—斯托克司方程，有了很大的简化，但它仍旧是一个二阶非线性偏微分方程组。由于方程的非线性性质依然保留，故数学上对它求解的困难原则上并未消除，故只在少数特殊情形下（例如平板、楔形物体等）才能求出准确解，一般情况下积分边界层方程则仍然相当困难。因此人们不得不采用近似方法，求解边界层流动。近似方法中，计算量较小和在工程实际上被广泛采用的一个，是动量积分关系式法。这个方法解题是从动量积分方程出发，而不是从动量微分方程——勃朗特边界层方程出发。这意味着，这个方法不要求每个流体质点细致地满足边界层微分方程，而只要求在边界层各断面上流体质点平均地、总体地满足沿边界层的动量积分方程，因此这是求解边界层流动的一个近似方法。这一节我们建立边界层的动量积分关系式。

现在利用动量定理推导边界层中的动量积分关系式。假设：

1） 物体表面为平直或微有弯曲；

2） 略去质量力；

3） 流动为二元和定常的。

在边界层厚度δ内取一控制体，它的平面投影为$ABCD$(如图12-13)。控制体由：沿x轴向且

长为dx的壁面AD、边界层外边界面BC、相距dx的二平面AB与DC以及平行纸面且相距为一个单位的二平面共同围成。对此控制体，沿x轴向的动量定理可叙述为：单位时间之内流出、流进控制体$ABCD$的沿x轴向的动量之差，就等于作用在控制体$ABCD$中流体上的各力在x轴向投影之和。

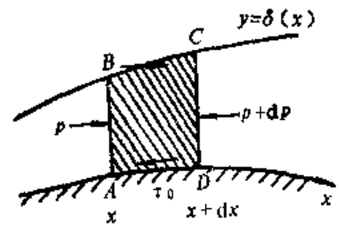


图12-13　边界层中的控制体

先来计算单位时间内出、进控制体$ABCD$的动量差。经控制面AB流进$ABCD$的x轴向动量为

$$K_{AB}=\int_0^{\delta}\rho v_x^2\mathrm{d}y \tag{a}$$

为计算经BC面流进控制体的动量，考虑由AB面流进$ABCD$的质量流量

$$M_{AB}=\int_0^{\delta}\rho v_x\mathrm{d}y$$

由DC面流出的质量流量则可表示为

$$M_{DC}=\int_0^{\delta}\rho v_x\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{\delta}\rho v_x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

那么通过DC与AB流出，流进的质量流量之差为

$$M_{DC}-M_{AB}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{\delta}\rho v_x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

根据流动连续性的要求，DC与AB面净流出的流体质量必须等于通过BC流进来的质量，即

$$M_{BC}=M_{DC}-M_{AB}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{\delta}\rho v_x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

在外边界BC处流速$v_x=U$，于是通过BC边界面流进$ABCD$的流体动量为：

$$K_{BC}=U\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{\delta}\rho v_x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \tag{b}$$

因此，单位时间内流进控制体$ABCD$的沿x轴向的总动量为

$$K_{AB}+K_{BC}=\int_0^{\delta}\rho v_x^2\mathrm{d}y+U\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{\delta}\rho v_x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \tag{c}$$

经DC面流出的动量，在式(a)基础上可表示为

$$K_{DC}=\int_0^{\delta}\rho v_x^2\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{\delta}\rho v_x^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \tag{d}$$

那末单位时间内，流出、流进控制体$ABCD$的沿x轴向动量之差为：

$$K_{DC}-(K_{AB}+K_{BC})=\left(\frac{d}{\mathrm{d}x}\int_0^{\delta}\rho v_x^2\mathrm{d}y-U\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\delta}\rho v_x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \tag{e}$$

其次，考虑作用在$ABCD$内流体上的各力、沿x方向投影之总和。因忽略质量力，故只有面力。这些面力中，在x轴方向有分量的为下面四个：1)壁面AD上的摩擦阻力$-\tau_0\mathrm{d}x$，τ_0为壁面切应力；2)外边界面BC上的压力(参图12-14)$p\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos\theta}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=p\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\mathrm{d}x$

$=p\mathrm{tg}\theta\mathrm{d}x=p\dfrac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$；3)$AB$面上的压力$p\delta$；4)$CD$面上的压力$-p\delta-\dfrac{\mathrm{d}(p\delta)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$。这些在$x$轴向分力之和为：

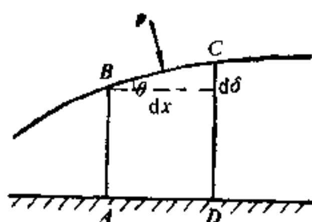


图12-14 外边界上压力的x轴分量

$$p\delta-p\delta-\frac{\mathrm{d}(p\delta)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+p\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x}-\tau_0\mathrm{d}x$$

$$=-\delta\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x-\tau_0\mathrm{d}x \tag{f}$$

根据动量定理，式(e)等于式(f)，于是得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta\rho v_x^2\mathrm{d}y-U\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta\rho v_x\mathrm{d}y=-\delta\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-\tau_0$$

由于在边界层外边上$-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\rho U\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$并把$\delta=\int_0^\delta\mathrm{d}y$代入上式得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta\rho v_x^2\mathrm{d}y-U\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta\rho v_x\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta\rho u\mathrm{d}y-\tau_0$$

在上式中令$U\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta\rho v_x\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta\rho Uv_x\mathrm{d}y-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta\rho v_x\mathrm{d}y$ 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta\rho v_x^2\mathrm{d}y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta\rho Uv_x\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta\rho v_x\mathrm{d}y-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta\rho U\mathrm{d}y=-\tau_0$$

改变等式双方符号后得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta\rho v_x(U-v_x)\mathrm{d}y+\frac{dU}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta\rho(U-v_x)\mathrm{d}y=\tau_0$$

或双边除ρu^2则

$$\frac{1}{U^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta v_x(U-v_x)\mathrm{d}y+\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta(U-v_x)\mathrm{d}y=\frac{\tau_0}{\rho U^2}$$

将上式左边加以变换：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{U^2}\int_0^\delta v_x(U-v_x)\mathrm{d}y\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{U^2}\right)\int_0^\delta v_x(U-v_x)\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\frac{1}{U}\int_0^\delta\left(1-\frac{v_x}{U}\right)\mathrm{d}y=\frac{\tau_0}{\rho U^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta\frac{v_x}{U}\left(1-\frac{v_x}{U}\right)\mathrm{d}y+2\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\frac{1}{U}\int_0^\delta\frac{v_x}{U}\left(1-\frac{v_x}{U}\right)\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\frac{1}{u}\int_0^\delta\left(1-\frac{v_x}{U}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\tau_0}{\rho U^2}$$

令

$$\delta_1=\int_0^\delta\left(1-\frac{v_x}{U}\right)\mathrm{d}y,\quad\delta_2=\int_0^\delta\frac{v_x}{U}\left(1-\frac{v_x}{U}\right)\mathrm{d}y \tag{12-21}$$

$$\frac{\mathrm{d}\delta_2}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{u}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\delta_2+\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\delta_1=\frac{\tau_0}{\rho U^2}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\delta_2}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{U}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(2+H)\delta_2=\frac{\tau_0}{\rho U^2} \tag{12-22}$$

式中 $H=\frac{\delta_1}{\delta_2}$称为形状因子。式(12-22)是卡门在1921年首先得到，故称为卡门动量积分方程。它既适用于层流边界层，也适用于紊流边界层。

在动量积分方程(12-22)中，ρ为已知常数，U为分布在边界层外边界上的势流速度，通

流体力学 朱

过求解外部流动也为已知的，故方程(12-22)中包含三个未知函数 δ、v_x、τ_0。因此，在用动量积分方程求解边界层流动时，尚需补充两个关系式。通常人们根据经验，补充进关于v_x与τ_0的两个假定关系式，假定越接近实际则所得结果精度越高。

最后我们来说明一下出现在动量积分方程中的 δ_1 与 δ_2。设有流体流过平板ox表面，在边界层截面AC上，考虑过C点的流线Ⅰ Ⅱ′(参图12-15)。如流体为理想流体时，此流线本应在通过Ac截面上内点B的Ⅰ Ⅱ位置。由于板面的粘性阻滞作用，使AB断面上的流速降低，故为了能通过在上游平板和所论流线间流管中同样大小的流量，则必须扩大过流断面AB，致使流线Ⅰ Ⅱ被排挤沿截面AC向外位移了一个厚度(距离)δ_1，成为经过边界层截面与外边界交点C的流线Ⅰ Ⅱ′。如上所述，理想流体通过截面积AB的流量，就应该等于粘性流体穿过截面积AC的流量。设AC截面上边界层厚度为δ，流过板面的理想流体速度为u(常数)，则上述两个流量分别应为

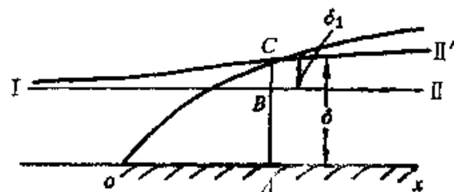


图12-15

$$U(\delta-\delta_1)$$

$$\int_0^\delta v_x \mathrm{d}y$$

令其相等则得：

$$U(\delta-\delta_1)=\int_0^\delta v_x \mathrm{d}y$$

$$U\delta_1=U\delta-\int_0^\delta v_x\mathrm{d}y=\int_0^\delta U\mathrm{d}y-\int_0^\delta v_x\mathrm{d}y=\int_0^\delta (U-v_x)\mathrm{d}y$$

从而

$$\delta_1=\int_0^\delta\left(1-\frac{v_x}{U}\right)\mathrm{d}y$$

和式(12-21)中δ_1表达式完全一样。故知那个δ_1代表理想流体流线在考虑到流体粘性时被向外排挤出去的厚度，故称δ_1为排挤厚度(或位移厚度)。

如上所说，粘性流体穿过边界层截面的流量为$\int_0^\delta v_x\mathrm{d}y$，同样大小的流量如按理想流体计算则应为$U(\delta-\delta_1)$。与所述流量相应的理想流体和粘性流体具有的动量分别为：$\rho U^2(\delta-\delta_1)$、$\int_0^\delta \rho v_x^2\mathrm{d}y$ 它们并不相等。其差

$$\rho U^2(\delta-\delta_1)-\int_0^\delta \rho v_x^2\mathrm{d}y$$

即为由于粘性作用所致的动量损失，利用式(12-21)上式可改写成：

$$\int_0^\delta \rho U v_x\mathrm{d}y-\int_0^\delta \rho\, v_x^2\mathrm{d}y=\int_0^\delta \rho v_x(U-v_x)\mathrm{d}y$$

所损失的动量，如按理想流体在单位时间内流过过流断面时，所需的穿流厚度 δ_2 计算，则有：

$$\rho U^2\delta_2=\int_0^\delta \rho v_x(U-v_x)\mathrm{d}y$$

从而

$$\delta_2=\int_0^\delta \frac{v_x}{U}\left(1-\frac{v_x}{U}\right)\mathrm{d}y$$

此表示式与(12-21)中δ_2的式子完全一致。这说明动量积分方程(12-22)中所出现的δ_2，代表一个动量损失厚度，在流体力学中正是这样称呼δ_2的。

第八节 平板边界层计算

前面我们介绍了边界层基本概念，并建立了边界层内流动参数的微分、积分关系式。下面我们应用这些基本理论，讨论顺流放置的平板上面的边界层流动，作为应用边界层理论的一个例子。平板形状简单，能较好地应用理论分析和较容易进行实验测量，故平板边界层计算具有重要的理论意义；另外，对平板所得的阻力规律也有助于其它流线型物体（如船体、机身、机翼，叶片等）的阻力分析，因之也具有很大实用价值。

当来流流过顺置平板在其上形成边界层时，起始层段总维持有一段层流边界层。然后随着离开板起始端距离x的增加，雷诺数$R_{ex}=\frac{Ux}{\nu}$将逐渐加大，当R_{ex}达到一定临界值$R_{ec}=\frac{Ux_c}{\nu}$(x_c为边界层流态转变点的坐标)时，层流就会转变为紊流。R_{ec}的大小在下述范围内：

$$3\times10^5<R_{ec}<3\times10^6$$

当来流紊流度大时R_{ec}取小值，平板光滑度大则R_{ec}取大值。一般平均地可取$R_{ec}=5\times10^5$。如果整个平板边界层流动全处在层流状态，则叫平板层流边界层；如果平板边界层内既含有层流段又含有紊流段，但层流段所占比重很小，可不单独处理，而把它一并按紊流处理，并且所引起的误差也可忽略不计时，则此边界层就叫做平板紊流边界层。

在边界层的实际计算中，大都采用卡门动量积分方程。这方法比较简单，也有足够精度。在平板情况下，边界层外边界上速度等于来流速度、为一常数(即$U=$常数)。故对平板，动量积分方程式(12-22)成为：

$$\frac{d\delta_2}{dx}=\frac{\tau_0}{\rho U^2} \tag{12-23}$$

式(12-23)是下面我们对平板边界层流动进行分析的原始方程，其中仍包含v_x、τ_0、δ三个未知函数，为了求解尚需补充两个方程式。通常根据经验给出关于速度分布和壁面切应力的两个关系式，作为补充方程。对层流边界层和紊流边界层，补充关系式不一样，下面分开讨论。

一、平板层流边界层的近似计算

当$R_{el}=\frac{Ul}{\nu}<R_{ec}=\frac{Ux_c}{\nu}$时，$l<x_c$，也就是说流态转变点位置超出平板的长度以外，这时整个平板边界层流动处于层流状态。为应用动量积分方程式(12-23)解此边界层流动，需要再补充两个关系式。

第一个补充关系式：假定在边界层中，流速按y的幂级数规律分布，即

$$v_x=a_0+a_1y+a_2y^2+a_3y^3+a_4y^4 \tag{a}$$

在边界层内y是一个小量，故五阶以上微不足道不再考虑了。$a_i(i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$为待定系数，根据内、外边界条件确定。

1) 在内边界$y=0$处：由粘附条件得$v_x=v_y=0$；由方程(12-17)第二式，并注意到定常

流 $\frac{\partial v_x}{\partial t}=0$和$\frac{dp}{dx}=0$ 则得$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=0$。

2) 在外边界$y=\delta$处：$v_x=U$(来流速度)；因$\tau=\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}=0$，故$\frac{\partial v_x}{\partial y}=0$；由方程(12-17)第二式$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$，但外边界处伯努里方程为$p+\frac{1}{2}\rho U^2=c$，则$\frac{dp}{dx}=-\rho U\frac{dU}{dx}$，而$\frac{dU}{dx}=0$，那末$\frac{dp}{dx}=0$，故得$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=0$。

由上述边界条件定出五个待定系数为

$a_0=0$；$a_1=\frac{2U}{\delta}$；$a_2=0$；$a_3=\frac{-2U}{\delta^3}$，$a_4=\frac{U}{\delta^4}$。从而边界层内速度分布规律为

$$v_x=U\left[2\left(\frac{y}{\delta}\right)-2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3+\left(\frac{y}{\delta}\right)^4\right] \tag{b}$$

上式中$\delta=\delta(x)$代表x处边界层厚度。

第二个补充关系式：利用牛顿内摩擦公式可得：

$$\tau_0=\mu\left(\frac{dv_x}{dy}\right)_{y=0}=2\mu\frac{U}{\delta} \tag{c}$$

建立了上述两个补充方程(b)、(c)后，和动量积分方程式(12-23)合在一起，我们共有了关于平板层流边界层的三个方程，可以对三个未知量v_x、δ、τ_0进行联立求解了。为此，先将式(b)之v_x代进式(12-21)，计算出动量损失厚度δ_r：

$$\delta_x=\int_0^\delta\frac{v_x}{U}\left(1-\frac{v_x}{U}\right)dy=\frac{1}{U}\int_0^\delta v_x dy-\frac{1}{U^2}\int_0^\delta v_x^2 dy=\frac{1}{U}\left(\frac{7}{10}U\delta\right)-\frac{1}{U^2}\left(\frac{367}{630}U^2\delta\right)$$

$$=\frac{7}{10}\delta-\frac{367}{630}\delta$$

从而

$$\delta_r=\frac{74}{630}\delta \tag{d}$$

把式(c)与式(d)代进式(12-23)得

$$\frac{74}{630}\frac{d\delta}{dx}=\frac{2\mu}{\rho U^2}\frac{U}{\delta}$$

即

$$\frac{37}{630}\delta d\delta=\frac{\nu}{U}dx$$

积分后得

$$\frac{37}{1260}\delta^2=\frac{\nu}{U}x+c$$

由于在平板前缘$x=0$时$\delta=0$，定出积分常数c：

$$c=0$$

代回上式得边界层厚度δ随坐标x的分布规律：

$$\frac{37}{1260}\delta^2=\frac{\nu}{U}x$$

或

$$\delta=5.84\sqrt{\frac{\nu x}{U}}=\frac{5.84x}{\sqrt{R_{ex}}} \tag{12-24}$$

可以看出边层厚度δ与$x^{\frac{1}{2}}$成比例。把式(12-24)代进式(b)与式(c)可得v_x及τ_0的解式。对于后者有：

$$\tau_0=\frac{2\mu U}{5.84\sqrt{\frac{\nu x}{U}}}=0.343\sqrt{\frac{\mu\rho U^3}{x}} \tag{12-25}$$

设平板长度l、宽度为b，则作用在顺流放置的平板一个板面上的总摩擦阻力为：

$$F_D=\int_0^l \tau_0 b\,dx=0.343b\sqrt{\mu\rho U^3}\int_0^l\frac{dx}{\sqrt{x}}=0.686b\sqrt{\mu\rho l U^3} \tag{12-26}$$

可见，此时摩擦阻力与速度的1.5次方成正比。摩擦阻力系数则为：

$$C_f=\frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 bl}=\frac{1.372}{\sqrt{R_{el}}} \tag{12-27}$$

式中$R_{el}=\frac{Ul}{\nu}$指以板长l为特征长度的雷诺数。勃拉修司于1908年在他的博士论文中，从勃兰特边界层微分方程出发，也曾对平板层流边界层进行过计算，并得到更符合实验结果的下列摩擦阻力系数的公式

$$C_f=\frac{1.328}{\sqrt{R_{el}}} \tag{12-28}$$

[例12-2] 有一块长$l=1$m、宽$b=0.5$m的平板，在水中沿长度方向以$v=0.45$ m/s的速度运动，如水的运动粘度$\nu=10^{-6}$m²/s、密度$\rho=1000$kg/m³时，计算平板所遭受的阻力多大？

[解]

（1） 求流态转变点的坐标

$$\frac{0.45\times x_c}{10^{-6}}=R_{ec}=5\times10^5$$

所以

$$x_c=1.11\text{m}$$

（2） 边界层中流态判别

由于

$$l=1\text{m}<1.11\text{m}=x_c$$

因此可以判定平板边界层中为层流。

（3） 取定阻力系数

边界层为层流，故阻力系数可按式(12-28)计算

$$C_f=\frac{1.328}{\sqrt{R_{el}}}=2\times10^{-3}$$

（4） 平板遭受之阻力

$$F_D=2C_f bl\frac{1}{2}\rho v^2=0.2\text{N}$$

二、平板紊流边界层的近似计算

从平板动量积分方程(12-23)出发进行平板紊流边界层的计算，仍旧需要找两个补充关系式。这个问题，目前还不能从理论上解决。勃兰特认为：可以将沿平板边界层内的紊流流动

与流体在圆管中的紊流流动进行比拟。而圆管内的紊流运动已被完整地研究过，其运动规律已经清楚。于是，就可以参照管内紊流流动的成果来建立求解平板紊流边界层的两个补充关系式了。这时注意下列相当关系：

平板来流速度U～管轴上最大速度v_{max}，

边界层厚度δ～圆管半径r_0。

基于上述，参照圆管中的紊流速度指数分布规律公式(4-35)(式中令$n=7$)，建立求解平板紊流边界层的第一个补充关系式：

$$\frac{v_x}{U}=\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \tag{a}$$

第二个补充关系式，则须作几步推导。由圆管公式(4-41)可得：

$$\tau_0=\frac{\lambda}{8}\rho v^2$$

将上式中阻力系数λ，代以勃拉修司公式(4-48)、并平均速度v代以$0.8v_{max}$则得：

$$\tau_0=0.0225\rho v^2_{max}\left(\frac{\nu}{v_{max}r_0}\right)^{\frac{1}{4}}$$

把上式中圆管流动的各量换成平板边界层流动的相当量，则得到求解紊流边界层的第二个补充方程式：

$$\tau_0=0.0225\rho v^2\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{b}$$

动量积分方程式(12-23)，可改写成

$$\rho U^2\frac{\mathrm{d}\delta_2}{\mathrm{d}x}=\tau_0$$

$$U\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta\rho v_x\mathrm{d}y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta\rho v_x^2\mathrm{d}y=\tau_0$$

把补充关系式(a)、(b)代入上式得

$$U\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta\rho\left[U\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\right]\mathrm{d}y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta\rho\left[U\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\right]^2\mathrm{d}y=0.0225\rho U^2\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}}$$

或 $$U\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{7}{8}\rho U\delta\right]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{7}{9}\rho U^2\delta\right]=0.0225\rho U^2\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}}$$

即 $$\frac{7}{72}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x}=0.0225\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}}$$

在$x=0$时$\delta=0$的条件下积分上式得

$$\delta=0.37x\left(\frac{\nu}{Ux}\right)^{\frac{1}{5}}=\frac{0.37x}{(R_{ex})^{\frac{1}{5}}} \tag{12-29}$$

可见，紊流边界层厚度与$x^{\frac{4}{5}}$成正比。这比层流边界层厚度增长要快的多。把δ值代进式(b)可得板面摩擦切应力公式

$$\tau_0=0.0576\left(\frac{Ux}{\nu}\right)^{-\frac{1}{5}}\frac{\rho U^2}{2} \tag{12-30}$$

若板长L、宽b，则作用在一个板面上的总摩擦阻力为

$$F_D=\int_0^l \tau_0 b\mathrm{d}x=0.072\left(\frac{Ul}{\nu}\right)^{-\frac{1}{5}}\frac{1}{2}\rho U^2 bl \tag{12-31}$$

由此看出，这时平板阻力与流速的1.8次方成比例。摩擦阻力系数为

$$C_f=\frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 bl}=\frac{0.072}{(R_{el})^{0.2}} \tag{12-32}$$

但根据实验，阻力系数的精确表示式为

$$C_f=\frac{0.074}{(R_{el})^{0.2}} \tag{12-32$'$}$$

与实验结果比较，在$R_e>10^7$时，式(12-32)′不再准确。实际上，这时紊流边界层内速度分布已不再服从$\frac{1}{7}$次方规律，而服从对数规律了。因此，相应地阻力系数便也不再服从式(12-32)′。在$R_{el}=10^6\sim10^9$范围内阻力系数可由下式计算：

$$C_f=\frac{0.455}{(\lg R_{el})^{2.58}} \tag{12-33}$$

在上面的讨论中，我们认为紊流边界层是从平板前缘开始的。实际上在平板前部总存在一段层流边界层，只是在转变点后才变成紊流(图12-16)，这种边界层叫混合边界层。层流段的存在减少了总阻力。考虑到这部分减少，摩擦阻力系数应予修正：

$$C_f=\frac{0.074}{(R_{el})^{0.2}}-\frac{A}{R_{el}}$$

$$A=0.074(R_{ec})^{\frac{4}{5}}-1.328(R_{ec})^{\frac{1}{2}} \tag{12-34}$$

对不同的临界雷诺数 $R_{ec}=\frac{x_c U}{\nu}$，A的取值可列表12-1。

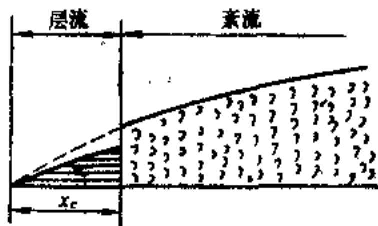


图12-16　平板前部的层流边界层

表12-1　不同临界雷诺数下的A值表

R_{ec}	10^5	3×10^5	5×10^5	10^6	3×10^6
A	320	1050	1700	3300	8700

［例12-3］　一平板宽$b=2$m、长$l=5$m以$v=2.42$m/s的速度在空气中运动，试求沿长度方向运动时板的摩擦阻力。

［解］

（1）　确定转变点坐标

取$R_{ec}=5\times10^5$，并且由$R_{ec}=\frac{Ux_c}{\nu}$

则
$$x_c=\frac{R_{ec}\times\nu}{v}=\frac{5\times10^5\times1.45\times10^{-5}}{2.42}\ \text{m}=3\text{m}$$

（2）　边界层中流态判别

由于　　$l=5\text{m}>3\text{m}=x_c$

故可以判定边界层为混合边界层。

（3） 计算阻力系数

由式(12-34)阻力系数

$$C_f=\frac{0.074}{\sqrt[5]{R_{el}}}-\frac{A}{R_{el}}=\frac{0.074}{\sqrt[5]{8.35\times10^5}}-\frac{1700}{8.35\times10^5}=2.81\times10^{-3}$$

（4） 板摩擦阻力计算

$$F_D=2C_f\frac{1}{2}\rho v^2lb=0.35\text{N}$$

第九节　边界层的分离

边界层流动还有一个极重要的分离现象，这是一个出现在实际流体流动中的重要现象。弄清这一现象，不仅可以解释某些理论与实验之间的不符，而且还可以为减小物体在流体中运动的阻力，提高物体运行的效率指明方向。

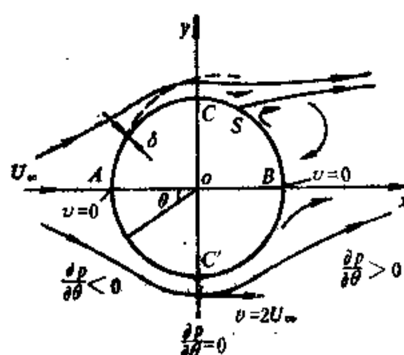


图12-17　边界层的分离

下面以圆柱体绕流为例，定性地说明边界层分离现象产生的原因。图12-17为圆柱体附近的绕流图案，为充分利用图面，沿上半部$ACSB$的流动表示实际流体绕流情况，虚线为边界层外边界、δ是边界层厚度；沿下半部$AC'B$的流动表示理想流体无环量绕流情况。

在图12-17中沿下半部$AC'B$的流动，由无环量圆柱绕流知：若流体的无限远来流速度为v_∞，则A点速度为o，由A到C'速度逐渐增加至$2v_\infty$，压力则逐渐减小，压力系数由A点的$+1$降至C'点的-3。这过程中可以说流体压能转化为动能，或说压力推动流体向前加速运动。在AC'流区中，后面压力高，前面压力低，称为顺压区。由C'到B的过程中，情况正好与上述相反，速度由δv_∞降为0，压力系数由-3增加到$+1$。这过程中流体动能又转化为压能，或说压力阻挡流体运动，使它减速。在$C'B$流区中，后面压力低，前面压力高，称为逆压区。可以看出，流体在AC'段所获得的动能，使它在$C'B$段能克服压力阻挡，恰可到达B点。

现转到图12-17中沿上半部$ACSB$的实际流体绕流情况，在刚起动时边界层非常薄、边界层外理想流体的运动和无环量绕圆柱流动几乎完全一样，沿边界层外边界上的压力分布如上所述。由于穿过边界层压力不变，故压力在边界层中沿柱面的变化与边界层外边界上一样：压力系数在A点为$+1$、在C点下降成-3，到B点又回升至$+1$。在边界层内流体质点要受到摩擦切应力的作用，它力图阻止流体向前运动。在顺压区内，由于压力的推动，流体质点克服了粘性摩擦，仍能加速地自A流向C。在逆压区内情况就不同了，不但粘性摩擦滞止流体的向前运动，而且压力也阻挡流体前进，流体质点不断减速，并终于在CB间某点S停了下来。停下来的流体在S点发生堆积，同时由于B点压力高于S点压力，在逆压梯度作用下流体发生倒流，由B点流向S点并在来流冲击下又回过头来顺流而去，这样在S点附近形成一个明显可见

的大漩涡。这个漩涡把边界层和柱体自 S点分离开来，这就叫边界层的分离并把 S点称为分离点（图12-18）。边界层离开物体后在外流的携带下漂向下游，和物体后面的流体混合在一起形成一个旋涡区，称为尾涡区。由于尾涡区的出现，将引起运动物体很大的尾涡阻力。由上所述可以看出边界层分离要有两个条件：（1）粘性对流动的迟滞作用；（2）逆压对流动的阻止作用。

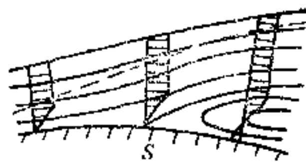


图12-18 分离点及回流

在分离点的下游，边界层理论失效，此时应从完整的纳维一斯托克司方程出发考虑问题。即使在研究分离点以前的边界层流动时，也不能再采用理想流体势流的压力分布了。因为当边界层分离时，它向外排挤势流，从而已大大改变了物面上的压力分布。在实际解边界层问题中，常利用实验测出的物面压力分布。

一个具有圆头尖尾的细长剖面形状的物体，称为流线型物体，否则叫非流线型物体。如机翼、叶片等为流线型物体，圆柱则为非流线型物体。当流体绕流非流线型物体时，会产生边界层分离现象，但绕流流线型物体时，则常常不产生分离现象。这是因为对流线型物体（如叶片），虽然也存在逆压区（叶片最大厚度以后的区域），但逆压梯度较小，在该区运动的流体质点受到的压力反推力较小。依靠着流体运动的惯性，能够克服逆压及粘性的联合作用而流至后缘点。当叶片剖面后部较弯曲或冲角较大时，也可能在后缘附近发生分离，但一般尾涡区不大，尾涡阻力很小。由以上讨论可以看出，有逆压边界层不一定都分离。逆压大，分离的危险也大，逆压小则可以延迟分离或不分离。结合上一段的讨论可得结论：逆压与粘性作用是边界层分离的必要条件而非充分条件。航空，船舶，动力等部门，为了避免分离，减少阻力常常采用流线型物体。

下面来讨论一下分离点S位置的确定方法。参照图12-18可以看出，在S点之前流体全都向前流动，因此在物面上应有$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}>0$；在$S$点之后，发生了倒流现象，邻近物面处流体质点向后流去，于是在物面上应有$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}<0$。因此不难推出，在分离点$S$上必有

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}=0 \tag{12-35}$$

这就是确定边界层分离点位置的方程式。由边界层方程式解出速度分布后，代入方程（12-35)可确定分离点的位置。应强调指出，分离点并不是指物面上速度为零的点（因为物面上流体质点的速度都等于零)，而是指贴近物面速度等于零的那一点，也就是由方程式(12-35)所确定的那一点。

边界层分离的结果，是在物体后出现了尾涡区，这使物面上的压力分布和理想流体的情形大不相同。图12-19给出了圆柱表面上的压力分布的实验结果。它的特点是：分离点以前压力分布接近于理想流体绕流结果；分离点后尾涡区中，压力明显降低而且接近常数。由于物体前、后压力不平衡，形成了所谓压差阻力（也就是前面所说的尾涡阻力），它等于作用在物体表面上的压力在来流方向上投影的总和。因为这种阻力的大小与分离点S的位置有关，而S点的位置又决定于被绕流物体的形状，因此压差（尾涡）阻力又称形状阻力。在前面一节我们讨论过摩擦阻力，它和形状阻力全是由于流体粘性所引起，因此把它们合起来统称粘

流体力学 赵

性阻力（也叫型阻）。在被绕流物体的粘性阻力中，当边界层未分离时是以摩擦阻力为主，但是一旦发生了边界层的分离形状阻力就变得突出起来，其大小可高达摩擦阻力的几十倍。例如，一个经过精心加工的轴对称的流线型物体，被纵向绕流时所受到的阻力（主要是摩擦阻力）的大小，只相当于直径与其最大直径相同的圆盘，盘面垂直于来流方向放置时，所受阻力（主要为形状阻力）的五十分之一。

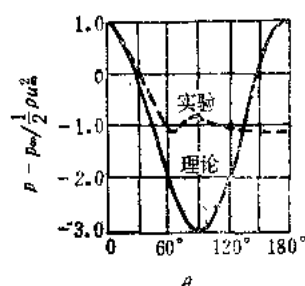


图12-19 圆柱表面上的压力分布

虽然在流体中运动的物体所遭遇之阻力的形成过程，从物理的观点看来已完全清楚，可是，要从理论上确定一个任意形状的被绕流物体的阻力，至今还是十分困难的，物体阻力目前都还是用实验方法测定的。下面就来介绍一种物体阻力的测定原理及方法。

第十节 剖面阻力的实验测定

考虑一无限长柱体的平面绕流阻力，这时，可以顺流切取一个剖面（垂直流动方向取单位长度），研究它所受的阻力。这类剖面的平面绕流阻力，显然只包含摩擦阻力与形状阻力两部分，也就是只有粘性阻力。柱前来流速度均匀，各处都等于v_∞，速度分布图为一直线；柱后则不同，由于粘性阻力，在原速度分布直线中央形成一个凹槽，叫尾流凹槽(图12-20)，再向下游此凹槽便被逐渐扯平。剖面阻力之大小与柱后流体能量之减少存在密切关系，而柱后流体能量之大小将决定尾流之动力结构。这里提供的这个方法，就是要根据尾流的结构来推断阻力之大小的一个方法。

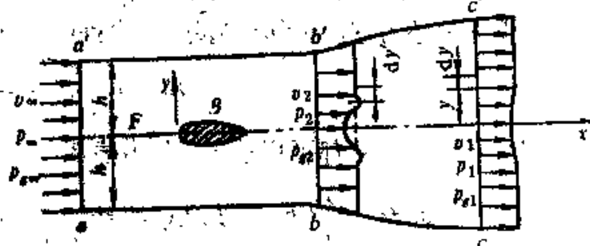


图12-20 剖面绕流阻力的测定

设剖面B被速度大小为v_∞的无穷远来流所绕过，F为流动流体沿x方向对剖面的作用力（参图12-20），则剖面对流体的阻力D与F为等值反向。只要确定出D的大小，F也就定出来了，而D可以根据动量定律来确定。

为应用动量定律，我们取如图12-20所示的控制体，它由垂直于来流的aa'与dd'界面及流面ad与$a'd'$和剖面B的表面所围成。假定aa'平面距剖面B较远，该处流动尚未受到扰动，速度、压力与总压分别为v_∞、p_∞及$p_{g\infty}$。在不考虑质量力作用的情况下，$p_{g\infty}=p_\infty+\frac{1}{2}\rho v_\infty^2$。再假定$dd'$平面离剖面$B$也很远，以致那里对压力的扰动已平息$p_1=p_\infty$，但由于尾流速度的消失要缓慢的多，所以$v_1\neq v_\infty$。类似地可得$dd'$平面处的总压$p_{g1}=p_\infty+\frac{1}{2}\rho v_1^2$。流面$ad$及$a'd'$离剖面$B$充分远，那里流动未被扰动。设流动定常，则对控制体用动量定律，单位时间内流出和流进控制体的流体沿x轴向的动量差，应等于作用于控制体内流体上的沿x轴方向的外力总和。

单位时间内，由aa'界面流进控制体的动量$K_{aa'}=\rho\int_{-h}^{h}v_\infty^2dy$，由$dd'$界面流出控制体的

动量等于经cc'面及cd、$c'd'$面流出的动量总和：$K_{dd'}=K_{cc'}+(K_{cd}+K_{c'd'})$。$K_{cc'}=\rho\int_{-h}^{h}v_1^2\mathrm{d}y$，$K_{cd}+K_{c'd'}=\rho v_\infty(Q_{aa}-Q_{cc'})=\rho v_\infty\int_{-h}^{h}(v_\infty-v_1)\mathrm{d}y$，因此，经$dd'$而流出的动量$K_{dd'}=\rho\int_{-h}^{h}v_1^2\mathrm{d}y+\rho v_\infty\int_{-h}^{h}(v_\infty-v_1)\mathrm{d}y$。沿$x$轴方向流出、流进控制体的动量差：

$$\Delta K=K_{dd'}-K_{aa'}=\rho\int_{-h}^{h}v_1^2\mathrm{d}y+\rho v_\infty\int_{-h}^{h}(v_\infty-v_1)\mathrm{d}y-\rho\int_{-h}^{h}v_\infty^2\mathrm{d}y$$

或

$$\Delta K=\rho\int_{-h}^{h}v_1(v_1-v_\infty)\mathrm{d}y \tag{a}$$

不计质量力，则作用在控制体内流体上只有表面力。这些力中，界面aa'上压力与cc'上的抵消；流面ad、$a'd'$上的压力沿x轴向分量则分别与cd、$c'd'$上的压力平衡：所以只剩下剖面B对流体的作用力，它在x轴方向的投影为$-D$。由此得沿x轴方向外力总和：

$$\Sigma F_x=-D \tag{b}$$

根据动量定律，(a)与(b)应相等

$$-D=\rho\int_{-h}^{h}v_1(v_1-v_\infty)\mathrm{d}y$$

或

$$D=\rho\int_{-h}^{h}v_1(v_\infty-v_1)\mathrm{d}y \tag{12-36}$$

式(12-36)还不能直接应用于阻力D的计算，因为v_1必须在离开剖面一段很大距离的断面cc'上测取（这样才能使$p_1=p_\infty$），而这在风洞、水洞等试验台上是很难办到的。为了解决测取v_1的困难，在剖面后取断面bb'（参图12-20），它上面的流动参数记为v_2，p_2和p_{g2}。在bb'与cc'二断面间任取一微小流束，$\mathrm{d}y'$与$\mathrm{d}y$则分别为流束在bb'断面及cc'断面上所截的宽度。根据连续性方程：$v_1\mathrm{d}y=v_2\mathrm{d}y'$，代进(12-36)得：

$$D=\rho\int_{-h}^{h}v_2(v_\infty-v_1)\mathrm{d}y' \tag{c}$$

积分号下各速度都可用总压与压力表成：

$$v_\infty=\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_{g\infty}-p_\infty)}\;;\quad v_1=\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_{g1}-p_1)}\;;\quad v_2=\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_{g2}-p_2)}$$

把以上各式代入(c)则：

$$D=2\int_{-h}^{h}\sqrt{p_{g2}-p_2}\,(\sqrt{p_{g\infty}-p_\infty}-\sqrt{p_{g1}-p_1})\mathrm{d}y' \tag{d}$$

设bb'至cc'间流动不计能量损失，按伯努里方程应该有$p_{g1}=p_{g2}$，并注意$p_1=p_\infty$，这么一来式(d)可写成：

$$D=2\int_{-h}^{h}\sqrt{p_{g2}-p_2}\,(\sqrt{p_{g\infty}-p_\infty}-\sqrt{p_{g2}-p_\infty})\mathrm{d}y' \tag{12-37}$$

式(12-37)就是结合实验数据计算剖面阻力的公式。式中$p_{g\infty}$、p_∞是已知的，所以只要测定bb'平面上的总压p_{g2}及压力p_2即可计算阻力D了。事实上，由于尾流凹槽以外$p_{g2}=p_{g\infty}$致使被积函数等于零，故积分只要以凹槽为限即可。

第十一节　粘性阻力及其减小的方法

物体的粘性阻力包括形状阻力及摩擦阻力两部分，在前面几节已分别对它们进行过讨

论。物体的形状阻力，是粘性流体绕流时，在物体表面上所作用的压力的合力，在流动方向上的投影，是压差阻力。形状阻力的大小与边界层的分离情况密切相关：不分离比分离阻力小，迟分离比早分离阻力也小。因此，为降低形状阻力，则应阻止或尽量推迟边界层的分离。物体的摩擦阻力，是粘性流体在物体表面上所作用的摩擦切应力的合力，在流动方向上的投影。摩擦阻力的大小，与边界层及物体表面状况有关：边界层中层流比紊流阻力小，边界层厚的比薄的阻力小，物面光滑的比粗糙的阻力小，润湿面小的比大的阻力也小。因此，为降低摩擦阻力，则应维持边界层流动为层流并尽量减小润湿面及物面粗糙度。

下面简单介绍几种减小粘性阻力的具体措施。

一、减小形状阻力的措施

1. 采用流线型外形

被绕流体如采用圆头、尖尾细长剖面形的流线型体，由于其上所形成的逆压梯度较和缓，流体质点能够克服逆压与粘性摩擦而流至尾部。这样，采用流线型体就能阻止或至少推迟边界层的分离，从而达到减小形状阻力的目的。诸如水泵、水轮机的叶片和机翼等采用流线型体，就是这个道理。

2. 边界层控制

对于一些剖面形状或尺寸有特定要求的物体，如其表面逆压梯度又很大时，为了避免边界层分离，必须采取边界层控制的办法：前缘缝翼是航空上采用的一种控制边界层的方法。这是在主翼前端安装一个小的辅翼（图12-21a），二翼间留有一个进口宽、出口窄的小隔缝，流体经它流向机翼的上表面时，流速加快，于是便增加了上表面边界层流体的动能。这样就可以使上表面边界层不致在翼前部发生分离。在壁面上开缝，把边界层内迟滞下来的流体吸走，流来新的、具有较大动能的流体，这样也能避免边界层的分离（图12-21b）。这是控制边界层、避免分离的又一个办法。这个办法，首先被勃朗特应用于阻止管道扩大处的边界层分离。

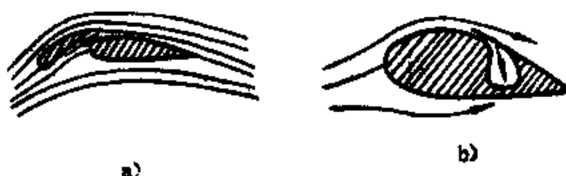


图12-21 边界层的控制

二、减小摩擦阻力的措施

采取上述措施后，避免或推迟了边界层的分离，从而形状阻力大为降低，这时，摩擦阻力便突出了起来。为了进一步减小粘性阻力，便需要降低摩擦阻力了。

由于层流边界层在物面上所产生的切应力要比紊流小的多，故为了减小摩擦阻力，应使物面上的层流边界层尽可能地长，也就是应使层流边界层转变为紊流边界层的转换点尽可能往后推移。由于加速流动比减速流动更容易使边界层保持层流，因此只要把绕流物体的最大速度点位置尽可能后移，也就是把被绕流物体（如翼型）的最大厚度点位置尽可能向后移，就可以使边界层保持尽可能长的层流段，从而达到减小摩擦阻力的目的。但须注意，这时对物面粗糙度要求很严，否则边界层仍旧保持不了层流。

习 题 十 二

12-1 试过一点作出分别垂直于三个坐标轴的三个平面，给出作用在这三个平面上的粘性流体应力及它们在坐标轴上的投影，从而说明图12-2中各符号的意义。

12-2 **粘性流体压力和理想流体压力有何区别。**

12-3 写出纳维尔—斯托克斯方程并说明每一项的物理意义。

12-4 何谓边界层？它对于研究绕物体的流动和决定物体的阻力有何作用？

12-5 何谓层流边界层，混合边界层和湍流边界层？如何决定边界层的流动状态？

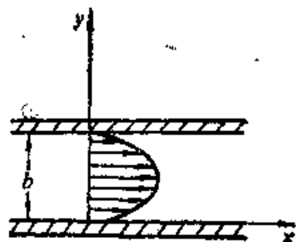
12-6 假设层流边界层中的速度分布为 $\frac{v_x}{U_0}=2\frac{y}{\delta}-2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3+\left(\frac{y}{\delta}\right)^4$ 试计算边界层的厚度及摩擦阻力系数。

12-7 已知两平行平板间如图流动的速度分布为 $v_x=-\frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(by-y^2)$，$v_y=0$，$v_z=0$，并且 p 是 x 的线性函数，求任意点的应力与流体微团的旋转角速度。（$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\frac{\partial u}{\partial y}$；$\tau_{yz}=\tau_{zy}=0$；$\tau_{zx}=\tau_{xz}=0$，$p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}=-p$；$\omega_x=\omega_y=0$，$\omega_z=\frac{1}{4\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(b-2y)$）

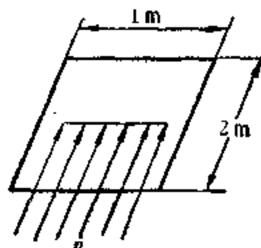
12-8 设平板很薄，可以认为边界层外的有势流动是均匀流，流速等于来流速度 v_∞，并有 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0$。设平板边界层为层流边界层，速度分布为 $\frac{v_x}{U}=a\left(\frac{y}{\delta}\right)+b\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$，求平板表面摩擦切应力的表达式。$a$，$b$ 是待定系数，由边界条件决定。

12-9 一平板长为5m，宽为0.5m，以速度1m/s在水中运动。试分别按平板纵向和横向运动时计算平板的摩擦阻力。（沿宽度 $F_f=5\text{N}$ 沿长度 $F_f=7.7\text{N}$）

12-10 长10m的平板，水的流速为0.5m/s，试决定平板边界层的流动状态。如为混合边界层，则转变点在什么地方？设 $x_c/l\leqslant5\%$ 时称为湍流边界层。试分别决定这一平板为层流边界层和湍流边界层时，水的流速应为多少？（混合边界层 $x_c=0.8\text{m}$ 取 $u\leqslant4\text{m/s}$ 为层流边界层，取 $u\geqslant$（0.8～1.1m/s，为湍流边界层）



题12-7图



题12-12图

12-11 一平板置于流速为7.2m/s的空气中，试分别计算在距前缘0.3m、0.6m、1.2m和2.4m处的边界层厚度。

（$\delta=4.3\times10^{-3}\text{m}$，$\delta=6.0\times10^{-3}\text{m}$，$\delta=31.1\times10^{-3}\text{m}$，$\delta=54.1\times10^{-3}\text{m}$）

12-12 平板长为10m，宽为2m设水流沿平板表面并垂直板的长度，流速分别为(1)0.01145m/s；(2)1.6m/s，(3)6m/s，试计算平板的摩擦阻力。（(1) $F_f=0.13\text{N}$；(2) $F_f=81.73\text{N}$；(3) $F_f=1061.54\text{N}$）

第十三章 机 翼 理 论

本章讨论机翼理论，主要为下一章叶栅理论奠定基础。本章中心问题是讨论机翼的动力特性随机翼几何特性及来流情况的变化规律。

第一节 概 述

机翼一词，最早出现于航空工程，指的是飞机翅膀。如今它可用以泛指相对于流体运动的各种升力装置。因此，流体机械中的工作轮叶片也可视为一个机翼。

一、机翼的几何特性

工程上引用机翼主要是为了获取升力，但由于在流体中运动的物体，不可避免地会遭受到流体阻力的作用，因此对机翼性能的要求，首先就是尽可能大的升力F_Y和尽量小的阻力F_X，也就是希望具有最佳的升、阻力比值$\sum=\frac{F_Y}{F_X}$。这就要求机翼采取适当的几何形状，图13-1是一个低速机翼的一般外形图。

对亚声速绕流，机翼的俯视投影以椭圆形状为最有利。但由于制造上的困难，实用上多采用与椭圆相近的形状，如图13-1所示的形状。机翼迎向来流的最前边沿，叫机翼前缘；背向流动的最后边沿，称为机翼后缘。机翼的左、右两端叫做翼梢。机翼顺着来流方向切下来的剖面，称为翼型。翼型通常都具有流线型外形（参看图13-2）：头部圆滑、尾巴尖瘦、背（上弧）稍拱曲，至于腹（下弧）的形状则有凹的、凸的、也有半凹半凸及平的。

表征机翼几何特性的主要参数有下列几个，对翼型（参图13-2）：

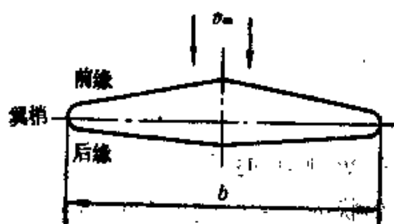


图13-1 机翼外形图

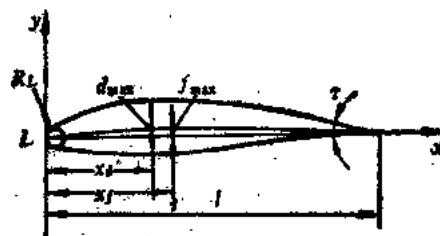


图13-2 翼型的几何形状

（一）翼弦l

把联接翼型前、后缘点间的直线段，叫做该翼型之弦（见图13-2）；过后缘而引下弧之切线，再过前缘而作此切线之垂线，则也可把垂足至后缘点间切线段作为翼弦。对下凸翼型只引用前一翼弦的定义。

上面所定义的翼弦，叫做几何翼弦。

（二）翼型厚度d

垂直于翼弦而界于翼型上、下弧间的直线段之长，叫翼型在那里的厚度，记成d。翼型

厚度中最大的那一个，叫作翼型最大厚度，记成d_{max}（有时省去下标就记成d），通常以它作为翼型厚度的代表。

实用上常引用这类参数对于弦长的相对值。把厚度d对弦长l的比值$\frac{d}{l}$，称为相对厚度$\bar{d}$；最大厚度d_{max}与弦长l之比值$\frac{d_{max}}{l}$，叫做最大相对厚度$\bar{d}_{max}$。翼型最大厚度点到前缘的距离用x_d表示，其相对值为$\bar{x}_d=\frac{x_d}{l}$。这些相对值，习惯上常用百分数表出：

$$\bar{d}=\frac{d}{l}\times 100\%$$

$$\bar{d}_{max}=\frac{d_{max}}{l}\times 100\%$$

$$\bar{x}_d=\frac{x_d}{l}\times 100\%$$

（三）翼型弯度f

翼厚度中点之联线，叫做翼型中线。中线到翼弦之拱高f，称为翼型弯度。弯度的最大值为f_{max}（有时省去下标就记成f），最大弯度点至前缘之距离记为x_f，它们的相对值分别记成：$\bar{f}_{max}=\frac{f_{max}}{l}$、$\bar{x}_f=\frac{x_f}{l}$。象厚度一样，这些相对值习惯上常用百分数表示：

$$\bar{f}_{max}=\frac{f_{max}}{l}\times 100\%$$

$$\bar{x}_f=\frac{x_f}{l}\times 100\%$$

（四）前、后缘圆角半径和后缘角

翼型前、后缘的曲率半径，叫做翼型的圆角半径，分别以R_L、R_T记之。它们的相对值$\bar{R}_L=\frac{R_L}{l}$、$\bar{R}_T=\frac{R_T}{l}$，称为相对圆角半径。如尾部非圆形而为尖的，其尖锐程度以上、下弧在尾缘之切线交角τ表示，叫做翼型后缘角。

以上是表示翼型几何特征的几个主要参数，它们决定了翼剖面的主要几何特性。但要确定一个机翼的几何特性，还需要知道描写其俯视平面投影形状的参数。这些参数主要为：翼展、翼面积、平均翼弦和展弦比等。

（五）机翼翼展b

机翼两梢之间的距离称为翼展，用符号b记之（见图13-1）。

（六）机翼面积A

把机翼的俯视平面正投影面积定为机翼面积，用字母A代表。如图13-1为一机翼平面正投影图形，该机翼的面积可如下计算：

$$A=\int_0^b l\,db$$

式中 l——翼弦长度。

（七）平均翼弦l_m

机翼面积A与翼展b之比值，称为该机翼的平均翼弦l_m：

$$l_m=\frac{A}{b}=\frac{1}{b}\int_0^b l\,\mathrm{d}b$$

（八）展弦比λ

翼展与平均翼弦之比，叫做该机翼的展弦比，记为λ，

$$\lambda=\frac{b}{l_m}=\frac{b^2}{A}$$

展弦比λ是影响机翼动力特性的重要参数。

二、机翼的气动力特性

机翼与绕流流体相互作用的力学特性，叫做机翼的气动力特性。机翼绕流时的受力特性，正是工程上所最关心的一个问题。这个力可分解成一个与来流方向平行的阻力F_X和一个与来流方向垂直的升力F_Y。

升力与阻力之大小，首先取决于机翼与来流间的相对位置。这个相对位置是用无穷远来流方向和翼弦间的夹角α来表示的，把夹角α称为几何冲角或简称冲角（图13-3）。除此之外，升、阻力显然还应与来流情况（速度、密度）及机翼的几何特性有关。

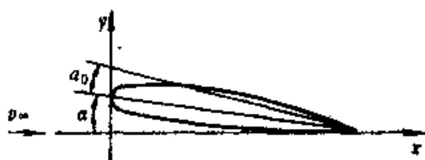


图 13-3

实用上升、阻力是通过实验得到的，为分析和利用实验数据方便起见，常将机翼所受的力表示成动压力的倍数形式。如对面积为A的机翼，若来流密度为ρ、速度为v_∞，则升、阻力可表示成：

$$F_Y=C_y\frac{\rho v_\infty^2}{2}A$$

$$F_X=C_x\frac{\rho v_\infty^2}{2}A \tag{13-1}$$

上式中C_y、C_x分别称为升力系数和阻力系数，其数值取决于冲角及机翼形状，通常由实验确定。

工程上除升、阻力（总动力特性）外，有时对机翼上的压力分布（局部动力特性）也很关心。压力也取决于来流，冲角和机翼的形状。

三、机翼绕流问题的提法

根据所给的条件和要求解决的问题之不同，工程上提出的机翼绕流问题大体可分为两大类：

1） 给定机翼和无穷远来流的情况，要求确定出此机翼周围的绕流流场，并进而确定机翼的气动力特性。

2） 提出对机翼气动力特性或对其周围流场的要求，希望设计出能满足所提要求的机翼来。

前一问题叫做正问题，后者则称为反问题。不论正问题还是反问题，从流体力学角度

看，都需要建立机翼几何参数与气动力参数间的关系。为此在流体力学中，多从正问题着手。

四、机翼分类

机翼的绕流情况是受机翼几何特性影响的，特别是翼展长度对机翼绕流的空间性质有决定性作用。故根据翼展长度有限还是无限，把机翼分成：

（一）无限翼展机翼

翼展长度无限、沿翼展翼型及冲角又相同的机翼，叫做无限翼展机翼（二元机翼）。

这类机翼绕流，实际上是一个无穷长柱体的绕流。此类流动为平行于翼型平面的流动，因此是一个二元的平面流动。高、低比较数叶轮叶片的绕流属此平面流动。

（二）有限翼展机翼

翼展长度有限，沿翼展翼型及冲角也可不同，这类机翼叫有限翼展机翼（三元机翼）。

绕有限翼展机翼的流动，除沿翼型平面内的流动外，尚有垂直于该平面的流动发生。这类流动是空间的、并且是三元的流动。这类绕流的例子：如飞机机翼、开式螺旋桨及中比转数叶轮的叶片等的绕流。

无限翼展机翼的绕流，可由理论分析而获得精确解答。这些解答还可以推广到有限翼展机翼的绕流中去，只要稍加修正也可提供相当精确的结果。因此在机翼理论中，首先应较详细地讨论无限翼展机翼的绕流。绕无限翼展机翼的流动为平面流动，因而只须沿翼展取一单位厚度流层，研究翼展为一单位、且沿翼展翼型不变的机翼绕流就够了。显然，此机翼的几何特性完全由其翼型特性所决定，因而无限翼展机翼的绕流就常被叫做是翼型的绕流。下面就先来讨论翼型绕流的问题。

第二节　翼型绕流的实验结果

在这一节里，介绍翼型气动力性能，随冲角及翼型几何形状变化的实验结果。

一、冲角对翼型气动力性能的影响

（一）翼型的升力与阻力

在翼型绕流情况下，由于沿翼展取一单位长，从而机翼面积：

$$A=l\times 1=l$$

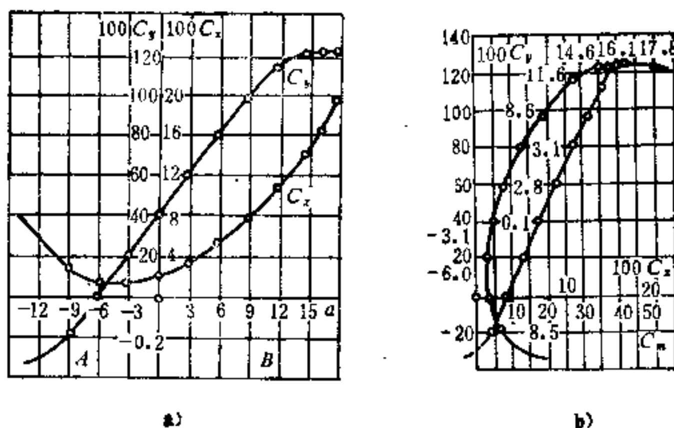
那末升，阻力公式（13-1）对翼型可写成：

$$\left.\begin{aligned}F_Y&=C_y\ \frac{\rho v_\infty^2}{2}l\\F_X&=C_x\ \frac{\rho v_\infty^2}{2}l\end{aligned}\right\}\qquad(13\text{-}2)$$

式中系数C_y、C_x是翼型几何形状及冲角α的函数。对一定翼型在被绕流情况下，要确定其升、阻力，关键是确定相应的系数C_y、C_x的值。而C_y、C_x作为冲角α的函数，其对应关系是经实验做出的。这种实验结果常与翼型几何数据汇集成翼型资料，以备工程技术上应用。C_y、C_x随α变化的实验资料，常以两种实验曲线形式表出，它们就是升、阻力系数曲线及升、阻力系数极曲线。

1. 升、阻力系数曲线

通过实验测取C_y、C_x与α的一系列对应值，并在以C_y、C_x为纵轴，α为横轴的平面直角坐标系里绘制C_y、C_x—α关系曲线（图13-4a），则得升、阻力系数与冲角的关系曲线。



a)　　　　b)

图13-4　C_y、C_x-α曲线

图13-4a绘出了一种翼型的C_y、C_x—α曲线（C_x值已被放大五倍）。从图上可以看出，冲角α在AB（-6°～8°）间，升力系数曲线接近一条直线而阻力系数曲线则类似一条二次曲线。随α的增大C_y值成比例地上升而C_x值则增加较缓慢。翼型通常就在这一范围工作，称为该翼型的工作区间。其次，当冲角取$\alpha_0=-6^\circ$时，升力系数为零、阻力系数为最小。这时的冲角α_0（各翼型不一样）叫做无升力冲角或零冲角。过后缘沿此方向作一直线(不计长度)，叫做该翼型的气动力翼弦（参看图13-3）。由此弦起算的冲角，称为动力冲角。从动力学角度看，动力冲角比几何冲角更合理。最后，冲角超过$\alpha_c=12^\circ$后，C_y开始陡降，而C_x则大幅度增加。这是由于边界层与翼型表面分离所致。这个冲角α_c叫临界冲角，各翼型不一样，一般为十几度。超过临界冲角以后的分离绕流，叫做失速流动。

2. 升、阻力极曲线

一种实用上更为方便的表示翼型气动力特性的方法是，以冲角α为参变数，作出C_y—C_x曲线。这么一来只要一条曲线就可包含上面两条曲线所给出的全部数据。此曲线就叫做翼型的极曲线（图13-4b）。

引用极曲线，除对于某冲角仍可立即确定出相应的升、阻力系数C_y、C_x的值外，它还可以供给以下信息：如在原点和此曲线上任一点间联以直线，则此线长代表该点冲角下合力系数C_R（$C_R=\dfrac{R}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 l}$，$R$为合力）之值，而且此直线与横轴夹角就等于合力与来流间夹角。

其次，上述直线斜率$\varepsilon=\dfrac{C_y}{C_x}=\dfrac{F_y}{F_X}$，此即在该点冲角下工作时翼型的升阻比。最后，通过极曲线很容易确定翼型的最佳冲角——与ε最大值对应的冲角。过原点作极曲线的切线，其切点所对应的冲角，就是最佳冲角。

（二）压力沿翼型表面的分布

工程上不仅很重视翼型上的总作用力，而且对压力沿翼型表面如何分布也很关心。特别

是在水力机械中，压力沿叶片的分布情况，关系到叶轮汽蚀性能的好坏。

实用上压力大小，常以未受扰动的无穷远来流压力p_∞为计量起点，而用以下公式计算它们的大小：

$$p-p_\infty=C_p\ \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 \tag{13-3}$$

式中 C_p——无量纲系数，叫做压力系数。

当一定翼型被绕流时，想通过式(13-3)计算翼型表面各点压力，则须先确定系数C_p。此系数C_p值是翼型形状、冲角和翼型上各点位置的函数。这个函数关系通常由实验测出，汇成资料随附翼型，以备参考。图13-5给出了一个翼型表面、在不同冲角下时压力分布的系数曲线。

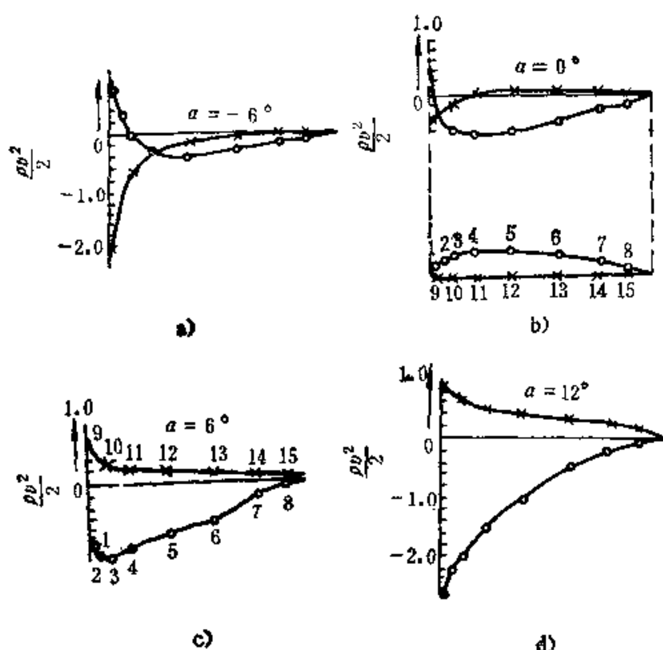


图13-5 翼型表面的压力分布

对所示曲线可作如下说明：当翼型在其工作区间内运转时，由于上弧弯拱，流线挤拢、流速加大而压力则减小，以致低于无穷远来流压力；下弧较平乃至凹入，流线扩开，流速减小而压力则增大，以致超过无穷远来流压力。上述压力分布特征，随冲角加大而愈益增强。特别值得注意的是：翼型升力是由其表面上、下压力差提供的。由曲线13—5可以看出，翼型上表面的低压对压力差(从而升力)的贡献远远超过下表面的高压；最低压力发生在翼型上表面靠近头部的地方，汽蚀空泡就从这里发生，须特别当心。

二、翼型几何形状对其动力性能的影响

由于工程实用上所遇到的翼型，尚无法对它们进行绕流的理论分析，因此也就没有得到计算其几何形状对气动力性能影响的一般公式。以下仅就一些实验结果，说明两者间的定性关系。

（一）弯度的影响

图13-6是对厚度相等而弯度不同的三个翼型的实验结果。

由图上曲线可以看出：对同一冲角，随着弯度的增加，升、阻力都将显著增加，甚至阻力比升力增长更快。因此，最佳升阻比e值将有所下降。升力加大，是由于弯度加大后将导致上、下弧的流速差加大，从而压力差也加大；弯度加大后，上弧流速加大，从而摩擦阻力上升，并且由于翼型迎流面积加大的结果，压差阻力也将加大，故弯度增加导致阻力的增加。

（二）厚度的影响

图13-7是对两个弯度相同，但厚度不同的翼型的实验曲线。

对同一弯度，较厚的翼型对应于同一冲角的升力有所提高。但较厚的翼型，对应于同一升力其阻力也较大，从而最佳升阻比有所降低。厚度增加，使上弧更拱，则其上流速加快，

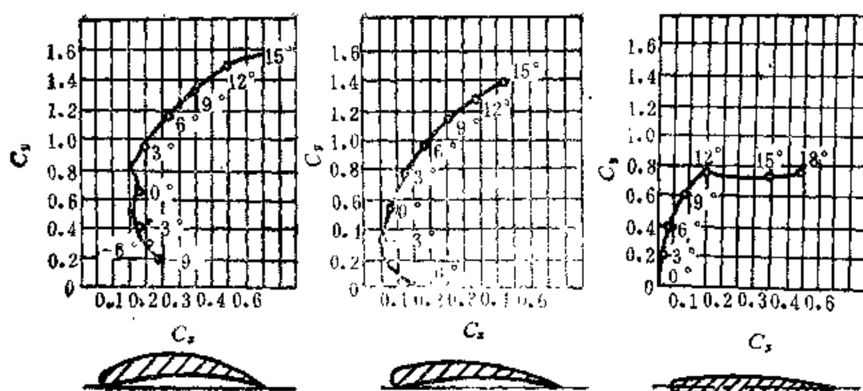


图13-6　弯度对翼型动力性能的影响

吸力加大，升力也随之加大；上弧流速增加则摩阻上升，厚翼迎流面积加大，则压差阻力必提高。

（三）前缘抬高度的影响

图13-8是对两个具有不同前缘抬高度的翼型的实验曲线。

前缘抬高的翼型，在负冲角时阻力变化不大；但前缘低垂的翼型，则在负冲角时会招致阻力的迅速增加。

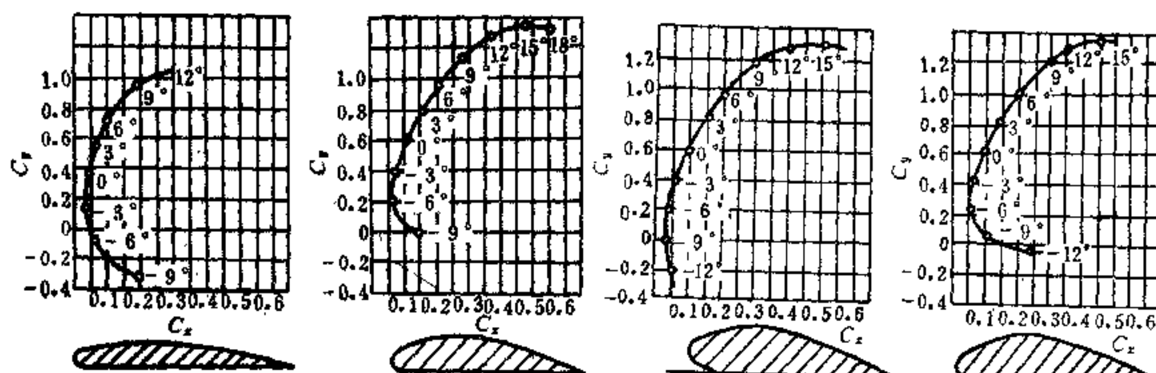


图13-7　厚度对翼型动力性能的影响　　　　图13-8　前缘抬高度对翼型动力性能的影响

（四）表面光滑度的影响

翼型表面粗糙会导致阻力增加而升力降低。对这一点表现最敏感的是靠近前缘的上表面；相反，靠近尾缘的上表面则对这一点反应迟钝。

第三节　介绍几种常用翼型

在本节中介绍几种与水力机械有关的常用翼型，它们包括哥廷根翼型、RAF—6翼型、ВИГМ翼型和NACA翼型。

一、哥廷根翼型

哥廷根翼型是哥廷根空气动力研究所研制的翼型。哥廷根翼型的形状见图13-9；各翼型的坐标数据，则见表13-1。表中x、$y_{上}$、$y_{下}$数据是弦长l的百分数（参图13-10）。

表13·1 哥廷根翼

x		0	1.25	2.5	5.0	7.5	10	15
364	y 0	0.85	4.05	5.45	7.30	8.60	9.65	11.00
	y u	0.85	0.00	0.05	0.35	0.55	0.65	1.05
384	y 0	4.15	7.25	8.95	11.45	13.40	14.95	17.15
	y u	4.15	2.25	1.55	1.10	0.80	0.55	0.30
387	y 0	3.20	6.25	7.65	9.40	10.85	11.95	13.40
	y u	3.20	1.50	1.05	0.55	0.25	0.10	0.00
408	y 0	1.15	2.95	3.80	5.00	6.00	6.70	7.70
	y u	1.15	0.25	0.00	0.20	0.40	0.65	1.00
417	y 0	0.65	2.50	3.75	5.05	6.25	7.05	8.15
	y u	0.65	0.05	0.25	0.70	1.10	1.50	2.20
428	y 0	1.25	2.75	3.60	4.80	6.05	6.50	7.55
	y u	1.25	0.30	0.20	0.10	0.00	0.00	0.05
436	y 0	2.50	4.70	5.70	7.00	8.10	8.90	10.05
	y u	2.50	1.00	0.20	0.10	0.05	0.00	0.00
443	y 0	0.60	0.60	0.85	1.15	1.45	1.60	1.90
	y u							
480	y 0	2.55	5.10	6.15	7.65	8.86	9.80	11.25
	y u	2.55	0.80	0.30	0.05	0.00	0.10	0.45
490	y 0	2.00	3.60	4.60	5.95	7.00	7.70	8.65
	y u	2.00	0.85	0.50	0.45	0.00	0.00	0.20
587	y 0	0.60	1.65	2.10	2.90	3.60	4.15	5.15
	y u	0.60	0.10	0.00	0.05	0.15	0.30	0.60
593	y 0	3.00	5.50	6.50	7.85	8.90	9.75	10.95
	y u	3.00	1.80	1.35	0.85	0.55	0.40	0.25
622	y 0	2.40	3.75	4.50	5.45	6.15	6.60	7.30
	y u	2.40	1.45	1.05	0.80	0.35	0.25	0.15
623	y 0	3.25	5.45	6.45	7.90	9.05	9.90	10.95
	y u	3.25	1.95	1.50	0.90	0.35	0.20	0.10
624	y 0	4.00	7.15	8.50	10.40	11.75	12.85	14.35
	y u	4.00	2.25	1.65	0.95	0.60	0.40	0.15
682	y 0	2.50	4.55	5.55	8.00	8.05	8.90	10.00
	y u	2.50	1.05	0.60	0.25	0.10	0.00	0.05
NACA23012	y 0	0.00	2.67	4.61	4.91	5.80	6.43	7.19
	y u	0.00	−1.23	−1.71	−2.26	−2.61	−2.92	−3.50
MYHK6	y 0	0.00	1.98	2.81	4.03	4.94	5.71	6.82
	y u	0.00	−1.76	−2.20	−2.73	−3.03	−3.24	−3.47

型断面尺寸

20	30	40	50	60	70	80	90	95	100
11.85	12.50	12.10	11.10	9.50	7.55	5.35	2.90	1.55	0.10
1.30	1.70	1.85	1.80	1.55	1.25	0.90	0.45	0.20	0.10
18.55	19.70	19.15	17.55	14.95	11.80	8.05	4.15	2.15	0.00
0.15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
14.40	15.05	14.60	13.35	11.35	8.90	6.15	3.25	1.75	0.15
0.00	0.20	0.40	0.45	0.50	0.45	0.30	0.15	0.05	0.15
8.40	9.05	8.95	8.40	7.45	6.25	4.95	3.45	2.50	0.75
1.20	1.30	1.30	1.20	1.05	0.85	0.60	0.30	0.10	0.75
8.85	9.30	9.15	8.55	7.55	6.25	4.50	2.40	1.20	0.00
2.55	3.65	3.90	3.65	3.20	2.50	1.70	0.80	0.40	0.00
8.20	8.55	8.35	7.80	6.80	5.50	4.20	2.15	1.20	0.00
0.15	0.30	0.40	0.40	0.35	0.25	0.15	0.05	0.00	0.00
10.25	11.00	10.45	9.55	8.20	6.60	4.60	2.45	1.25	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2.15	2.50	2.50	2.35	2.05	1.60	1.15	0.65	0.30	0.00
12.10	12.85	12.60	11.60	10.00	7.85	5.45	2.85	1.45	0.00
0.70	1.10	1.45	1.55	1.50	1.25	0.85	0.40	0.20	0.00
9.20	9.60	9.05	8.55	7.45	6.05	4.40	2.50	1.45	0.15
0.40	0.95	0.80	0.80	0.60	0.40	0.15	0.00	0.05	0.15
5.85	6.55	6.60	6.10	5.40	4.50	3.45	2.35	1.80	1.05
0.70	0.85	0.80	0.45	0.20	0.00	0.05	0.55	0.85	1.06
11.50	12.00	11.70	10.85	9.45	7.65	5.50	3.00	1.65	0.06
0.15	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7.70	8.00	7.80	7.10	6.15	5.00	3.55	1.95	1.15	0.20
0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
11.55	12.00	11.70	10.65	9.15	7.35	5.15	2.80	1.60	0.30
0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
15.30	16.00	15.40	14.05	12.00	9.50	6.60	3.55	2.00	0.50
0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10.65	11.20	10.90	10.05	8.65	6.90	4.85	2.55	1.35	0.00
0.20	0.55	0.75	0.80	0.85	0.75	0.60	0.35	0.15	0.00
7.50	7.55	7.14	6.41	5.47	4.36	3.08	1.68	0.92	0.00
−3.97	−4.46	−4.48	−4.17	−3.67	−3.00	−2.16	−1.23	−0.70	0.00
7.55	8.22	8.05	7.26	6.03	4.58	3.06	1.55	0.88	0.00
−3.62	−3.70	−3.90	−3.94	−3.82	−3.48	−2.83	−1.77	−1.08	0.00

各翼型C_y～α关系曲线见图13-11，曲线上标有“0”的地方，是与翼型最大升、阻比对应的C_y与α值。

哥廷根翼型的气动力性能还可以，但因为是空气动力翼型，所以缺少翼型的汽蚀特性资

428	682	364	480
408	490	436	387
602	623	624	384
$\frac{y_{max}}{l}=0.045$ $\frac{f}{l}=2.8$	$\frac{y_{max}}{l}=0.0579$ $\frac{f}{l}=2.45$	$\frac{y_{max}}{l}=0.0697$ $\frac{f}{l}=1.9$	610
513	608	609	417
443	NACA23012	M47K6	587

图13-9　哥廷根翼型
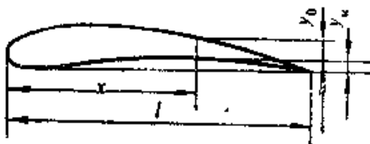


图13-10　哥廷根翼型尺寸标记

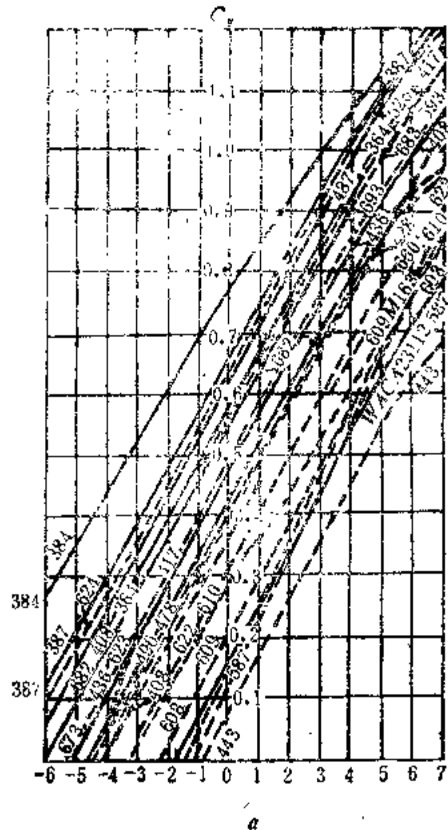


图13-11　C_y～α关系曲线

料。这些翼型的最大厚度比较靠前，其相对位置大多在$x_d=30\%$左右的地方。最大厚度的位置比较靠前，对汽蚀性能不利。

在利用翼型设计水力机械叶轮时，对翼型的厚薄要求不同。根据工程技术需要，哥廷根翼型的相对厚度可以加厚或减薄。但加厚时，相对厚度不要超过20%。改变相对厚度以后，翼型升力系数可根据下列公式计算：

（一）翼型364、428、480、682

$$C_y=4.8\frac{d_{max}}{l}+0.092\alpha^\circ$$

（二）翼型387、408、436、490

$$C_y=4.4\frac{d_{max}}{l}+0.092\alpha^\circ$$

（三）翼型384、622、623、624

$$C_y=4.0\frac{d_{max}}{l}+0.092\alpha^\circ$$

（四）翼型608、609、610

$$C_y=5.0\frac{d_{max}}{l}+0.092\alpha^\circ$$

（五）翼型MUNK—6

$$C_y = 1.30\frac{d_{max}}{l} + 0.106\alpha^{\circ}$$

（六） 翼型NACA23012

$$C_y = 1.08\frac{d_{max}}{l} + 0.106\alpha^{\circ}$$

（七） 对称翼型443

$$C_y = 0.095\alpha^{\circ}$$

二、RAF—6翼型

RAF—6翼型是英国皇家航空研究院翼型，其形状如图13-12所示其下弧为一直线；它的几何参数见表13-2。

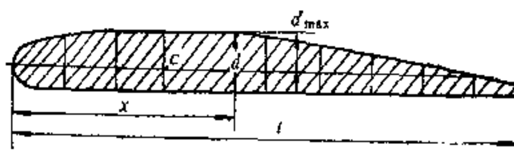


图13-12 RAF—6翼型几何形状

表13-2 RAF—6翼型断面尺寸表

x/l	0.0	0.025	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
d/d_{max}	0.1	0.41	0.59	0.73	0.95	0.998	0.99	0.95	0.87	0.74	0.56	0.35	0.08

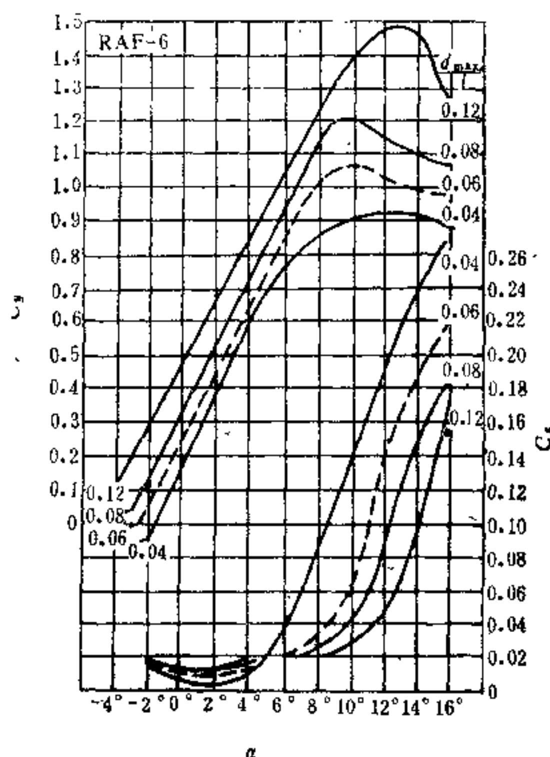


图13-13 RAF—6翼型的C_y、C_x—α曲线

图13-13给出RAF—6翼型相对厚度d_{max}/l为0.04、0.06、0.08、0.12时的C_y、C_x—α特性曲线。

三、ВИГМ翼型

ВИГМ是全苏水力机械研究院俄文名词的四个字头，ВИГМ翼型就是该院所研制的翼型。ВИГМ翼型的骨线为圆弧形，翼型形状则如图13-14所示。它的最大厚度的相对位置$\bar{x}_d = 40\%$，最大厚度位置比前两种靠后，这将对翼型的汽蚀性能有利。

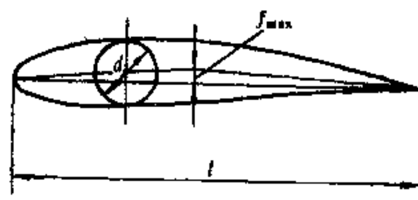


图13-14 翼型形状

ВИГМ—20翼型的最大相对弯度为$\frac{f_{max}}{l} = 0.02$，而ВИГМ—30翼型的最大相对弯度则为$\frac{f_{max}}{l} = 0.03$。因为ВИГМ翼型骨线为圆弧，故它们的最大弯度位置一定在翼型中部，即$\bar{x}_f = 50\%$。ВИГМ—20和ВИГМ—30两种翼型的最大相对厚度分别为5%、7%、10%及15%的翼型坐标数据见表13-3；它们的升力系数曲线如图13-15及图13-16。

表13-3 BNΓM—20、30翼型坐标数据

BNΓM—20

No	$y_{max}/e=5\%$ x	y_B	y_0	$y_{max}/e=7\%$ x	y_B	y_0	$y_{max}/e=10\%$ x	y_B	y_0	$y_{max}/e=15\%$ x	y_B	y_0
1	0.25	0.28	−0.22	0.25	0.38	−0.32	0.25	0.53	−0.47	0.25	0.78	−0.72
2	0.56	0.42	−0.32	0.50	0.57	−0.47	0.50	0.80	−0.70	0.50	1.17	−1.07
3	0.75	0.57	−0.43	0.75	0.77	−0.63	0.75	1.07	−0.93	0.75	1.57	−1.43
4	1.00	0.69	−0.51	1.00	0.93	−0.75	1.00	1.29	−1.11	1.00	1.89	−1.71
5	1.25	0.77	−0.53	1.25	1.08	−0.82	1.25	1.47	−1.23	1.25	2.12	−1.38
6	1.75	0.98	−0.66	1.75	1.31	−0.99	1.75	1.81	−1.49	1.75	2.63	−2.31
7	2.50	1.23	−0.77	2.50	1.63	−1.17	2.50	2.23	−1.77	2.50	3.23	−2.77
8	3.00	1.34	−0.80	3.00	1.77	−1.23	3.00	2.42	−1.88	3.00	3.49	−2.95
9	4.00	1.58	−0.86	4.00	2.07	−1.35	4.00	2.81	−2.09	4.00	4.03	−3.31
10	5.00	1.76	−0.95	5.00	2.29	−1.49	5.00	3.10	−2.30	5.00	4.45	−3.65
11	7.50	2.16	−0.98	7.50	2.79	−1.61	7.50	3.74	−2.56	7.50	5.31	−4.13
12	10.00	2.52	−0.99	10.00	3.23	−1.73	10.00	4.30	−2.80	10.00	6.07	−4.57
13	15.00	3.02	−1.02	15.00	3.83	−1.83	15.00	5.05	−3.05	15.00	7.07	−5.07
14	20.00	3.51	−1.00	20.00	4.41	−1.89	20.00	5.76	−3.24	20.00	8.01	−5.49
15	30.00	4.15	−0.75	30.00	5.13	−1.73	30.00	6.60	−3.20	30.00	2.05	−5.65
16	35.00	4.33	−0.70	35.00	5.33	−1.67	35.00	6.83	−3.17	35.00	9.33	−5.67
17	40.00	4.37	−0.54	40.00	5.35	−1.51	40.00	6.82	−2.98	40.00	9.27	−5.42
18	50.00	4.20	−0.20	50.00	5.08	−1.08	50.00	6.20	−2.20	50.00	8.60	−4.60
19	60.00	3.79	−0.05	60.00	4.54	−0.70	60.00	5.67	−1.83	60.00	7.50	−3.70
20	70.00	3.17	0.23	70.00	3.76	−0.36	70.00	4.62	−1.25	70.00	6.02	−2.72
21	80.00	2.26	0.26	80.00	2.66	−0.14	80.00	3.26	−0.74	80.00	4.26	−1.74
22	85.00	1.77	0.23	85.00	2.08	−0.09	85.00	2.55	−0.55	85.00	3.32	−1.32
23	90.00	1.30	0.20	90.00	1.52	−0.02	90.00	1.85	−0.35	90.00	2.40	−0.90
24	95.00	0.70	0.10	95.00	0.82	−0.02	95.00	1.00	−0.20	95.00	1.30	−0.50
25	100.00	0.00	0.00	100.00	0.00	0.00	100.00	0.00	0.00	100.00	0.00	0.00

BNΓM—30

No	$y_{max}/e=5\%$ x	y_B	y_0	$y_{max}/e=7\%$ x	y_B	y_0	$y_{max}/e=10\%$ x	y_B	y_0	$y_{max}/e=15\%$ x	y_B	y_0
1	0.25	0.27	−0.23	0.25	0.37	−0.33	0.25	0.52	−0.48	0.25	0.77	−0.73
2	0.50	0.42	−0.32	0.50	0.57	−0.47	0.50	0.80	−0.70	0.50	1.17	−1.07
3	0.75	0.59	−0.41	0.75	0.79	−0.61	0.75	1.04	−0.91	0.75	1.59	−1.41
4	1.00	0.74	−0.46	1.00	0.98	−0.71	1.00	1.34	−1.06	1.00	1.94	−1.66
5	1.25	0.81	−0.49	1.25	1.10	−0.78	1.25	1.51	−1.19	1.25	2.16	−1.84
6	1.75	1.05	−0.59	1.75	1.38	−0.92	1.75	1.88	−1.42	1.75	2.70	−2.24
7	2.50	1.32	−0.68	2.50	1.72	−1.08	2.50	2.32	−1.68	2.50	3.32	−2.68
8	3.00	1.45	−0.69	3.00	1.88	−1.12	3.00	2.53	−1.77	3.00	3.60	−2.84
9	4.00	1.73	−0.71	4.00	2.22	−1.20	4.00	2.86	−1.94	4.00	4.18	−3.16
10	5.00	1.99	−0.71	5.00	2.53	−1.25	5.00	3.34	−2.06	5.00	4.69	−3.41
11	7.00	2.50	−0.64	7.50	3.13	−1.27	7.50	4.80	−2.22	7.00	5.65	−3.79
12	10.00	2.94	−0.60	10.00	3.62	−1.31	10.00	4.72	2.38	10.00	6.49	−4.15
13	15.00	3.57	−0.47	15.00	4.38	−1.28	15.00	5.60	−2.50	15.00	7.62	−4.52
14	20.00	4.15	−0.35	20.00	5.05	−1.25	20.00	6.40	−2.60	20.00	8.65	−4.85
15	30.00	4.95	0.06	30.00	5.93	−0.93	30.00	7.40	−2.40	30.00	9.85	−4.85
16	35.00	5.23	0.23	35.00	6.23	−0.77	35.00	7.73	−2.27	35.00	10.23	−4.77
17	40.00	5.33	0.43	40.00	6.31	−0.55	40.00	7.78	−2.02	40.00	10.23	−4.47
18	50.00	5.20	0.80	50.00	6.08	−0.08	50.00	7.40	−1.40	50.00	9.60	−3.69
19	60.00	4.75	1.01	60.00	5.50	0.26	60.00	6.63	−0.87	60.00	8.50	−2.74
20	70.00	3.97	1.03	70.00	4.56	0.44	70.00	5.45	−0.45	70.00	6.92	−1.92
21	80.00	2.90	0.90	80.00	3.30	0.50	80.00	3.90	−0.10	80.00	4.90	−1.10
22	85.00	2.32	0.78	85.00	2.63	0.47	85.00	3.10	0.00	85.00	3.87	−0.77
23	90.00	1.72	0.62	90.00	1.94	0.40	90.00	2.27	0.07	90.00	2.82	−0.48
24	95.00	0.94	0.34	95.00	1.06	0.22	95.00	1.24	0.04	95.00	1.54	−0.26
25	100.0	0.00	0.00	100.00	0.00	0.00	100.00	0.00	0.00	100.00	0.00	0.00

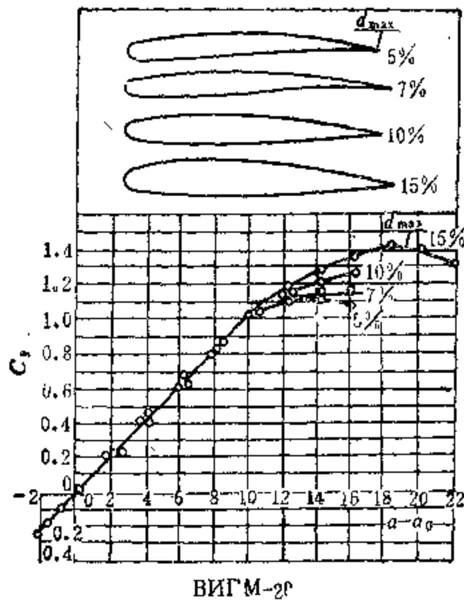


图13-15 БИГМ—20的C_y～α曲线

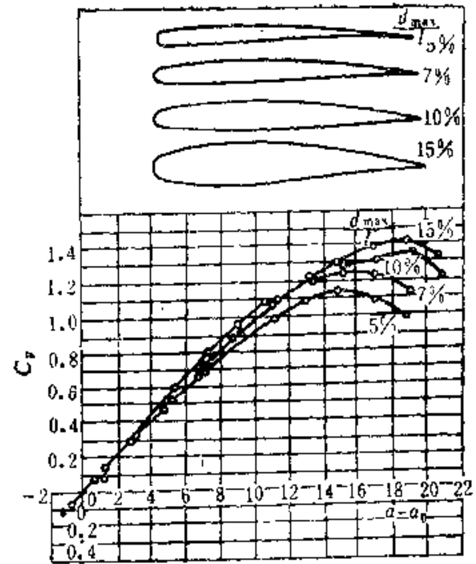


图13-16 БИГМ—30的C_y～α曲线

四、NACA翼型

NACA是美国国家航空咨询委员会的缩写，所以NACA翼型是该委员会的翼型。表13-4中列出了NACA4406至NACA4412七种翼型的几何坐标数据，这些数据是翼型弦长l的百分数。NACA后面四位数字例如NACA4406表示：第一个"4"表示翼型骨线的最大相对弯度为0.04；第二个"4"表示最大相对弯度的相对位置；最后两位数"06"表示最大相对厚

表13-4 NACA4406～NACA4412的坐标数据

	44—0.6		44—0.7		44—0.8		44—0.9		44—10		44—11		44—12	
%l	h	b	h	b	h	b	h	b	h	b	h	b	h	b
0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1.25	1.25	−0.64	1.44	−0.78	1.63	−0.92	1.81	−1.05	2.02	−1.27	2.23	−1.30	2.44	−1.43
2.5	1.88	−0.79	2.12	−0.98	2.36	−1.17	2.61	−1.37	2.87	−1.57	3.13	−1.76	3.39	−1.96
5	2.79	−0.82	3.11	−1.10	3.43	−1.38	3.74	−1.65	4.07	−1.93	4.40	−2.21	4.73	−2.49
7.5	3.53	−0.73	3.90	−1.06	4.27	−1.40	4.64	−1.74	5.02	−2.06	5.39	−2.41	5.76	−2.74
10	4.16	−0.60	4.55	−0.93	4.96	−1.36	5.37	−1.73	5.77	−2.10	6.18	−2.48	6.59	−2.86
15	5.15	−0.25	5.61	−0.68	6.07	−1.11	6.62	−1.55	6.97	−2.00	7.43	−2.44	7.89	−2.88
20	5.90	+0.12	6.38	−0.35	6.86	−0.82	7.33	−1.30	7.82	−1.78	8.31	−2.26	8.80	−2.74
25	6.42	+0.46	6.91	−0.03	7.40	−0.52	7.90	−1.02	8.41	−1.52	8.91	−2.01	9.41	−2.50
30	6.76	+0.74	7.26	+0.24	7.75	−0.26	8.25	−0.76	8.76	−1.26	9.26	−1.76	9.76	−2.26
40	6.90	+1.10	7.38	+0.62	7.86	+0.14	8.35	−0.35	8.81	−0.84	9.32	−1.32	9.80	−1.80
50	6.55	+1.24	6.99	+0.81	7.43	+0.38	7.87	−0.07	8.31	−0.52	8.75	−0.96	9.19	−1.40
60	5.85	+1.27	6.23	+0.90	6.61	+0.53	7.09	+0.14	7.38	−0.24	7.76	−0.62	8.14	−1.00
70	4.85	+1.16	5.15	+0.86	5.45	+0.56	5.76	+0.26	6.07	−0.05	6.38	−0.35	6.69	−0.65
80	3.56	+0.91	3.78	+0.69	4.00	+0.47	4.21	+0.26	4.43	−0.05	4.66	−0.17	4.89	−0.39
90	1.96	+0.49	2.08	+0.38	2.20	+0.27	2.33	+0.14	2.45	+0.02	2.58	−0.10	2.71	−0.22
95	1.05	+0.24	1.12	+0.17	1.19	+0.10	1.26	+0.03	1.33	+0.04	1.40	−0.10	1.47	−0.16
100	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

流体力学 朱

度为0.06。

表内各记号参看图13-17。

NACA4406至NACA4412的升、阻力系数曲线见图13-18，由图可看出NACA$_{44}$翼型的最优冲角为1.5°～2°之间。

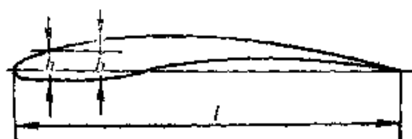


图13-17 NACA翼型的几何形状

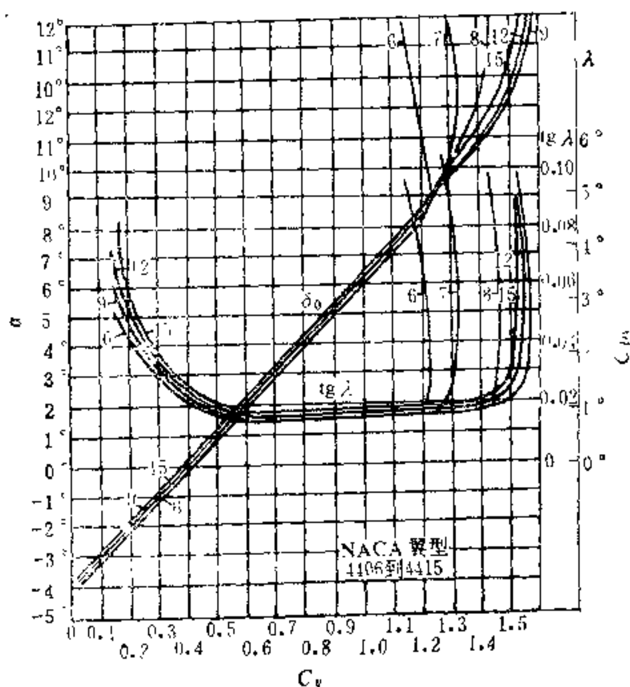


图 13-18 NACA4406～4415翼型的升、阻力系数曲线

第四节 茹可夫斯基翼型

前面几节介绍了翼型绕流的实验研究结果，下面我们转向翼型绕流的理论分析。在理论分析这一部分，将分别介绍翼型绕流的保角变换与奇点分布两种解法。

本节将用保角变换的办法，求解茹可夫斯基翼型的绕流。保角变换解法的基本思想是：要想确定复平面z（物理平面）上的、绕给定翼型的流动，可借助一个复解析函数：

$$z=f(\zeta)$$

把流动变换到另一个ζ复平面（辅助平面）上去，ζ平面上的对应绕流(可令为圆柱绕流)，比z平面上原绕流简单而其绕流复位势$W^*(\zeta)$为已知。由方程组：

$$W^*=W^*(\zeta)$$

$$z=f(\zeta)$$

消去变量ζ，即可得到z平面上绕翼型流动的复位势$W(z)$了，

求解茹可夫斯基翼型绕流的变换函数是茹可夫斯基变换（函数），故我们的讨论先从这个变换开始。

一、茹可夫斯基变换

茹可夫斯基早在1910年提出了下列变换函数：

$$z=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{c^2}{\zeta}\right)\quad(c>0) \tag{13-4}$$

（一） 变换（13-4）把ζ平面上无穷远点，变到z平面上无穷远点；它在除去$\zeta=0$的整个平面上解析，并在无穷远点的导数值就等于$\frac{1}{2}$，在其中任二点ζ_1、ζ_2：$\zeta_1\zeta_2\neq c^2$的区域中，变换是单叶（一一对应）的。

经由上述变换，由ζ平面一个点可得z平面上一对应像点。这个像点可用简单的图解法得

到，为此我们把变换（13-4）分解成n个简单变换的组合：

$$z=\frac{1}{2}\zeta_2$$

$$\zeta_2=\zeta+\zeta_1$$

$$\zeta_1=\frac{c^2}{\zeta}$$

把ζ与z平面迭在一起，并使坐标轴互相重合（见图13-19），则ζ平面上任一点的像点可如下作出：坐标为ζ的点P^*，联接oP^*并在其上确定点P_1^*，使$oP^*\ \overline{oP_1^*}=c^2$；再作出$P_1^*$，关于实轴的对称点$P_1^*$，此即代表复数$\zeta_1$。联$oP_1^*$作出平行四边$P^*oP_1^*P_2^*$，则点$P_2^*$代表复数$\zeta_2$。联接$oP_2^*$并取其中点，得$P$点，此即为像点$z$。

（二）由$z=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{c^2}{\zeta}\right)$所构成的图形变换

1．圆心在原点的圆

茹氏变换（13-4），把ζ平面上、圆心在坐标原点的圆周K_1，变成z平面实轴上$-c$与c间的一直线段C_1（见图13-20）。只要把K_1上点的坐标$\zeta=ce^{i\theta}$代入变换（13-4）：

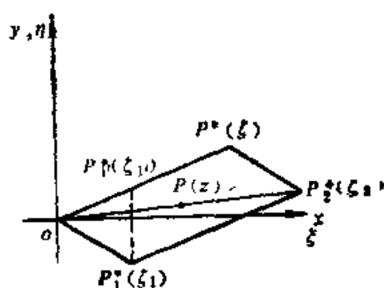


图13-19 茹可夫斯基变换作图法

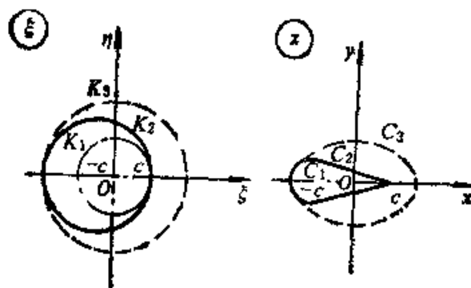


图13-20 茹可夫斯基变换下圆的图像

$$z=\frac{1}{2}\left(ce^{i\theta}+\frac{c^2}{ce^{i\theta}}\right)=\frac{c}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=c\cos\theta$$

不难看出，当ζ是K_1上（$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$）的点时，对应的像点$z$是实轴上线段$C_1$上的一点。

茹氏变换把ζ平面上圆心在坐标原点的、但半径不等于c的圆，变到z平面上以（$\pm c$, 0）为焦点的椭圆（图13-20圆$K_3\to$椭圆C_3）。这也不难验证，设ζ是半径为$r(>c)$、圆心在坐标原点的圆周上一点，则可表示其为：

$$\zeta=re^{i\theta}$$

代入式（13-4）得：

$$z=\frac{1}{2}\left(re^{i\theta}+\frac{c^2}{re^{i\theta}}\right)$$

分开实部与虚部后：

$$x=\frac{1}{2}\left(r+\frac{c^2}{r}\right)\cos\theta$$

$$y=\frac{1}{2}\left(r-\frac{c^2}{r}\right)\sin\theta$$

也就是

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}\left(r+\frac{c^2}{r}\right)^2}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}\left(r-\frac{c^2}{r}\right)^2}=1$$

这是z平面上椭圆的方程式。其长、短半轴分别为 $a_r=\frac{1}{2}\left(r+\frac{c^2}{r}\right)$，$b_r=\frac{1}{2}\left(r-\frac{c^2}{r}\right)$，

焦点为$c_r=\pm\sqrt{a^2_r-b^2_r}=\pm c$。当$r\to c$时，$a_r\to c$，$b_r\to c$，椭圆退化成线段$[-c, c]$。

2．圆心在坐标轴上的圆

圆心在负实轴上，并和K_1圆相切于正实轴上的圆K_2（由茹可夫斯基变换的连续性和关于坐标轴对称的保持性），其像是介于C_1和C_3之间一条对称实轴的曲线C_2。变换在$\zeta=c$之导数值为零，所以在该点变换不保角。实际上，变换式（13-4）可写成 $\frac{z-c}{z+c}=\left(\frac{\zeta-c}{\zeta+c}\right)^2$，

在$\zeta=c$附近上式可近似表为$z-c=\frac{1}{2c}(\zeta-c)^2$，因此在$\zeta=c$夹角为$\pi$的线变到$z=c$夹角成为$2\pi$的线了（见图13-20）。所以$C_2$在$z=c$与$C_1$是相切的，这决定了$C_2$必为一前圆后尖的图像。此图像称为茹可夫斯基舵——一种对称翼型。K_2圆心至坐标原点的距离决定翼型厚度。

ζ平面上圆心在正虚轴上距原点为f、圆周过正实轴上$(c, 0)$的圆K_4，变换到z平面上的图像，为以实轴上线段$[-c\leqslant x\leqslant c]$为弦的、过正虚轴上点$(0, f)$的一段圆弧$C_4$（见图13-21虚线所示）。这可以这样来看：在变换（13-4）中，把K_4上一点P作出坐标$\zeta=re^{i\theta}$代入，分开实部与虚部

$$x=\frac{1}{2}\left(r+\frac{c^2}{r}\right)\cos\theta$$
$$y=\frac{1}{2}\left(r-\frac{c^2}{r}\right)\sin\theta \tag{a}$$

消去r后得

$$x^2\sin^2\theta-y^2\cos^2\theta=c^2\sin^2\theta\cos^2\theta \tag{b}$$

此即是z平面上对应像曲线的方程式。从式（b）中设法消掉幅角θ，为此对三角形ΔPOO_4引用余弦定理可得：

$$\overline{O_4P}^2=\overline{OP}^2+\overline{OO_4}^2-2\,\overline{OP}\,\overline{OO_4}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

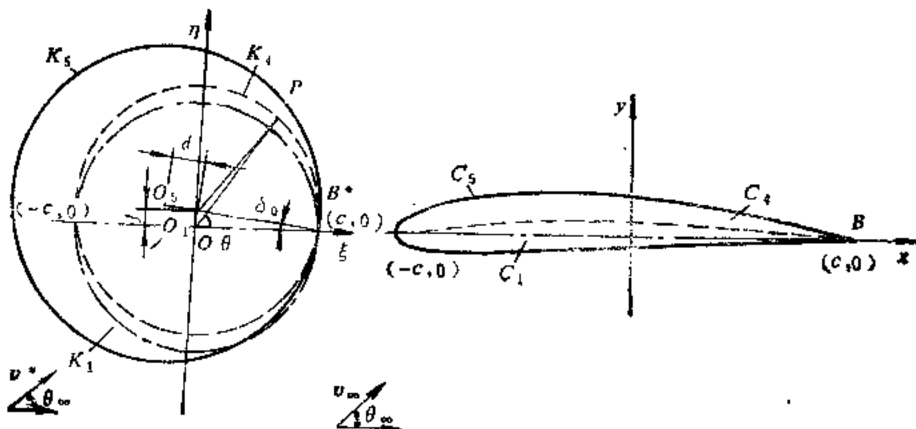


图13-21　茹可夫斯基翼型

即

$$c^2\sec^2\delta_0 = r^2 + c^2\mathrm{tg}^2\delta_0 - 2cr\,\mathrm{tg}\delta_0\sin\theta$$

$$r^2 - c^2(\sec^2\delta_0 - \mathrm{tg}^2\delta_0) = 2cr\,\mathrm{tg}\delta_0$$

$$r^2 - c^2 = 2cr\,\mathrm{tg}\delta_0\sin\theta$$

$$\frac{1}{2}\left(r - \frac{c^2}{r}\right) = c\,\mathrm{tg}\delta_0\sin\theta$$

把这个结果与式（a）中第二式结合，则可以得到z平面上K_4像点的y坐标表达式：

$$y = c\,\mathrm{tg}\delta_0\sin^2\theta$$

用此式把式（b）中的θ消去，则得z平面上、K_4的像曲线的方程式：

$$x^2 + (y + c\,\mathrm{ctg}2\delta_0)^2 = c^2\csc 2\delta_0 \tag{c}$$

这是圆心在（0，$-c\ \mathrm{ctg}2\delta_0$）半径为$c\csc 2\delta_0$的圆周。不论点$P$在$K_4$上什么位置，由式（c）看出$y \geqslant 0$，这说明在茹氏变换下圆$K_4$的像曲线，只是圆周（c）在$x$轴上面的部分。它与$y$轴交于$y = c\ \mathrm{tg}\delta_0 = f$的地方。

3． 圆心在第二象限的圆

上面的讨论说明：圆心在负实轴上的圆，经茹可夫斯基变换后成为有厚度但无弯度的舵；圆心在正虚轴上的圆，则变成有弯度但无厚度的圆弧。可以预料，圆心在第二象限的圆，经茹氏变换后应能得到既有厚度又有弯度的翼型。茹可夫斯基曾将一圆心在$c\,O_4$延长线上的点O_5、并与圆K_4相切于实轴上B^*点：$\xi = c$处的圆K_5，经变换（13-4）而得到z平面上的翼型曲线C_5（图13-21上实线所示）。C_5就叫做茹可夫斯基翼型，它的后尖点B落在x轴上的（c，0）处。

茹可夫斯基翼型可以通过（一）中所述作图法，由圆K_5得到。要强调指出的是：(1)C_5包围C_4并以其为骨线（厚度趋于零时翼型的极限线）；(2)C_5在尾缘的夹角为零并与C_4相切；(3)K_5在正实轴上的截距c决定翼型的近似弦长，截点（c，0）与圆心O_5之联线在正虚轴上之截距f，确定翼型之弯度，圆K_5与K_4之联心距$d = \overline{O_4O_5}$则确定翼型之厚度。

上述讨论说明，z平面上的茹氏翼型C_5，可以由ζ平面上圆K_5：$|\zeta - \zeta_{O5}| = a$（$\zeta_{O5} = if - de^{i\delta_0}$，$a = \sqrt{c^2 + f^2} + d$）经变换（13-4）变来。反之，圆$K_5$可由翼型$C_5$经反变换得来，反变换函数为：

$$\zeta = z + \sqrt{z^2 - c^2} \tag{13-5}$$

式（13-5）把翼型C_5及其外部区域，单叶地变到圆K_5及其外部区域。不难看出线性变换：

$$\zeta_1 = \zeta - \zeta_{O5} \tag{13-6}$$

将ζ平面上圆K_5及其外部，变到ζ_1平面上圆周K_5'：$|\zeta_1| = a$及其外部区域。因此把式（13-5）与式（13-6）组合，可得z平面到ζ_1平面的变换函数

$$\zeta_1 = g(z) = z + \sqrt{z^2 - c^2} - \zeta_{O5} \tag{13-7}$$

把z平面上茹可夫斯基翼型C_5及其外部区域，单叶地变换到ζ_1平面上圆心在坐标原点的圆K_5'及其外部区域。

绕圆柱的流动，在平面势流一章已对其作过详细研究。其绕流复势可随手写出（参第十章），但与茹氏翼型绕流对应的是怎样的圆柱绕流呢？即圆柱绕流的来流速度v_∞^*（见带*的量代表ζ_1平面上参数）及环量Γ^*应如何确定呢？下面先来解决这两问题。

二、v_∞^*及Γ^*的确定

(一) v_∞^*的确定

式 (13-7) 的反变换：由式 (13-6) 得

$$\zeta=\zeta_1+\zeta_{O_B}$$

把ζ代入式 (13-4)，则式 (13-7) 的反变换为：

$$z=f(\zeta_1)=\frac{1}{2}\left[(\zeta_1+\zeta_{O_B})+\frac{c^2}{\zeta_1+\zeta_{O_B}}\right] \tag{13-8}$$

速度
$$v_\infty^*=\left[\frac{dW^*}{d\zeta_1}\right]_{\zeta_1=\infty}=\left[\frac{dW}{dz}\frac{dz}{d\zeta_1}\right]_{z,\zeta_1=\infty}=\frac{1}{2}v_\infty \tag{13-9}$$

上式说明，在式 (13-7) 变换下，z平面上无穷远速度为v_∞的绕茹氏翼型的流动，变成了ζ_1平面上无穷远速度为$\frac{1}{2}v_\infty$的绕圆柱流动了。

(二) Γ^*的确定

1．环量Γ^*等于环量Γ

设K'为平面ζ_1上包围圆K_B的任一封闭围线，根据环量定义：

$$\Gamma^*=\oint_{k'}v_{\xi_1}^*\,d\xi_1+v_{\eta_1}^*\,d\eta_1=\oint_{k'}d\varphi^*=R_e\oint_{k'}dW^*=R_e\oint_{k'}\frac{dW^*}{d\zeta}\,d\zeta_1$$

$$=R_e\oint_{c'}\frac{dW}{dz}\frac{dz}{d\zeta_1}d\zeta_1=R_e\oint_{c'}\frac{dW}{dz}dz=R_e\oint_{c'}dW=\oint_{c'}d\varphi$$

$$=\oint_{c'}v_xdx+v_ydy=\Gamma$$

在上式中C'为与K'对应的、z平面上包围翼型C_B的封闭围线；Γ^*与Γ则分别为绕流圆K_B与翼型C_B的速度环量。

上述结果说明：在式 (13-7) 变换下，绕流圆柱的环量Γ^*就等于绕流翼型的环量Γ。因此为确定绕圆柱的环量，只要确定绕流翼型的环量即可。

2．恰普雷金假定

绕流翼型C_B的环量，从势流理论的观点看来，没有任何限制，可以任意取值。对应于不同环量将有不同的绕流。对于不过大的环量（实际绕流如此），这些绕流可归成图13-22所示的三种流动图案。但图中的a与c，流体从翼型一边翻到另一边去时，在后尖缘B处形成绕凸



图13-22　绕流翼型的三种流动图案

角流动，故B点速度将为无穷大(实际上边界层将从该点分离)，这是工程实际上要避免的。因此，与a、c对应的环量没有实用价值，可不予考虑。绕流b中翼型两边流体在后缘汇流，尾缘B点速度为有限，因此只有与这一绕流对应的速度环量才具有实际意义。据此，恰普雷金提出著名的假定。

恰普雷金假定：在理论上可能的各种环量值中，只有那个能保证后尖缘上速度成为有限

值的环量，才具有实际价值。

3．圆K_B上的点B^*应为驻点

现在可以回到ζ_1平面上来了．为确定环量Γ^*的值，我们来应用变换式（13-8）计算一下B^*点的复速度：

$$v^*_{B*}=\frac{dW}{d\zeta_1}\bigg|_{\zeta_{1B*}}=\frac{dW}{dz}\bigg|_{z_B}\frac{dz}{d\zeta_1}\bigg|_{\zeta_{1B*}}=v_B\frac{1}{2}\left[1-\frac{c^2}{(\zeta_{1B}*+\zeta_{OB})^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}v_B\left[1-\frac{c^2}{c^2}\right]=0$$

根据恰普雷金假定v_B为有限，故得$v^*_{B*}=0$

可见与翼型后尖点B对应的、圆周上的点B^*，为绕圆柱流动中的驻点。

4．Γ^*的确定

ζ_1平面上的速度，可以通过绕圆柱K_B流动的复势

$$W^*(\zeta_1)=v^*_\infty\zeta_1+\frac{a^2v^*_\infty}{\zeta_1}+\frac{\Gamma^*}{2\pi i}\ln\zeta_1 \tag{13-10}$$

求导而得到。利用v^*_{B*}应为零的条件，可如下确定环量Γ^*：

$$v^*_{B*}=\frac{dW^*}{d\zeta_1}\bigg|_{\zeta_{1B*}}=v^*_\infty-\frac{v^*_\infty a^2}{\zeta^2_{1B*}}+\frac{\Gamma^*}{2\pi i}\frac{1}{\zeta_{1B*}}=0$$

式中$\zeta_{1B*}=ae^{-i\delta_0}$（图 13-21）、$v^*_\infty=\frac{1}{2}\bar{v}_\infty=\frac{1}{2}\left|v_\infty\right|e^{-i\alpha}$（$\alpha$ 为无穷远来流与实轴夹角）

代入上式化简后得

$$\Gamma^*=-2\pi a|v_\infty|\sin(\alpha+\delta_0) \tag{13-11}$$

这么一来，绕流环量被完全确定了。同时也就把ζ_1平面上绕圆柱K_B的流动复势（13-10）完全确定了。

三、绕流翼型流动的复势$W(z)$

把式（13-7）代入（13-10）则得：

$$W(z)=W^*[g(z)]=\frac{v_\infty}{2}g(z)+\frac{\frac{1}{2}v_\infty a^2}{g(z)}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln g(z) \tag{13-12}$$

其中各项已在上面得到为：

$$\begin{aligned}g(z)&=z+\sqrt{z^2-c^2}-\zeta_{OB}\\ a&=\sqrt{c^2+f^2}+d\\ \Gamma&=-2\pi a|v_\infty|\sin(\alpha+\delta_0)\end{aligned} \tag{13-13}$$

四、绕翼型流动的速度场

由复势式（13-12）求导，得速度场

$$v(z)=\frac{dW(z)}{dz}=\left\{\frac{v_\infty}{2}-\frac{\frac{1}{2}v_\infty a^2}{[g(z)]^2}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{g(z)}\right\}g'(z) \tag{13-14}$$

式中$g(z)$、a、Γ表示式如式（13-13），$g'(z)$ 为$g(z)$ 的导数。

五、翼型的气动力特性

(一) 翼型上的作用力

在理想流体条件下、翼型将不遭受阻力，所以翼型上只作用着升力。升力的大小，可以类似于圆柱绕流那样求出（参看第十章），结果也和圆柱时一样。即升力的大小为：

$$|L|=\rho|v_\infty||\Gamma|$$

这一结果常称为库达一茹可夫斯基定理。

把式（13-13）中Γ的表示式代入上式，则得：

$$|L|=2\pi\rho|v_\infty|^2 a\sin(\alpha+\delta_0)$$

或

$$|L|=2\pi\rho|v_\infty|^2(\sqrt{c^2+f^2}+d)\sin(\alpha+\delta_0) \qquad (13\text{-}15)$$

由此看出，升力大小决定于翼型弦长（与c相关联）、最大弯度（与f相关联）、最大厚度（与d相关联）。另外由上式也可看出，当$\alpha=-\delta_0$时，升力为零，可见$-\delta_0$是茹氏翼型的零冲角。故$\alpha+\delta_0$为翼型的动力冲角（参图13-3），这说明升力$|L|$还取决于动力冲角的大小。

(二) 升力系数C_L

现在让我们导出茹氏翼型升力系数的解析结果。

由式（13-15）

$$|L|=2\pi\rho|v_\infty|^2(\sqrt{c^2+f^2}+d)\sin(\alpha+\delta_0)=2\pi\rho|v_\infty|^2(\sqrt{c^2+f^2}+d)(\sin\alpha\cos\delta_0+\cos\alpha\sin\delta_0)$$

由图13-21上几何关系知

$$\cos\delta_0=\frac{c}{\sqrt{c^2+f^2}}$$

$$\sin\delta_0=\frac{f}{\sqrt{c^2+f^2}}$$

代入$|R|$式中得：

$$|L|=2\pi\rho|v_\infty|^2(\sqrt{c^2+f^2}+d)\left(\frac{\sin\alpha c}{\sqrt{c^2+f^2}}+\frac{\cos\alpha f}{\sqrt{c^2+f^2}}\right)=2\pi\rho|v_\infty|^2\left(1+\frac{d}{\sqrt{c^2+f^2}}\right)$$

$$\times(c\sin\alpha+f\cos\alpha)=2\pi\rho|v_\infty|^2\left(1+\frac{\frac{d}{2c}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{f}{4c^2}}}\right)\left(\sin\alpha+2\frac{f}{2c}\cos\alpha\right)c$$

近似地可把$l=2c$取作弦长，则$\bar{d}=\frac{d}{2c}$、$\bar{f}=\frac{f}{2c}$即为最大相对厚度及弯度，上式改写成：

$$|L|=\pi\rho|v_\infty|^2\left(1+\frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\bar{f}^2}}\right)(\sin\alpha+2\bar{f}\cos\alpha)l$$

与升力的实用公式（13-2）相比，则升力系数C_L的解析表达式可写成：

$$C_L=2\pi\left(1+\frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\bar{f}^2}}\right)(\sin\alpha+2\bar{f}\cos\alpha)$$

通常相对弯度及厚度都不大，如略去二阶小量则升力系数C_L算式成为：

$$C_L=2\pi(\sin\alpha+2\bar{f}\cos\alpha+2\bar{d}\sin\alpha) \tag{13-16}$$

这说明升力系数与绝对尺寸无关，而只决定于相对弯度及厚度，并且和冲角有关。

对小冲角情况，α也为一小量，从而

$$\sin\alpha\approx\alpha$$

$$\cos\alpha\approx1$$

则升力系数式（13-16)可近似写成：

$$C_L=2\pi(\alpha+2\bar{f}) \tag{13-16$'$}$$

由此可知当$\alpha=\alpha_0=-2\bar{f}$（弧度)则$C_L=0$,故知零冲角约为相对弯度的负两倍。从式（13-16)′还可看出升力系数与动力冲角（$\alpha+2\bar{f}$）成正比，比例系数为2π。

图13-23给出式（13-16)′与实验结果的比较。对比是在如图所示的茹可夫斯基翼型($2\bar{f}=8°$)的理论升力系数与实测升力系数之间进行的，符合的程度是令人满意的。在翼型工作区间内，理论曲线的斜率为2π，而实验曲线则大约为6。实验曲线整个地较理论曲线为低，其原因主要是由于流体粘性所引起。当冲角在9°左右时实验曲线形状有了一个突变，如前所述，这是由于边界层开始与翼型上表面分离引起的。

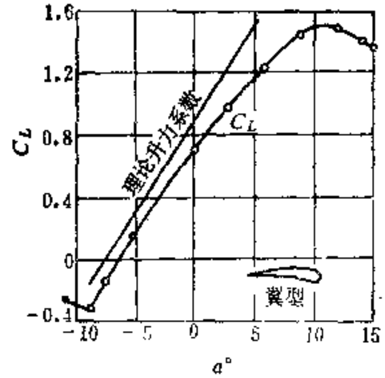


图13-23　茹可夫斯基理论与实验升力系数比较

第五节　薄翼型的绕流

当流体冲向翼型绕流时，由于翼型的存在产生对来流的扰动，改变了来流的性态。它一方面使流动顺翼型表面偏折，并形成一条流线；另一方面使流速值在翼型两侧产生跃变，出现了速度差和压力差，并进而产生了升力。由于翼型对来流的扰动作用，恰可以沿翼型适当分布的涡、源——奇点——来代替，所以在计算绕翼型流场时，常以均匀来流和沿翼型分布的奇点之诱导流、二者叠加之流场计算来代替。这一类计算绕流的方法，称为奇点分布法。

这一节，仅结合薄翼型的绕流，来说明翼型的奇点分布法解题路线。

一、　问题提出

设被绕流翼型很薄且只微有弯曲，在小冲角之下被绕流，要求解出此流动。所述绕流在作近似处理后，可大大简化：

1）　因翼型很薄，可以认为翼型与其中线无甚差别。因此对有厚度翼型绕流的讨论，可近似代以无厚度中线弧翼型绕流的讨论。

2）　翼型又只微有弯曲，可以认为翼型中线非常接近于其弦。因此在中线上所进行的有关计算，就可近似地移到弦上去做。

3）　来流冲角α很小，则结合（一)、(二）翼型所引起的扰动速度v_{ix}、v_{iy}应是小量。因此与某些量相比，就可将它们略去。

考虑到上述简化，很容易建立起一个非常简单的绕流关系式——解题的基本方程式。但在这方程中涉及扰动速度，因而下面我们先来建立扰动速度的计算公式。

二、　诱导速度

中线弧翼型对来流的扰动速度，可以用沿中线分布的旋涡层的诱导速度来代替。我们感

兴趣的是诱导速度沿中线弧翼型的分布，在计算时，考虑到翼型只微弯，中线甚接近其弦，沿中线分布的涡层在中线上某点诱导速度的计算，可近似地代以沿弦分布的涡层与在中线上点具有相同横坐标的弦上点处诱导速度的计算。以下就来建立诱导速度的算式。

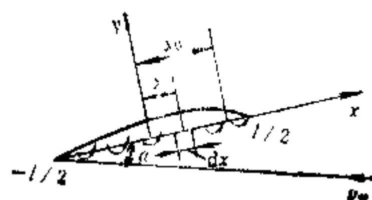


图13-24

如图13-24所示，把翼弦取作x轴、弦中点为坐标原点，y轴垂直弦。沿翼弦分布涡层，其环量密度为$\gamma(x)$，则在坐标为x处的微段dx上之涡层，在弦上横坐标x_0点处所引起的诱导速度：

$$dv_{ty}=\frac{-\gamma(x)dx}{2\pi(x-x_0)}$$

整个翼弦上涡层在x_0点处的总诱导速度则为：

$$v_{ty}=\frac{-1}{2\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{\gamma(x)dx}{x-x_0}$$

为了解题方便，常把$\gamma(x)$展成傅里哀级数，为此在上积分中须作变量替换。令$x=\frac{l}{2}\cos\theta$代入积分，则速度表示式成为：

$$v_{ty}=\frac{-1}{2\pi}\int_0^\pi\frac{\gamma(\theta)\sin\theta}{\cos\theta-\cos\theta_0}d\theta$$

设式中$\gamma(\theta)$在上述区间上满足狄瑞西勒条件，因而可将其展成下列傅里哀级数

$$\gamma(\theta)-A_0\text{ctg}\theta/2=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin K\theta$$

即

$$\gamma(\theta)=A_0\text{ctg}\frac{\theta}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin K\theta \tag{13-17}$$

式(13-17)中引入一附加项$A_0\text{ctg}\frac{\theta}{2}$，是为了满足翼型在前、后缘：$\theta=0$，$\pi$处绕流的边界条件。在前缘$\theta=0$为锐缘绕流，速度将成为无限大。而要想流动与翼型不产生分裂，则v_{ty}不允许成为无限大，那末只有v_{tx}成为无限大了。由于在涡层两侧$v_{tx}(\theta)=\mp\frac{\gamma(\theta)}{2}$，因而$\gamma(0)=\mp 2v(0)=\infty$，$\gamma(0)$须成为无限大；在后缘$\theta=\pi$，由于$\gamma(\pi)=0$，故翼型上、下速度相同，能保证后缘平顺绕流。

把式(13-17)代回v_{ty}积分式内，经计算可得到诱导速度的傅里哀级数表示式。

$$v_{ty}=\frac{-1}{2\pi}\int_0^\pi\frac{\gamma(\theta)\sin\theta}{\cos\theta-\cos\theta_0}d\theta$$

$$=\frac{-1}{2\pi}\left[A_0\int_0^\pi\frac{\text{ctg}\frac{\theta}{2}\sin\theta}{\cos\theta-\cos\theta_0}d\theta+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\int_0^\pi\frac{\sin K\theta\sin\theta}{\cos\theta-\cos\theta_0}d\theta\right]$$

根据格劳尔积分公式：$J_K=\int_0^\pi\frac{\cos K\theta}{\cos\theta-\cos\theta_0}d\theta=\pi\frac{\sin K\theta_0}{\sin\theta_0}$，$v_{ty}$式中的两类积分，现可分

别计算如下：

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}\sin\theta}{\cos\theta-\cos\theta_0}\mathrm{d}\theta=\int_0^\pi \frac{\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\theta}{\cos\theta-\cos\theta_0}\mathrm{d}\theta=\int_0^\pi \frac{\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\sin\theta}{\cos\theta-\cos\theta_0}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^\pi \frac{1}{\cos\theta-\cos\theta_0}\mathrm{d}\theta+\int_0^\pi \frac{\cos\theta}{\cos\theta-\cos\theta_0}\mathrm{d}\theta$$

$$=J_0+J_1=0+\pi=\pi$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin K\theta\sin\theta}{\cos\theta-\cos\theta_0}\mathrm{d}\theta=\int_0^\pi \frac{\frac{1}{2}[\cos(K-1)\theta-\cos(K+1)\theta]}{\cos\theta-\cos\theta_0}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}(J_{K-1}-J_{K+1})$$

$$=-\frac{\pi}{2\sin\theta_0}[\sin(K-1)\theta_0-\sin(K+1)\theta_0]=-\pi\cos K\theta_0$$

把计算结果代回v_{iy}表示式，则最后可得

$$v_{iy}=\frac{-1}{2}\left[A_0-\sum_{K=1}^{\infty}A_K\cos K\theta_0\right] \tag{13-18}$$

三、基本方程

令$y=y(x)$表示中线弧翼型的方程式，v_x、v_y是翼型上速度的坐标分量，则根据翼型应成为一条流线得：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{v_y}{v_x}$$

v_x、v_y是无穷远来流与涡层诱导速度的坐标分量之和，可分别表出如下：

$$v_x=-v_\infty\cos\alpha+v_{ix}\approx-v_\infty\cos\alpha$$

$$v_y=v_\infty\sin\alpha+v_{iy}$$

把这结果代入上式中则得：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{v_\infty\sin\alpha+v_{iy}}{-v_\infty\cos\alpha}=-\mathrm{tg}\alpha-\frac{v_{iy}}{v_\infty\cos\alpha}$$

把式 (13-18) 代入上式，则得到基本方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\mathrm{tg}\alpha+\frac{A_0}{2v_\infty\cos\alpha}-\frac{1}{2v_\infty\cos\alpha}\sum_{K=1}^{\infty}A_K\cos K\theta \tag{13-19}$$

上式中已把θ的原下标“0”去掉。式(13-19)称薄翼绕流的基本方程式，通过它可以求解绕薄翼型流动的正、反问题。

如给定$\gamma(\theta)$则可通过求解基本方程，得到翼型形状；反之如给定翼型$y=y(x)$，利用基本方程可定出系数A_K：

$$A_0=\frac{2v_\infty\cos\alpha}{\pi}\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\theta+2v_\infty\sin\alpha$$

$$A_K=\frac{-4v_\infty\cos\alpha}{\pi}\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cos K\theta\mathrm{d}\theta \tag{13-20}$$

四、绕流解例

(一) 正问题——平板绕流

设有一长l的平板在小冲角α之下被大小为v_∞的来流所绕流（参图13-25），要求确定该平板绕流的特性。

令板在所取坐标系中的方程式为：

$$y=0 \qquad \left(-\frac{l}{2}\leqslant x\leqslant \frac{l}{2}\right)$$

由上面讨论知：相应的旋涡分布$\gamma(\theta)$之傅里哀展开系数，可按式（13-20）确定如下：

$$A_0=2v_\infty\sin\alpha\approx 2v_\infty\alpha$$

$$A_K=0$$

因此相应于平板，涡层分布γ的傅里哀展开应是：

$$\gamma(\theta)=2v_\infty\sin\alpha\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} \qquad (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

沿平板两侧的诱导（扰动）速度，在板法线方向分量，根据式(13-18)：

$$v_{iy}=-\frac{1}{2}\left(A_0-\sum_{K=1}^{\infty}A_K\cos K\theta\right)=-v_\infty\sin\alpha$$

板切线方向分量，则由于他处旋涡对速度无贡献，只有待求速度点处旋涡起作用，由涡层讨论知：

$$v_{ix}=\mp\frac{\gamma(\theta)}{2}=\mp v_\infty\sin\alpha\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$$

速度沿平板分布见图13-25。

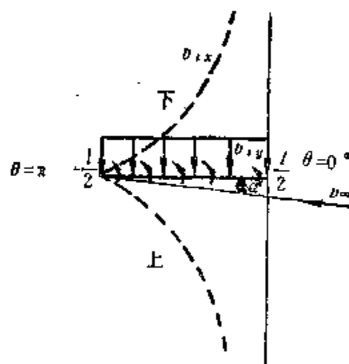


图13-25 平板绕流时的速度分布

为计算板受力，只须确定升力系数，为此先来计算绕平板的环量：

$$\Gamma=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\gamma(x)\mathrm{d}x=\frac{l}{2}\int_0^{\pi}\gamma(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi l}{2}\left(A_0+\frac{A_1}{2}\right)=\pi l v_\infty\sin\alpha$$

$$C_y=\frac{\rho v_\infty\Gamma}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 l}=\frac{2\Gamma}{l v_\infty}=2\pi\sin\alpha\approx 2\pi\alpha$$

上述平板结果，已被实验所证实。

(二) 反问题——抛物线翼型绕流

设无穷远来流速度大小v_∞、方向沿弦线，绕流一薄翼型。又知此翼型对流场的扰动与其中弧线、按规律：$\gamma=A_1\sin\theta$分布的涡层对流场的作用等价，要求确定被绕流的翼型并讨论绕流的特性。

上述问题中：相当于取$\alpha=0$；$\gamma(\theta)$的傅里哀系数中除$A_1\neq 0$外$A_K=0$。把这些代入基本方程式（13-19）得：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{A_1}{2v_\infty}\cos\theta=\frac{-A_1}{2v_\infty}\frac{2x}{l}$$

积分之得：

$$y=\frac{-A_1}{v_\infty l}\frac{x^2}{2}+c$$

注意翼型前、后缘点全落在翼弦上，而弦线在 x 轴上，故

$$y\left(\pm\frac{l}{2}\right)=0$$

由此定出积分常数：

$$c=\frac{A_1 l}{8v_\infty}$$

代回 y 式中得翼型曲线方程：

$$y=\frac{A_1}{2lv_\infty}\left(\frac{l^2}{4}-x^2\right)$$

此代表一抛物线（见图 13-26）。令 $x=0$ 得抛物线最大拱高——翼型的弯度

$$f=y(0)=\frac{A_1 l}{8v_\infty}\qquad\left(\text{从而 } A_1=\frac{8fv_\infty}{l}\right)$$

可以得出结论：零冲角下给定分布规律 $\gamma(\theta)=A_1\sin\theta$ 相当于一个零冲角下的绕抛物线翼型的流动。

此抛物线翼型的扰动速度，可确定如下：沿翼型表面的法向与切向速度分量，由式（13-18）及式（9-9）

$$v_{iy}=\frac{A_1}{2}\cos\theta=\frac{4fv_\infty}{l}\frac{2x}{l}=\frac{8v_\infty}{l^2}fx$$

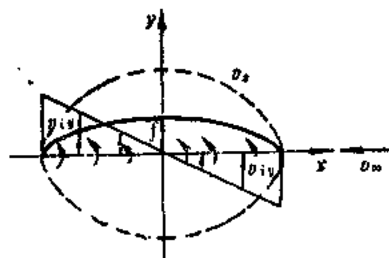


图 13-26　抛物线翼型上的速度分布

$$v_{ix}=\mp\frac{\gamma}{2}=\mp\frac{A_1}{2}\sin\theta=\mp\frac{A_1}{2}\sqrt{1-\cos^2\theta}=\mp\frac{A_1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{2x}{l}\right)^2}\qquad(13\text{-}21)$$

把速度分布画在图13-26中：法向分速度按直线规律变化（图中实的直线）；切向分速度按椭圆规律分布（图中虚线所示）。

为计算受力，由上段公式（13-21）可得：

$$|L|=\rho v_\infty\left|\frac{\pi l}{2}\left(A_0+\frac{A_1}{2}\right)\right|=\left|\frac{l}{4}\pi A_1\right|\rho v_\infty=2\pi\rho v_\infty^2 f$$

综合上两例不难看出，如给定 $\gamma(\theta)=A_0\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}+A_1\sin\theta$ 则应得到有冲角的曲线翼型绕流。并且适当选取 A_0、A_1 之值：一方面可保持环量 $\Gamma=\frac{\pi l}{2}\left(A_0+\frac{A_1}{2}\right)$ 为不变的预期值，从而保证一定大小的升力；另一方面又可得到在各种冲角下、具有不同弯度的曲线翼型的绕流，从而可以调整翼型上的速度和压力之分布，以保证较好的汽蚀性能。

上面介绍了薄翼型绕流的奇点分布解法。对有厚度翼型的绕流也可用奇点分布法求解，这时须沿翼型骨线布置奇点，并且除旋涡外还须分布以源、汇，解题路线则与上述无本质差别。

第六节　　有限翼展机翼理论

前面几节讨论了翼型——无限翼展机翼的绕流，在此基础上我们进而来讨论有限翼展机翼的绕流问题。

机翼绕流时，上翼面呈现低压，下翼面则呈现出高压，在上、下翼面间存在着压力差。在无限翼展机翼情况下，这个差值并未影响上、下翼面的流动；但在翼展有限的条件下，这个上、下翼面间的压力差，将对上、下翼面的流动发生作用，从而影响了机翼周围的流场，并导致了机翼动力特性（与无限机翼比）的改变。以下分几步来说明这个问题。

一、气动力模型

由于上、下翼面间存在压力差值，在有限翼展情况下，就产生了由下翼面翻过翼梢流向上翼面的流动（图13-27a）。并引起下翼面由中央向两梢、上翼面则由两梢向中央的展向二次流。这使上、下翼面处的流线分别向中央和两梢偏斜了过去（图13-27b）。

流经上、下翼面的流体在后缘汇合时，两股流动之方向并不一致。汇流面上、下的速度产生跃变，所以汇流面是一个速度的不连续面，叫做间断面。当机翼前进时，宽为展长 b 的间断面不断产生出来，伸向下游。实际上，由于流体或多或少总是具有粘性的，两股流速不同的流体汇合时互相搓捻，使流体质点产生旋转，所以上述间断面实为一涡层。它由对称于翼中线的、由外向内互相反向的涡丝所组成。

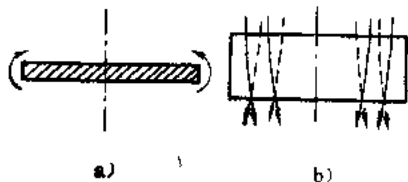


图 13-27　有限翼展机翼翼端效应



图 13-28　有限翼展机翼后的涡层

上述涡层所组成的间断面极不稳定，稍遇扰动就会发生变形，破裂并顺势绞起来滚卷成两个单涡。所以在机翼后面总是或近或远（约距翼一个展长 b）地间断面就开始演变成了两个等值、反向、由外向内旋转的单涡了。大升力机翼开始得早些，小升力翼此种涡的形成就向后推去（图13-28）。

无限翼展机翼，对来流的作用是使在自己周围形成一定大小的环流（从而获得升力）。因此它对来流的扰动是与一同等强度的无限长直涡线等价的。在同一来流中作用于此涡线的升力将与机翼是相同的。无限翼展机翼绕流时，就可用这么一根想象的涡线，来代替机翼对流场的扰动而建立计算的动力模型。并为与真实涡相区别，把它叫作附着涡，也叫升力线。由于机翼翼展有限时，出现了间断面和伸向下游的两根自由涡，这些自然对流场会发生作用，计算时必须考虑。因此对于有限翼展机翼，粗略地可取一长 b、强度 Γ 的附着涡和由翼端接续向后的两个半无穷长的自由涡，共同组成的马蹄形涡系（图 13-29a），作为计算的动力模型。从而有限翼展机翼绕流的计算，可代之以马蹄形涡系的诱导流与来流的合成流动的计算。但实际上机翼由中央至两梢升力（从而环量）是下降的，中央最大至两梢下降为零。因此，较准确的动力模型，应取涡头长由零到 b 而强度为无限小的马蹄形涡丝系，把涡头迭

合在一起所组成的半无穷涡面（图13-29b），去取代机翼。此模型特别适合于小升力、大展弦比的机翼并只限于计算机翼周围的流动情况。这种以涡头迭合在一条线上的马蹄形涡系作为模型的机翼计算理论，就叫做升力线理论。下面就从这个模型出发，来进行机翼绕流的讨论。

二、基本方程式

由上面的讨论知道绕机翼的流速，可通过计算图13-29上马蹄形涡系的诱导速度和来流速度合成而得出。来流速度 v_∞ 在水平（x轴）方向；而涡系在翼表面处的诱导速度 v_i 则为垂直向下（负y轴方向），故称此速度为下洗速度、相应的流动则叫下洗流。因而当无穷远来流接近此种机翼时，使向下倾斜了一个小角度 φ——下洗角，且$\varphi=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{v_i}{v_\infty}$（图13-30）。作用于机翼元段的合力$\mathrm{d}l$，由茹可夫斯基定理（展弦比$\lambda$较大时除翼端邻近外）仍可适用$\mathrm{d}L=\rho u\Gamma\mathrm{d}b$，其方向垂直于速度 u（见图13-30）。因而 $\mathrm{d}L$ 在垂直来流的方向和来流方向上各有一个分力：

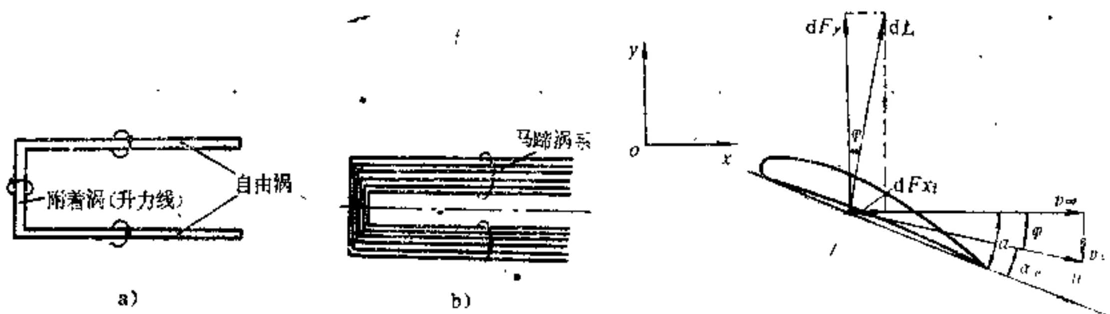


图 13-29　有限翼展机翼绕流的动力模型　　　　图 13-30　下洗和诱导阻力

$$\mathrm{d}F_Y=\mathrm{d}L\cos\varphi=\rho u\Gamma\cos\varphi\mathrm{d}b=\rho v_\infty\Gamma\mathrm{d}b$$

这是升力；

$$\mathrm{d}F_{Xi}=\mathrm{d}F_Y\mathrm{tg}\varphi=\mathrm{d}F_Y\frac{v_i}{v_\infty}$$

叫诱导阻力。因此机翼理论的任务就在于求出下洗速度 v_i、升力 $\mathrm{d}F_Y$ 和诱导阻力$\mathrm{d}F_{Xi}$，然后沿翼展进行积分，即可得出整个机翼的升力和阻力。

（一）下洗速度

引用图13-29的动力模型，把升力线取为 z 轴，沿来流方向取 x 轴，y轴与 x、z 成右手系，原点 o 在升力线中央（图13-31）。沿升力线从 z_1 到 $z_1+\Delta z_1$ 之间抽出去的自由涡丝，设其总环量为$\Delta\Gamma=\Gamma(z_1+\Delta z_1)-\Gamma(z_1)$，则在升力线上 z 处所引起的下洗速度（沿负 y 轴向）为：

$$\Delta v_y=\frac{-\Delta\Gamma}{4\pi(z-z_1)}$$

所有的自由涡丝在 z 处引起的总下洗速度就是

$$v_y(z)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\frac{\mathrm{d}\Gamma}{z_1-z}=\frac{1}{4\pi}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\frac{\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}z_1}}{z_1-z}\mathrm{d}z_1 \qquad (13\text{-}22)$$

上式说明$v_y(z)$和环量$\Gamma(z_1)$ 沿 z 轴如何分布有关。

下洗速度取决于环量沿翼展的分布规律，而环量的分布是与机翼平面形状及绕流情况相关的。因此为计算下洗速度，有必要先来建立环量分布与机翼形状参数及绕流参数之间的关系式。

（二） 环量方程式

1. 一般下洗速度都不大，因此对 dz 长的任一机翼元段，其相应于机翼有效来流速度 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}_\infty+\boldsymbol{v}_y$ 的升力，可如下计算：

$$\mathrm{d}L=\rho u\Gamma(z)\mathrm{d}z\approx\rho v_\infty\Gamma(z)\mathrm{d}z$$

又升力的实用算式为：

$$\mathrm{d}L=\frac{1}{2}C_L'(z)\rho u^2 l(z)\mathrm{d}z\approx\frac{1}{2}C_L(z)\rho v_\infty^2 l(z)\mathrm{d}z$$

比较上、下两式可得

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2}C_L(z)l(z)v_\infty \tag{13-23}$$

如令 α_e 为机翼有效来流由动力翼弦起算之冲角时，则在机翼的工作区间内应有：

$$C_L(z)=a_0\alpha_e\ \ (a_0\text{ 为一常数})$$

无穷远来流与动力翼弦之夹角记以α、下洗角为 φ，则由图13-32上几何关系：

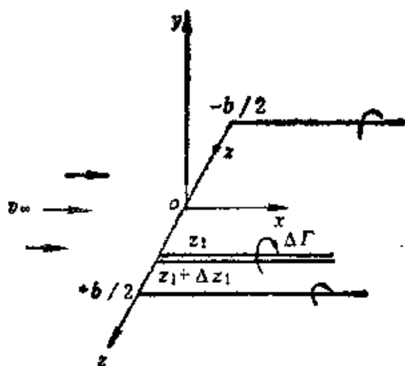


图 13-31 自由涡与下洗速度

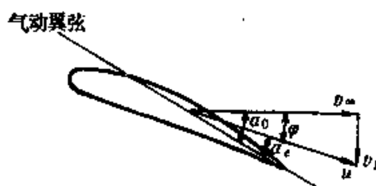


图 13-32 冲角α、α_e与下洗角φ的关系

$$\alpha_e=\alpha-\varphi\approx\alpha-\frac{|v_y|}{v_\infty}=\alpha+\frac{v_y}{v_\infty}$$

注意到 α 与 v_y 皆为 z 的函数，把 α_e 式代回$C_L(z)$式后可得：

$$C_L(z)=a_0\left[\alpha(z)+\frac{v_y(z)}{v_\infty}\right]$$

再把此式代入式 (13-23) 中则

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2}a_0 l(z)v_\infty\left[\alpha(z)+\frac{v_y(z)}{v_\infty}\right] \tag{13-24}$$

把式 (13-22) $v_y(z)$代进式 (13-24)，最后得到

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2}a_0 l(z)v_\infty\left[\alpha(z)+\frac{1}{4\pi v_\infty}\int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}}\frac{\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}z_1}}{z_1-z}\mathrm{d}z_1\right] \tag{13-25}$$

上式称为有限翼展机翼绕流计算的基本方程式，由它可计算环量沿翼展的分布$\Gamma(z)$。方程(13-25)是一个奇异线性积分—微分方程，至今还没有求其准确解的一般方法，但有大量近似解法。下面介绍一种格劳尔的三角级数解法。

2. 为计算方便，把$\Gamma(z)\left(\frac{-b}{2}\leqslant z\leqslant\frac{b}{2}\right)$展成傅里哀级数。为此，可令$z=\frac{-b}{2}\cos\theta$做变量代换，得$\Gamma(\theta)$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，则$\Gamma(\theta)$可展成如下形式的傅里哀级数：

$$\Gamma(\theta)=2bv_\infty\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\theta \tag{13-26}$$

式中
$$A_n=\frac{1}{\pi bv_\infty}\int_0^\pi\Gamma(\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta$$

把环量展成傅氏级数后，可如下来计算下洗速度：

$$v_y(\theta)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\frac{\mathrm{d}\Gamma}{z_1-z}=\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\frac{2bv_\infty\sum\limits_{n=1}^{\infty}nA_n\cos n\theta_1\mathrm{d}\theta_1}{-\frac{b}{2}\cos\theta_1+\frac{b}{2}\cos\theta}$$

$$=-\frac{v_\infty}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}nA_n\int_0^\pi\frac{\cos n\theta_1}{\cos\theta_1-\cos\theta}\mathrm{d}\theta_1$$

根据格劳尔积分公式：

$$\int_0^\pi\frac{\cos n\theta_1}{\cos\theta_1-\cos\theta}\mathrm{d}\theta_1=\pi\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$

所以得到：

$$v_y(\theta)=-v_\infty\sum_{n=1}^{\infty}nA_n\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} \tag{13-27}$$

把式(13-26)与式(13-27)代回基本方程式(13-25)则

$$2bv_\infty\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\theta=\frac{1}{2}a_0l(\theta)v_\infty\left[\alpha(\theta)-\sum_{n=1}^{\infty}nA_n\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right]$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\theta=\frac{a_0l(\theta)}{4b}\left[\alpha(\theta)-\sum_{n=1}^{\infty}nA_n\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right]$$

令
$$\mu(\theta)=\frac{a_0l(\theta)}{4b}$$

则得
$$\sum_{n=1}^{\infty}(n\mu+\sin\theta)A_n\sin n\theta=\mu\alpha\sin\theta$$

一般近似计算中，只取前n项去逼近无穷级数，则上式近似写成：

$$\sum_{n=1}^{N}(n\mu+\sin n\theta)A_n\sin n\theta=\mu\alpha\sin\theta$$

取 θ 的 N 个不同值，则可得 N 个线代数方程组，进而求解该方程组，便可确定出 N 个系数 A_n 了。把 A_n 值代回式（13-26），则环量 $\Gamma(\theta)$ 也便确定了。

三、诱导阻力与升力

根据上述，在给定机翼与来流的条件下，可以求出沿翼展的环量分布 $\Gamma(\theta)$。由此，便可计算诱导阻力及升力了。

现在来计算诱导阻力。作用在展长 $\mathrm{d}z$ 的翼元段上之诱导阻力

$$\mathrm{d}F_{Xi}=\mathrm{d}F_Y\left(-\frac{v_y}{v_\infty}\right)$$

$$\mathrm{d}F_Y=\rho\Gamma v_\infty\mathrm{d}z=\rho v_\infty\left(2bv_\infty\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin m\theta\right)\left(-\frac{b}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)$$

把上式中 $\mathrm{d}F_Y$ 及式（13-27）中 v_y 代入诱导阻力式中

$$\mathrm{d}F_{Xi}=\left(b^2\rho v_\infty^2\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin m\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}nA_n\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$=b^2\rho v_\infty^2\left(\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin m\theta\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}nA_n\sin n\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

沿整个翼展积分，则得作用在整个机翼上的诱导阻力：

$$F_{Xi}=\int_0^{\pi}\mathrm{d}F_{Xi}=\pi b^2\frac{\rho v_\infty^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}nA_n^2 \tag{13-28}$$

这就是所要求的机翼诱导阻力的一般表达式。它与环量有关，从而最终与机翼形状及来流情况相关联。

长为 $\mathrm{d}z$ 的翼元段之升力

$$\mathrm{d}F_Y=\rho v_\infty\Gamma\mathrm{d}z$$

$$=\rho v_\infty\left(2bv_\infty\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin m\theta\right)\left(\frac{b}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)$$

$$=b^2\rho v_\infty^2\sin\theta\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin m\theta\mathrm{d}\theta$$

沿翼展积分，可得整个机翼之升力

$$F_Y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}F_Y=\pi b^2\frac{\rho v_\infty^2}{2}A_1 \tag{13-29}$$

四、最小诱导阻力与椭圆机翼

工程上总是希望机翼的阻力尽可能小，那末在什么条件下，才能使机翼的诱导阻力为最小呢？或者把问题提的更明确些：对给定了展长 b 并保证总升力一定的条件下，怎样的环量分布，才能使诱导阻力为最小呢？

顾及式(13-28)与(13-29)，F_Y与A_1有关而F_{Xi}则与$A_n(n=1, 2\cdots\cdots)$有关。为保证一定大小的升力值，首先F_Y须不等于零，这要求$A_1\neq 0$；欲使F_{Xi}为最小，在保证升力不为零的条件下，须令$A_n=0(n\neq 1)$。则相应的环量分布，由式(13-26)成为：

$$\Gamma=2bv_\infty A_1\sin\theta=2bv_\infty A_1\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

注意到：$\cos\theta=\dfrac{-z}{(b/2)}$，并引入记号$\Gamma_0=2bv_\infty A_1$则上式成为：

$$\Gamma=\Gamma_0\sqrt{1-\frac{z^2}{(b/2)^2}} \tag{13-30}$$

此为一椭圆方程，故当环量（从而升力）沿翼展呈椭圆分布时，所引起的诱导阻力为最小。

当Γ呈椭圆规律分布时，由式(13-27)得下洗速度：

$$v_y=-v_\infty A_1$$

而下洗角则：
$$\varphi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{-v_y}{v_\infty}\right)=\mathrm{tg}^{-1}(A_1)$$

这说明，当环量沿翼展呈椭圆分布时，下洗速度及下洗角沿翼展均为常数。注意到式(13-29)则容易得到：

$$A_1=\frac{F_Y}{\pi b^2\frac{1}{2}\rho v_\infty^2}$$

由此则下洗速度与下洗角可表成下式：

$$v_y=\frac{-F_Y}{\pi b^2\frac{1}{2}\rho v_\infty}$$

$$\varphi=\mathrm{tg}^{-1}\frac{F_Y}{\pi b^2\frac{1}{2}\rho v_\infty^2} \tag{13-31}$$

当环量呈椭圆分布时，机翼诱导阻力最小。但欲实现环量的椭圆分布，机翼应采取什么形状呢？如果只限于考虑由相似翼型组成的无扭曲机翼时，机翼各剖面升力系数不变，即

$$C_L(z)=a_0\left(\alpha+\frac{v_y}{v_\infty}\right)=\text{常数}$$

这时在式(13-23)中C_L为一常数，即

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2}C_L l(z)v_\infty$$

$$l(z)=\frac{2\Gamma(z)}{C_L v_\infty}=\frac{4bv_\infty A_1}{C_L v_\infty}\sqrt{1-\left(\frac{z}{b/2}\right)^2}$$

从而
$$l(z)=b_0\sqrt{1-\left(\frac{z}{b/2}\right)^2}$$

式中$b_0=\frac{4bv_\infty A_1}{C_L v_\infty}$。上述结果说明，在所述情况下，沿翼展、翼弦也应按椭圆规律变化，也就是要求翼面呈椭圆形。

椭圆形机翼所引起的最小诱导阻力，其值由式(13-28)可得：

$$F_{Xi}=\pi b^2\frac{\rho v_\infty^2}{2}A_1^2$$

把由式(13-29)确定的A_1代入上式中，则

$$F_{Xi}=\frac{F_Y^2}{\pi b^2\cdot\frac{1}{2}\rho v_\infty^2} \tag{13-32}$$

显然阻力值随升力加大而变大；随展长增加而减小。如在式(13-32)中把升、阻力代入它们的实用算式，则可导出其系数间关系：

$$C_{xi}\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 A=\frac{\left(C_y\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 A\right)^2}{\pi\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 b^2}$$

即

$$C_{xi}=\frac{C_y^2}{\pi\lambda} \tag{13-33}$$

式中 $\lambda=\frac{b^2}{A}$为展弦比。把这一关系绘在图上，则得诱导阻力抛物线(图13-33)，它的曲率随展弦比而变。再把同一机翼的极曲线也绘于图中，容易看出诱导阻力在机翼总阻力中占了很大一部分，特别是在大攻角时。极曲线与抛物线间的水平距离代表粘性阻力。

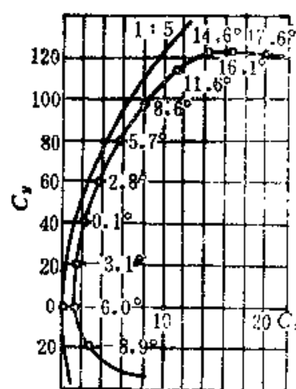


图13-33 诱导阻力抛物线

五、机翼理论的实际应用

应用上述机翼理论的结果，可以建立起机翼极曲线的转换公式。根据这些公式，人们就可以从一个机翼的极曲线，转换出另一由相同翼型所组成的、但展弦比不同于前一机翼的极曲线来。

实验指出，对由同一翼型组成的展弦比不同的机翼，其粘性阻力系数是不变的。注意到这个事实，可以建立不同展弦比的两个机翼间对应于同一升力系数的、阻力系数换算公式。如上所述总阻力包括粘性阻力与诱导阻力，故阻力系数相应地可写成

$$C_x=C_{x\mu}+C_{xi}$$

式中 C_x——总阻力系数；

$C_{x\mu}$——粘性阻力系数；

C_{xi}——诱导阻力系数。

把式(13-33)代入上式则：

$$C_x = C_{xp} + \frac{C_y^2}{\pi\lambda}$$

两个具有不同展弦比λ_1、λ_2的机翼，对应于同一升力系数，上式可写成：

$$C_{x1} = C_{xp} + \frac{C_y^2}{\pi\lambda_1}$$

$$C_{x2} = C_{xp} + \frac{C_y^2}{\pi\lambda_2}$$

从而可得由相同翼型组成的、具有展弦比λ_1与λ_2的两个机翼，对应于同一升力系数其阻力系数的转换公式为：

$$C_{x2} = C_{x1} + \frac{C_y^2}{\pi}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) \tag{13-34}$$

对于给定C_y值，具有相同翼型但展弦比不同的两个机翼的冲角也可以像对阻力系数那样，导出换算公式来。为此，以下的考虑可以帮助我们达到目的。由某种翼型组成的无限翼展机翼，其冲角α与升力系数C_y呈一定关系：$\alpha = f(C_y)$。但当绕流由同一翼型构成的有限翼展机翼时，有效来流比无穷远来流下倾了一个角度φ(见图13-34)，使冲角α变成有效冲角$\alpha_e(=\alpha-\varphi)$，从升力效应上来说，被无穷远来流以冲角$\alpha$绕流的无限翼展机翼中的翼型，与被有效来流以有效冲角α_e绕流的有限翼展机翼中的同一翼型是等价的。因此对有限翼展机翼应有$\alpha_e = f(C_y)$，与无限翼展机翼是同样的函数关系。换言之，由相同翼型组成的、不同展弦比的各有限翼展机翼，其有效冲角与升力系数间均存在同一函数关系：$\alpha_e = f(C_y)$

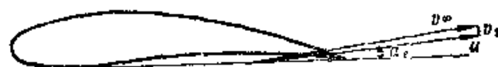


图13-34 有效来流及有效冲角

由图13-34上几何关系

$$\alpha = \alpha_e + \varphi = f(C_y) + \varphi$$

考虑到φ一般不大，并注意到式(13-31)

$$\varphi \approx \text{tg}\varphi = \frac{F_Y}{\pi b^2 \frac{\rho v_\infty^2}{2}} = \frac{C_y \frac{\rho v_\infty^2}{2} A}{\pi b^2 \frac{\rho v_\infty^2}{2}}$$

即
$$\varphi = \frac{C_y}{\pi\lambda}$$

代回α表示式中则

$$\alpha = f(C_y) + \frac{C_y}{\pi\lambda}$$

故对二由相同翼型组成的、展弦比分别为λ_1、λ_2的机翼，对应于同一升力系数C_y其冲角的换算公式为：

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{C_y}{\pi}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) \tag{13-35}$$

在机翼理论基础上，导出的转换公式(13-34)、式(13-35)的可靠性，已被哥廷根的实验所证实。图13-35a是对由相同翼型组成的、展弦比从1到7的七个矩形机翼，通过实验所得的

七条机翼极曲线；而图13-35b是把其中六条实验曲线，经式(13-34)换算成展弦比为5的极曲线时，所得结果，所有换算点，均落在$\lambda=5$的实验曲线上。而图13-36a、b是上述七个机翼的$C_y\sim\alpha$曲线，经式(13-35)换算成$\lambda=5$的$C_y\sim\alpha$曲线时的结果，也和实验结果吻合的很好。以上所述事实，不仅直接说明换算公式的可靠性，而且间接地证实了机翼理论的正确性。

上述对环量的椭圆分布所得到的、与诱导阻力有关的理论结果，对展弦比$\lambda>3$的机翼是相当成功的。由于一个量（诱导阻力）在其极值附近变化的平稳性，当环量分布偏离椭圆不大时，上述结果仍然适用，甚至对矩形机翼也不引起很大误差。实际上这使上述理论，可应用于任何机翼。最后指出，对展弦比小的机翼(如三角机翼)，则上述升力线理论不再适用，而需要换所谓“升力面”理论来进行解析。

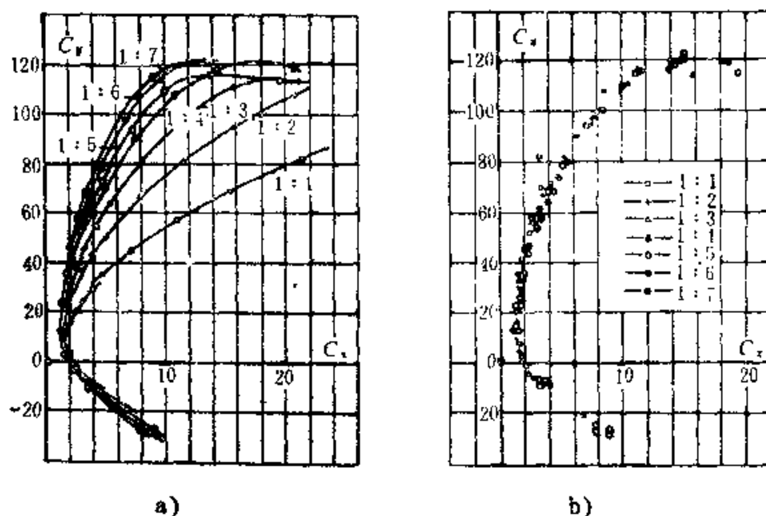


图13-35　不同翼展机翼极曲线的换算

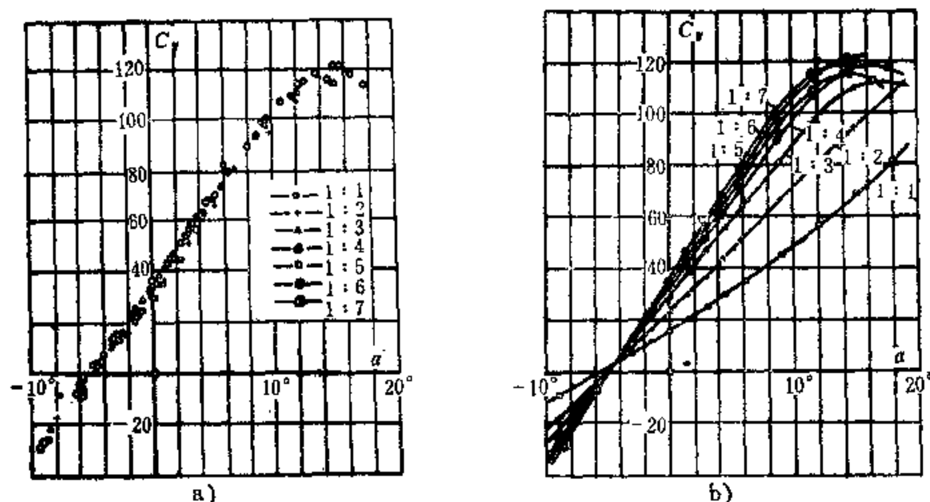


图13-36　不同翼展机翼冲角的换算

习　题　十　三

13-1　根据儒可夫斯基变换$\zeta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{a^2}{z}\right)$，试将如下的变换图形绘在坐标纸上，

(1) 将圆$x^2+(y-f)^2=a^2+f^2$变换为圆弧;

(2) 将圆$(x+d)^2+y^2=(a+d)^2$变换为对称翼型;

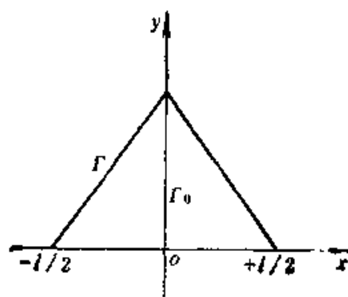
(3) 将圆$(x+d\cos\beta)^2+(y-f-d\sin\beta)^2=(\sqrt{a^2+f^2}+d)^2$变换为凹形翼型，其中$a=25$mm　$f=4$mm，$d=6$mm。

13-2　为什么可以用一根П形旋涡或者П形涡系来代替有限翼展机翼（在相同翼型和相同几何冲角的情况下，为什么有限翼展机翼较之无限翼展机翼增大了阻力而减小了升力？）

13-3　矩形机翼面积$A=20\text{m}^2$，翼展$l=4\text{m}$。如果用一根附着涡来代替机翼，它的长度和翼展相同。求当$C_L=1.0$时П形涡的环量大小。并计算在机翼中部及1/4翼展处所诱导的下洗速度。

13-4　船舵所用翼型为NACA0016对称翼型。对于无限翼展机翼，当翼弦为1m时，$\alpha=0°$及15°时$C_y=0$，1.5，问升力及诱导阻力各为多少？当翼弦不变，而翼展为2m时，在相同的几何冲角的情况下，升力及诱导阻力又各为多少？

13-5　设已知一有限翼展机翼的环量分布为如图所示的三角形分布。试求下洗角φ沿翼展的变化规律，并求升力系数$C_L=C_L(\alpha)$。



题　13-5图

第十四章　叶 栅 理 论

第一节　概　　论

把按照一定规律排列起来的相同机翼的系列，叫做翼栅。翼栅理论是讨论翼栅的绕流规律的，翼栅的绕流则是单个机翼绕流的推广。翼栅理论在工程上得到广泛的应用，特别是在叶片式流体机械方面。因此，翼栅常被称为叶栅，组成它的机翼也就叫做叶片了。

在本书叶栅理论这一章中，主要介绍水力机械所涉及的理想、不可压缩流体绕过叶栅的定常流动。

一、叶栅几何参数

叶栅的几何参数主要有下列几个：

（一）　列线

栅中诸叶片上各相应点的联接线，称为叶栅的列线。通常都以叶片诸前、后缘点的联线表示它。实际上所遇到的列线，不外乎两种：无限长直线或圆形周线(图14-1)。

（二）　栅轴

垂直于列线的直线叫栅轴。但对圆周列线叶栅，把旋转对称轴定义为其栅轴。在有些文献中把上述列线叫做栅轴，而不再引用列线这一名词。

（三）　叶型

叶片与过列线之流面交截出来的剖面形状，叫做叶栅之叶型。叶型的一切几何参数见翼型。

（四）　栅距

在同一列线上，二相邻的相应点间的线段长度，叫叶栅的栅距或栅隔，用字母 t 记之。对圆周列线的叶栅，不引用此参数，而用角距 $\frac{2\pi}{n}$（n为叶片数）代替它。

（五）　安放角

叶型的弦与列线之间的夹角β_e，称为叶型在叶栅中之安放角。叶型中线(或骨线)在前、后缘之切线与列线之夹角β'_e、β''_e，分别叫做叶型的进、出口安放角。对圆列线叶栅，则只引用后两参数。

（六）　疏密度

栅中叶型弦长 l 与栅距 t 之比值$\frac{l}{t}$，叫做叶栅的疏密度。而把其倒数$\frac{t}{l}$，称为叶栅的相对栅距。圆列线的叶栅、不引用此参数。

二、叶栅分类

在工程实际当中所遇到的叶栅是多种多样的，为便于分析和讨论问题，可给这些叶栅加以分类。但从不同的角度可得到不同的分类，这里仅就水力机械常用到的分类方法，介绍几种。

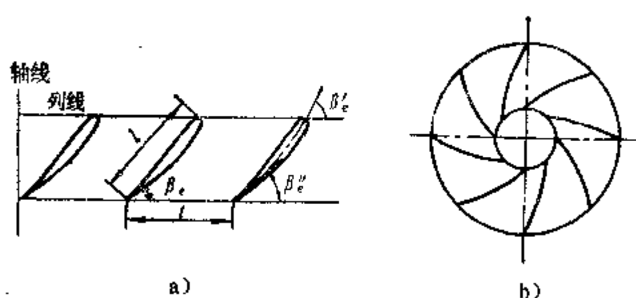


图14-1　直列与环列叶栅

（一）　根据绕流流面分类叶栅

1．　平面叶栅

如能将绕叶栅液流分成若干等厚度流层，这些流层本身为平面，或这些流层虽为曲面，但沿流线切开后，能铺展成一个平面者，称为平面叶栅。

例如水轮机导叶叶栅，低比速水泵、水轮机的转轮叶栅等，绕这些叶栅的流面本身就是平面；而轴流式水泵、水轮机和风机等转轮叶栅之流面，虽为圆柱面但顺流线切开后可展成平面。所以上述叶栅均为平面叶栅，绕平面叶栅的流动为平面流动。

2．　空间叶栅

若无论如何分绕流流面，既得不到平面流层、也得不到可展成平面的曲面流层时，则叶栅就称为空间叶栅。

混流式水轮机及泵叶轮为空间叶栅之例。绕它们的流面为喇叭面，无法展成平面。绕这类叶栅的流动为空间流动。

（二）　按流面上的列线形状分类叶栅

1．　直列叶栅

流面上列线成一无限长直线者，为直列叶栅(图14-1a)。轴流式叶轮叶栅属此。

2．　环列叶栅

流面上列线呈一圆形周线者，为环列叶栅(图14-1b)。离心式水泵、水轮机叶轮叶栅均为环列叶栅。

（三）　按叶栅动、静分类叶栅

1．　不动叶栅

叶栅本身不运动者，为不动叶栅。如水泵导叶、水轮机导水机构等均属不动叶栅。

2．　运动叶栅

叶栅本身是运动的，为运动叶栅。运动叶栅又可分为两种：一种为移动叶栅，只有直列叶栅才能作移动运动，成为移动叶栅；另一种是转动叶栅，只有环列叶栅才能作旋转运动，成为转动叶栅。轴流式叶轮叶栅为移动叶栅之例；而离心式叶轮叶栅则为转动叶栅之例。

三、叶栅绕流问题之提法

叶栅理论所讨论之问题，可以分成两个基本类型：

（一）　正问题

给定叶栅和栅前无穷远处的来流，要求确定叶片表面及其周围空间的流速分布及栅后无穷远处的流动情况。这类问题，通常就叫做绕叶栅流动的正问题。

（二）　反问题

给定叶栅前、后无穷远处的　度，及某些叶栅几何参数，要求作出叶栅。这样提出的问题，常称为绕叶栅流动的反问题。

不可压缩流体绕叶栅流动的理论，目前对平面叶栅比较成熟。可认为由任意叶型所组成的叶栅之平面绕流问题都已解决，并被广泛应用于工程实际中。空间叶栅理论，则还处于探

索阶段。本书主要介绍平面叶栅理论；但也介绍一些有关三元叶栅理论在水力机械中之应用的情况。

四、栅中叶型之受力

在平面机翼理论中，对单个翼型的受力我们曾得到库达—茹可夫斯基升力定理。这个结果可以推广到平面叶栅中的叶型受力上去，为此我们来讨论平面直列叶栅的绕流，并对它使用动量定理。

如图14-2a为一被不可压缩流体、稳定流动绕流的平面直列叶栅。栅前、栅后无限远处流速，分别为$\boldsymbol{w}'$与$\boldsymbol{w}''$。坐标系取法如图，y轴与列线平行，x轴与它成右手系。取封闭控制围线$ABCD$：AB、DC为二相邻的相应流线；AD及BC取在栅前、后充分远处并与列线平行，那里流动已趋于均匀。并设流出、流进此控制围线的流量为q_V。

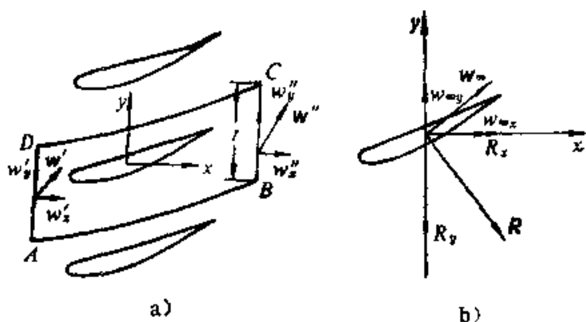


图14-2　栅中叶型之受力

（一）理想流体绕流时之受力

对控制围线内流体列出沿坐标轴方向的动量方程：

$$(p'-p'')t-R_x=\rho q_V(w''_x-w'_x)$$

$$-R_y=\rho q_V(w''_y-w'_y) \tag{a}$$

式中　p'、p''——叶栅前、后充分远处的压力；

R_x、R_y——流体对叶型作用力$\bar{R}$的坐标分量。

由连续性方程得

$$q_V=w'_x t=w''_x t$$

从而

$$w'_x=w''_x=w_x$$

代入方程组(a)：

$$R_x=(p'-p'')t$$

$$-R_y=\rho w_x(w''_y-w'_y)t \tag{b}$$

为进一步改写方程组(b)，在上、下游断面的AD与BC处列出伯努里方程式：

$$p'+\frac{1}{2}\rho(w_x^2+w'^2_y)=p''+\frac{1}{2}\rho(w_x^2+w''^2_y)$$

从而

$$p'-p''=\frac{1}{2}\rho(w''^2_y-w'^2_y)$$

把这结果代进方程组(b)中之第一式中：

$$R_x=\frac{1}{2}\rho(w''^2_y-w'^2_y)t$$

$$R_y=-\rho w_x(w''_y-w'_y)t \tag{c}$$

把上、下游速度的向量平均值，叫做是绕叶栅流动的无穷远来流速度，并用记号w_∞表示：

$$w_\infty = \frac{1}{2}(w' + w'')$$

写成分量则为：

$$w_{\infty x} = w_x$$

$$w_{\infty y} = \frac{1}{2}(w'_y + w''_y)$$

代入方程组(c)得：

$$R_x = \rho w_{\infty y}(w''_y - w'_y)t$$

$$R_y = -\rho w_x(w''_y - w'_y)t \tag{d}$$

计算绕叶型的环量：

$$\begin{aligned}\Gamma &= \oint_{ABCDA} w_s \mathrm{d}s \\ &= \int_{AB} w_s \mathrm{d}s + \int_{BC} w_s \mathrm{d}s + \int_{CD} w_s \mathrm{d}s + \int_{DA} w_s \mathrm{d}s \\ &= \int_{AB} w_s \mathrm{d}s + w''_y \int_{BC} \mathrm{d}y - \int_{DC} w_s \mathrm{d}s - w'_y \int_{AD} \mathrm{d}y \\ &= (w''_y - w'_y)t\end{aligned}$$

把这个结果代进方程组(d)中：

$$\begin{aligned}R_x &= \rho w_{\infty y}\Gamma \\ R_y &= -\rho w_{\infty x}\Gamma\end{aligned} \tag{14-1}$$

式(12-1)即为作用在叶型上的力之两个坐标分量、合力之大小为

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \rho w_\infty \Gamma \tag{14-2}$$

并由于

$$\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{w}_\infty = R_x w_{\infty x} + R_y w_{\infty y} = \rho w_{\infty y}\Gamma w_{\infty x} - \rho w_{\infty x}\Gamma w_{\infty y} = 0$$

可见R与$\boldsymbol{w}_\infty$垂直，结合式(14-1)更可看出R的方向为将$\boldsymbol{w}_\infty$逆环流转90°的方向(参图14-2b)。

如果令相邻两叶片间距离t无限增大，而保持环量不变，则由

$$\Gamma = (w''_y - w'_y)t$$

推知须是

$$w''_y - w'_y \to 0$$

这就是说，留在有限位置上那个叶片前、后充分远处的流速$\boldsymbol{w}'$、$\boldsymbol{w}''$完全一样了。这个离叶片充分远处的流速用$\boldsymbol{w}_\infty$代表，则叶片此时所受升力为$R = \rho w_\infty \Gamma$。因此，孤立翼型绕流，可视为叶栅绕流之一特例（即$t = \infty$时的叶栅绕流）。

（二） 粘性流体绕流时之受力

考虑到流体粘性的作用，栅中叶型受力公式（14-1）须加以修正。

当考虑流体粘性时，上段推导仍旧有效，只是在引用伯努里方程时，应加进水力损失项Δh，则上、下游伯努里方程为

$$p' + \frac{1}{2}\rho(w_x^2 + w'^2_y) = p'' + \frac{1}{2}\rho(w_x^2 + w''^2_y) + \gamma\Delta h$$

即

$$p' - p'' = \frac{1}{2}\rho(w''^2_y - w'^2_y) + \gamma\Delta h$$

代入叶型受力的坐标分量式内得

$$\bar{R}_x = \rho w_{\infty y}\Gamma + \gamma t\Delta h$$
$$\bar{R}_y = -\rho w_{\infty x}\Gamma \qquad (14\text{-}3)$$

受力分量加"—"是为了与理想流体绕流受力相区别。

研究上式可见，液体粘性增加了叶型的轴向分力；表面看来圆周（列线）方向分力公式未变化，实际上粘性对环量有影响，从而粘性与周向分力也是相关联的。这时合力$\bar{R}$也不再与无穷远来流速度w_∞垂直，因此它在垂直与平行来流方向都有分力：$\bar{R}_L$、$\bar{R}_D$。$\bar{R}_L$为与来流方向垂直的分量为叶型的升力；与来流方向平行的分量$\bar{R}_D$为叶型阻力（图14-3）。

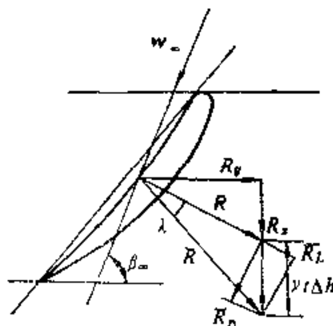


图14-3 粘性流体绕流时的作用力

五、等价平板叶栅

在叶栅计算中，某一叶栅的动力特性之有关数据，常常是通过已被详细地进行过理论分析、并精确掌握其动力性能的另一个所谓等价叶栅而取得的。因此，有必要介绍一下等价叶栅的概念。

栅距相同，但叶型不同的两个叶栅，如果对无论怎样的来流，二栅中之叶型给出的升力都是相等的，则此二叶栅叫做是互为等价的叶栅。任何叶栅都存在与它等价的叶栅，且此等价叶栅的叶型可以完全任意。

（一） 等价平板叶栅总是存在的

任何叶栅都存在由任意叶型组成的、与它等价的叶栅；特别是任何叶栅都能找到与它等价的平板叶栅，这可证明如下：

设在ⓩ平面上给定任一平面直列叶栅，栅距为t并AB与$A'B'$代表栅中任二相邻叶型；取平面右手坐标系，使y轴平行于列线（图14-4a）。设来流沿β_0角方向流来时，叶栅绕流是无环量的，并设对应于来流速度大小为1的、无环量绕流复势为$W=f(z)=\varphi+i\psi$。以$W=f(z)$为保角变换函数，则ⓩ平面上给定的叶栅就变换成ⓦ平面上与实轴φ平行的平板叶栅（图14-4b），设AB与$A'B'$分别为ⓩ平面上二叶型的像。如再利用函数$\zeta=We^{i\beta_0}$作一次转轴变换，则在ⓩ平面上得到与实轴斜交成β_0角的平板叶栅（图14-4c），此栅即为ⓩ平面上原给定叶栅的等价平板叶栅。也就是说它与原叶栅具有相同的栅距t；且无论对怎样的来流，二栅中叶型都将提供相等的升力。

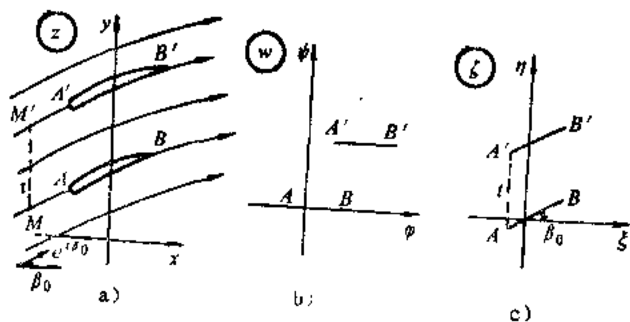


图14-4 叶栅及其等价平板叶栅

为了证明ⓩ上的平板叶栅与ⓩ上原叶栅具有相同栅距t，我们引进同态点概念。在叶栅绕流的流场中，把两个沿列线方向相距若干栅距的点，叫做同态点。因为在这些点的流动状态是相同的，譬如具有相同的流动速度。前缘点A与A'为ⓩ平面上二同态点，其坐标关系为

$$z_{A'} = z_A + ti$$

式中 t——栅距；

i——虚数单位。

在这两点流速应相同

$$f'(z_{A'})=f'(z_A)$$

或积分之后得：

$$f(z_{A'})=f(z_A)+c$$

显然只要计算出常数c，就可以确定出⑩平面上、平板叶栅的栅距。在②平面上距叶栅很远的左前方，取二与A'、A处于相同流线上的同态点M'、M（图14-4a），于是

$$c=f(z_{A'})-f(z_A)=[\varphi(A')-\varphi(A)]+\mathrm{i}[\psi(A')-\psi(A)] \tag{a}$$

但由于势流的特性沿封闭围线的积分有：

$$0=\oint_{AA'M'MA}\mathrm{d}\varphi=\int_{AA'}\mathrm{d}\varphi+\int_{A'M'}\mathrm{d}\varphi+\int_{M'M}\mathrm{d}\varphi+\int_{MA}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\left(\int_A^{A'}\mathrm{d}\varphi-\int_M^{M'}\mathrm{d}\varphi\right)+\left(\int_{A'M'}\mathrm{d}\varphi-\int_{AM}\mathrm{d}\varphi\right)$$

$$=\left(\int_A^{A'}\mathrm{d}\varphi-\int_M^{M'}\mathrm{d}\varphi\right)+0$$

所以

$$\int_A^{A'}\mathrm{d}\varphi=\int_M^{M'}\mathrm{d}\varphi$$

即

$$\varphi(A')-\varphi(A)=\varphi(M')-\varphi(M) \tag{b}$$

再注意A'与M'、A与M处于同一条流线上，则

$$\psi(A')=\psi(M') \qquad \psi(A)=\psi(M)$$

从而

$$\psi(A')-\psi(A)=\psi(M')-\psi(M) \tag{c}$$

把式(b)与(c)代入式(a)得：

$$c=[\varphi(M')-\varphi(M)]+\mathrm{i}[\psi(M')-\psi(M)]$$

$$=\int_M^{M'}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_M^{M'}\frac{\partial\psi}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$=\int_M^{M'}v_y\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_M^{M'}v_x\mathrm{d}y$$

$$=\int_M^{M'}\sin\beta_0\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_M^{M'}\cos\beta_0\mathrm{d}y$$

$$=t\sin\beta_0+\mathrm{i}t\cos\beta_0$$

$$=t\mathrm{i}(\cos\beta_0-\mathrm{i}\sin\beta_0)$$

$$=t\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\beta_0} \tag{d}$$

由式(d)可见⑩平面上平板叶栅之栅距$|f(z_{A'})-f(z_A)|=|c|=|tie^{-\mathrm{i}\beta_0}|=t$，与②平面上原栅距相等、同为$t$。而⑤平面上的板栅，系由⑩平面上板栅经旋转变换得来，因此不会改变点与点之间的距离，从而⑤平面上像点A'与A间距离不变仍保持为t，即⑤上板栅的栅距仍为t。

当来流沿平板方向流来（即来流具有方向角β_0）时，则平板与叶型同时都具有为零的升力。我们还将进一步证明，对任意的来流上述板栅与原叶栅，都将提供相等的升力。而这只要证明，平板和叶型周围会产生相同的环量即可。而这又只需证明对任意的同一个来流绕流它们时，栅后速度是相等的就行了。今有某一来流，设平板后($\zeta=+\infty$)的流动速度为$w''e^{\mathrm{i}\alpha''}$，

绕流复势为$W^*=F(\zeta)$，则②平面上绕叶栅的相应流动的复势应为：

$$W=F[e^{i\beta_0}f(z)]=g(z)$$

由此可以计算⑤平面上板栅后的复速度如下：

$$\left.\frac{dW^*}{d\zeta}\right|_{\zeta=+\infty}=\left.\frac{dF(\zeta)}{d\zeta}\right|_{\zeta=+\infty}=w''e^{-i\alpha''} \quad \text{(e)}$$

而对同一来流②平面上叶栅后的复速度可如下计算：

$$\left.\frac{dW}{dz}\right|_{z=+\infty}=\left.\frac{dg}{dz}\right|_{z=+\infty}=\left[\frac{dF}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz}\right]_{+\infty}=w''e^{-i\alpha''}e^{i\beta_0}\left.\frac{df}{dz}\right|_{z=+\infty} \quad \text{(f)}$$

$$=w''e^{-i\alpha''}e^{i\beta_0}e^{-i\beta_0}=w''e^{-i\alpha''}$$

比较式(e)与式(f)的结果，可以看出：对同一来流，两个叶栅给出相同的栅后流速，即给出相同的绕它们的环量，从而它们将提供相等的升力.这说明,上述保角变换所得到的⑤平面上的平板叶栅，即为②平面上原叶栅的等价平板叶栅。

（二） 等价平板叶栅的构造

由(一)中讨论可知，与某平面直列叶栅等价的平板叶栅具有与原叶栅相同的栅距t；安放角等于原叶栅无环量绕流角β_0；等价栅中板之长度l^*可如下确定：$l^*=\varphi(B)-\varphi(A)$（$\varphi$为原栅无环量绕流速度势函数）。或由升力相等的定义出发确定$C_L^*l^*=C_Ll$，则$l^*=\frac{C_Ll}{C_L^*}$（C_L、C_L^*及l、l^*分别表示原叶栅及等价平板叶栅的升力系数与弦长）。

工程设计中，常采用下述方法近似地确定等价平板叶栅中的板长l^*：过叶型的后缘点B与叶型中线的中点C作一直线BC，再过叶型前缘点A作叶弦的垂线AD与BC交于D点，则AD长即为等价平板的长度l^*（见图14-5）。

由上所述，某直列叶栅在任意绕流情况下，其升力、环量、升力系数等表示动力特性的数据，均可通过其等价平板叶栅来定。而平板叶栅的绕流是已被详尽地研究过，并精确地掌握了的。

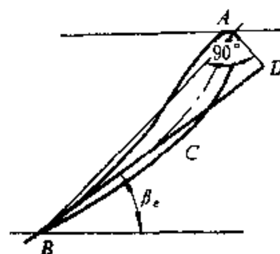


图14-5 等价平板长度作图法

六、栅中流动的特征

（一） 叶栅绕流的一般特征

当叶栅被绕流时，叶型周围的流速分布决定于：栅距、安放角、叶型几何形状和来流的情况。

在栅中叶型的前驻点S_1和后驻点S_2，流速为零。驻点邻近区域中的流速与距驻点的弧长s间呈线性关系。近似地可认为该区域中的速度分布、与一半径等于叶型在驻点S_1、S_2处的曲率半径R_1、R_2的圆柱，被无穷远来流w'，w''分别绕流时，圆柱的前驻点和后驻点邻近的流速分布是一样的。

在前、后驻点附近，叶型围线上分别具有与流速w'和w''平行的切线之点A_1、A_2处的流速会出现极大值。此值一般将大于w'和w''。

在叶间流道内，流速分布取决于流道宽度和叶型围线的曲率。一般说来，流道中靠叶型上弧那边比靠叶型下弧那边的流速要大。对加速（收敛）叶栅(如水轮机叶轮叶栅)，随流道变狭和围线下弧部分曲率的减小而流速愈益增加；对减速（扩散）叶栅（如水泵叶轮叶轮叶栅），则随流道加宽及上弧曲率变小而流速愈益减小。对任何叶栅，在流道出口处，流速近

平均匀分布，且就等于栅后无限远处的流速。

（二） 叶栅绕流与单叶绕流的比较

在与单个叶型绕流相比时，叶栅绕流有下述特征：

1） 孤立的单个叶型，对无穷远处流场的影响，可以用一孤立的附着涡模型来代替。孤立的涡在无穷远处的诱导速度为零，这说明孤立叶型对无穷远流场无影响。

对叶栅来说，为计算它对栅前、后无穷远处流场的影响，须把每个叶型用与它相应强度的附着涡取代，即可以一单排涡列模型，来计算叶栅对栅前，后无穷远处流场的影响。由第十章单排涡列理论知，强度为Γ、间距为t的单排涡列在无穷远处的诱导速度大小$w_t=\frac{\Gamma}{2t}$、方向与涡列平行。这也就是说，叶栅绕流时，栅前、后无限远处的流场是要受叶栅的影响的（参图14-6）。

2） 同一叶型单独绕流和置于叶栅中在同一冲角下被绕流时，其动力特性也不一样。

加速叶栅中叶型，其升力系数大于单独叶型的升力系数；但减速叶栅中的叶型升力系数，则恒小于单独叶型的升力系数，它们的$C_L\sim\alpha$曲线见图14-7。

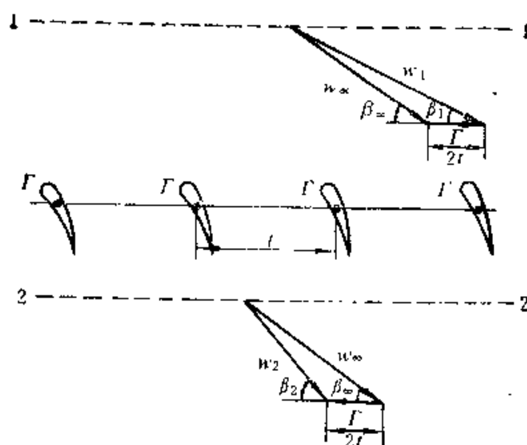


图14-6 叶栅对栅前、后流场的影响

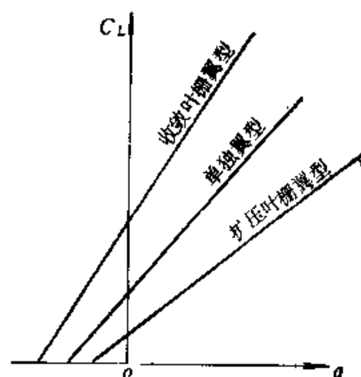


图14-7 栅中叶型与单叶型动力特性比较

第二节 叶栅特征方程

从这一节开始，我们介绍水力机械中的几个主要求解叶栅绕流的方法。这些方法可分成两个大类：实验计算法和解析法，下面先用两节的篇幅介绍实验计算法。所谓实验计算法，就是在通过实验取得某些基本数据的基础上，然后再进行叶栅绕流计算的方法。属于这方面的方法，我们打算介绍两个：特征方程法及升力法。在本节先介绍第一个方法。

栅前流动已知时，则叶栅完全确定了栅后的流动。叶栅能决定栅后流动的这一性能，在水力机械中常通过叶栅特征方程来表示。这一方程是用来分析计算叶栅（从而水力机械）工作性能的重要工具。以下我们就来对各种叶栅分门别类地建立它们的特征方程。

叶栅特征方程是建立在下列实验事实的基础上，即绕叶栅的流动符合迭加原理：如果栅前流动不变方向而加大几倍时，则栅后流动也不会改变方向而加大几倍；并且一般地说来，两个绕叶栅流动的合成流动，仍为一绕此叶栅的流动，合成流动的速度等于分流动在各相应

点速度的几何和。上述实验事实也可如下表述：若$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$为绕某给定叶栅两个定常、有势流场，则$\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{v}_1+b\boldsymbol{v}_2$也必定是绕该叶栅的一个定常、有势流场。

一、不动叶栅的特征方程式

（一） 不动直列叶栅的特征方程

设有二运动互不相似的绕某给定的平面直列叶栅的流动，已测得它们的栅前、后的速度分别为：

1） $\boldsymbol{v}_1'=(v_{1x},\ v_{1y}')$，$\boldsymbol{v}_1''=(v_{1x},\ v_{1y}'')$

2） $\boldsymbol{v}_2'=(v_{2x},\ v_{2y}')$，$\boldsymbol{v}_2''=(v_{2x},\ v_{2y}'')$

若又有另外任一绕此叶栅的流动，只要知道了它栅前的流动，则其栅后的流动就可被解出。

设待求流动之栅前的速度已知$\boldsymbol{v}'=(v_x,\ v_y')$，由于前述两绕流为运动互不相似，则矢量$\boldsymbol{v}_1'$与$\boldsymbol{v}_2'$是线性无关的。因此$\boldsymbol{v}'$可以表示成它们的线性组合：

$$\boldsymbol{v}'=a\boldsymbol{v}_1'+b\boldsymbol{v}_2' \tag{a}$$

式中a、b为二常数系数。根据绕叶栅流动的迭加原理，则待求绕流的栅后速度$\boldsymbol{v}''=(v_x,v_y'')$就应该是

$$\boldsymbol{v}''=a\boldsymbol{v}_1''+b\boldsymbol{v}_2'' \tag{b}$$

由于$\boldsymbol{v}_1''$与$\boldsymbol{v}_2''$为已知的，故为得到待求叶栅绕流的栅后速度$\boldsymbol{v}''$，只要确定$a\boldsymbol{v}_1''$与$b\boldsymbol{v}_2''$，即确定a、b。这可以用图解法，或用解析法，现分述如下。

1． 图解法

以v_x为横轴、v_y为纵轴、o为原点建立平面直角坐标系ov_xv_y。按一定的比例尺、以原点o为始端，作出矢量$\boldsymbol{v}_1'$、$\boldsymbol{v}_1''$和$\boldsymbol{v}_2'$、$\boldsymbol{v}_2''$。根据连续性的要求：

$$v_{1x}'=v_{1x}''=v_{1x}$$

$$v_{2x}'=v_{2x}''=v_{2x}$$

所以矢量$\boldsymbol{v}_1'$与$\boldsymbol{v}_1''$的末端必落在和$\boldsymbol{v}_y$轴平行的同一直线上；同样$\boldsymbol{v}_2'$与$\boldsymbol{v}_2''$的末端也落在和v_y轴平行的同一直线上。

仍从原点o出发作矢量$\boldsymbol{v}'$。过$\boldsymbol{v}'$之末端作直线平行于$\boldsymbol{v}_1'$，此直线与$\boldsymbol{v}_2'$相交得$b\boldsymbol{v}_2'$；过$\boldsymbol{v}'$之末端，作平行于$\boldsymbol{v}_2'$之直线，此直线与$\boldsymbol{v}_1'$相交，可得矢量$a\boldsymbol{v}_1'$(图14-8)。

过矢量$a\boldsymbol{v}_1'$和$b\boldsymbol{v}_2'$之末端，作平行于$\boldsymbol{v}_y$轴之直线，它们分别与$\boldsymbol{v}_1''$和$\boldsymbol{v}_2''$相交并相应得矢量$a\boldsymbol{v}_1''$和$b\boldsymbol{v}_2''$。以$a\boldsymbol{v}_1''$和$b\boldsymbol{v}_2''$为两邻边，作平行四边形，则其对角线就是要求的栅后速度矢量$\boldsymbol{v}''$(图14-8)。

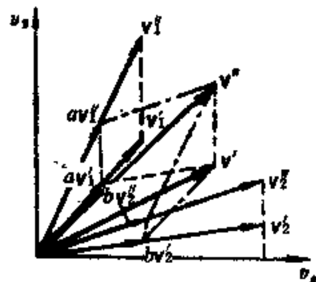


图14-8 栅后流动的图解法

$\boldsymbol{v}''$的大小和方向可由图上定出，系数a、b的值也可由图上确定。因此绕流问题解决。

2． 解析法

把上述二矢量方程式(a)及(b)改写成标量方程，则可得到下列的三个方程：

$$v_x=av_{1x}+bv_{2x}$$

$$v_y'=av_{1y}'+bv_{2y}'$$

$$v_y''=av_{1y}''+bv_{2y}''$$

由前二方程式解出a、b，再把它代入第三方程式中得：

$$v''_y=\frac{\begin{vmatrix}v_x & v_{2x}\\ v'_y & v'_{2y}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}v_{1x} & v_{2x}\\ v'_{1y} & v'_{2y}\end{vmatrix}}v''_{1y}+\frac{\begin{vmatrix}v_{1x} & v_x\\ v'_{1y} & v'_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}v_{1x} & v_{2x}\\ v'_{1y} & v'_{2y}\end{vmatrix}}v''_{2y}$$

经进一步改写后，上式可写成下列形式：

$$v''_y=\frac{\begin{vmatrix}v_{1x} & v_{2x}\\ v''_{1y} & v''_{2y}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}v_{1x} & v_{2x}\\ v'_{1y} & v'_{2y}\end{vmatrix}}v'_y+\frac{\begin{vmatrix}v''_{1y} & v''_{2y}\\ v'_{1y} & v'_{2y}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}v_{1x} & v_{2x}\\ v'_{1y} & v'_{2y}\end{vmatrix}}v_x$$

方程式右端两项的系数，由于事先已测得绕叶栅二流动之栅前、后速度，所以它们是已知的，用字母K及m表之则

$$v''_y=Kv'_y+mv_x \tag{c}$$

式中$K=\frac{\begin{vmatrix}v_{1x} & v_{2x}\\ v''_{1y} & v''_{2y}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}v_{1x} & v_{2x}\\ v'_{1y} & v'_{2y}\end{vmatrix}}$、$m=\frac{\begin{vmatrix}v''_{1y} & v''_{2y}\\ v'_{1y} & v'_{2y}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}v_{1x} & v_{2x}\\ v'_{1y} & v'_{2y}\end{vmatrix}}$。上式即为不动平面直列叶栅特征方程之雏形。

水力机械中习用的是写成环量及流量形式的特征方程，因此尚需进一步改写所得结果。首先，代替系数m引入另一系数i_0，它们间的关系如下：

$$m=(1-K)i_0$$

把m式代入式(c)得：

$$v''_y=Kv'_y+(1-K)i_0v_x$$

其次，设所考察平面直列叶栅，系由轴流式叶轮中半径为r的单位厚圆柱流层所展成，以圆柱周长$2\pi r$同乘上式两边得：

$$2\pi rv''_y=K\ 2\pi rv'_y+(1-K)i_0 2\pi rv_x$$

注意到$\Gamma''=2\pi rv''_y$、$\Gamma'=2\pi rv'_y$和$q_V=2\pi rv_x$分别为栅前、后环量和穿过单位厚圆柱流层的流量。则上式变成

$$\Gamma''=K\Gamma'+(1-K)i_0q_V \tag{14-4}$$

这就是水力机械中，分析不动直列叶栅前、后流动的特征方程式。已知栅前流动时，通过式(14-4)可计算栅后流动。

式(14-4)中系数K、i_0，如前所述，它们可通过测量任意两个、绕给定叶栅的互不运动相似流动之栅前、后的流动而求出。实际上，这是两个依赖于叶栅几何特性的系数。对不同叶栅它们采取不同的值，因此称它们为叶栅特征系数。以下分别讨论它们的物理意义。

设有两个流量相等，绕过同一叶栅的不同流动。对此二流动分别列出它们的特征方程式(14-4)：

$$\Gamma_1''=K\Gamma_1'+(1-K)i_0q_V$$

$$\Gamma_2''=K\Gamma_2'+(1-K)i_0q_V$$

二式相减

$$\Delta\Gamma''=\Gamma_2''-\Gamma_1''=K(\Gamma_2'-\Gamma_1')=K\Delta\Gamma'$$

所以

$$K=\frac{\Delta\Gamma''}{\Delta\Gamma'}$$

这个结果说明：K为在流量不变情况下，当栅前环量有了一个单位变化时，所引起的栅后环量的改变量。当叶栅无限稠密$\left(\frac{l}{t}\to\infty\right)$时，由于此时叶片无限多、无限薄，因而栅中流动完

全被叶片所夹持。不管栅前来流沿什么方向冲向叶栅，而栅后流动将始终沿叶片出口的切线方向流出，从而$\Delta\Gamma''=0$故$K=0$。又当叶栅无限稀疏$\left(\frac{l}{t}\to 0\right)$时，这相当于单个叶片的绕流，栅前、后的流速始终一样。从而有$\Delta\Gamma''=\Delta\Gamma'$故$K=1$。一般情况下$\left(0<\frac{l}{t}<\infty\right)$时，$1>K>0$。由于$K$值大时，叶栅稀疏，其穿透性好；$K$值小时，叶栅稠密，其穿透性差。因此，把$K$称为叶栅的穿透系数。

为探究系数i_0的物理意义，现在来考察一个栅前、后环量相等的叶栅绕流。对这样一个绕流有$\Gamma''=\Gamma'=\Gamma_0$代入特征方程式(14-4)

$$\Gamma_0=K\Gamma_0+(1-K)i_0q_V$$

由此得：

$$i_0=\frac{\Gamma_0}{q_V}=\frac{2\pi rv_{u0}}{2\pi rv_z}=\frac{v_{u0}}{v_z}=\mathrm{tg}\beta_0$$

由于$\Gamma''=\Gamma'$时，绕叶型环量将等于零，从而叶型升力为零。把此种绕叶栅之流动，叫零流动。β_0是零流动的方向角，$i_0=\mathrm{tg}\beta_0$为零流动方向系数，常称它为零向系数（图14-9）。

（二）　不动环列叶栅的特征方程

对于环列叶栅，代替栅前、后的速度，考虑栅前、后的环量及流量时，采用与上述类似的方法，可导出与特征方程式(14-4)完全相同的环列叶栅的特征方程式来。

设有两个绕过给定叶栅的互不运动相似的流动，其栅前、后的流动参数已被测得：其中之一流量为q_{V1}，栅前、后环量为Γ_1'和Γ_1''；第二个绕流流量为q_{V2}，栅前、后的环量为Γ_2'和Γ_2''。今若另外有绕同一叶栅的任意流动，其流量q_V、栅前环量Γ'为已知时，根据迭加原理：

$$q_V=aq_{V1}+bq_{V2}$$
$$\Gamma'=a\Gamma_1'+b\Gamma_2'$$
$$\Gamma''=a\Gamma_1''+b\Gamma_2''$$

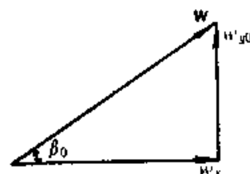


图14-9　零流动与零向系数

经过与直列叶栅类似的处理过程，就可得出与式(14-4)相同形状的环列叶栅特征方程式：

$$\Gamma''=K\Gamma'+(1-K)i_0q_V \tag{14-4)'$$

上方程式中，系数K、i_0具有与直列叶栅时完全相同的意义。

上述不动环列叶栅特征方程，既适合于平面叶栅，也适合于空间叶栅。方程式(14-4)′与方程（14-4）完全一样，这说明方程式(14-4)是适用于一切不动叶栅的特征方程式。

二、运动叶栅的特征方程式

（一）　移动直列叶栅的特征方程式

以等角速ω旋转的轴流式叶轮，当将轮中距转轴为r处之圆柱流层，展成平面直列叶栅时，得到的是以速度$u=r\omega$沿列线方向等速平移的直列叶栅。绕流流场中任意一点的绝对运动，是周期地变化的、不定常运动。但如果取以速度u随叶栅一起等速平移之坐标系时，则相对运动将是定常的，并且由于绕叶轮流动的绝对运动是有势的，牵连运动为等速平移，也是有势的，故相对运动也必然为有势的。

由以上分析可以看出，相对于与栅一起移动的坐标系，绕叶栅流动是既定常又有势的。因此对相对运动可以应用迭加原理。在这里直接引用不动叶栅现成结果式(c)，则

$$w''_y = Kw'_y + (1-K)_{i_0}w_x \tag{d}$$

式中　w——相对速度。

若用v_x、v_y表示绝对速度的坐标分量，则绝对速度与相对速度的关系如下：

$$w''_y = v''_y - u$$
$$w'_y = v'_y - u$$
$$w_x = v_x$$

把这些关系代入式(d)则得：

$$v''_y - u = K(v'_y - u) + (1-K)i_0 v_x$$

改写上式并注意$u = r\omega$　则：

$$v''_y = Kv'_y + (1-K)i_0 v_x + (1-K)r\omega$$

等式双方乘$2\pi r$后上式变成：

$$\Gamma'' = K\Gamma' + (1-K)i_0 q_V + (1-K)2\pi r^2\omega \tag{14-5}$$

上式即为移动直列叶栅之特征方程式。其中r为叶栅圆柱流层所在处半径，ω为叶轮转动角速度，其它各项意义如前。

（二）　转动环列叶栅的特征方程式

最后让我们来建立转动的环列叶栅被液体绕流时，这一最普遍情况下的特征方程式。因为不动叶栅绕流可视为运动叶栅当牵连速度等于零时绕流的特例；而移动直列叶栅绕流，又可视为转动环列叶栅绕流当旋转半径趋向无穷大时的特例。因此，转动的环列叶栅绕流的特征方程式，应是叶栅绕流时的最普遍的特征方程式。

设给定叶栅以定角速度ω旋转，测出某一绕它的S流动的运动参数q_{VS}、Γ'_S、Γ''_S。今有另一绕此栅的流动，已知流量为q_V、栅前环量为Γ'，要求确定栅后环量Γ''。由于在这类叶栅的绕流中，绝对运动是周期性地变化的、不定的；而相对运动虽然定常，但却是有旋的，每一流体质点均存在与叶栅旋转方向相反、角速度大小相等的旋涡运动。所以对相对运动也无法直接引用上面的处理方法及结果。但如果考虑以相同角速度旋转的、同一个叶栅的两个不同绕流时，则此二流动的相对运动之差，既是定常的、又由于旋转部分的互相抵销，故也是无旋的。对此二相对流动之差，则可应用迭加原理及前面不动叶栅的成果了。

基于上述理由，考虑已测出的某一流动S和待求流动两者之相对运动之差，则差流动仍为叶栅的一种绕流运动，且它既有势又定常。若令q_{V0S}、Γ'_{0S}、Γ''_{0S}和$q_{V0}\Gamma'_0$、Γ''_0表示流动S与待求流动之相对运动的流量及栅前、后的环量时，那么差：$q_{V0}-q_{V0S}$、$\Gamma'_0-\Gamma'_{0S}$、$\Gamma''_0-\Gamma''_{0S}$就应满足方程(14-4)′：

$$\Gamma''_0 - \Gamma''_{0S} = K(\Gamma'_0 - \Gamma'_{0S}) + (1-K)i_0(q_{V0} - q_{V0S}) \tag{e}$$

注意绝对运动与相对运动参数间存在下列关系：

$$\Gamma''_0 = \Gamma'' - 2\pi r'' u'' \quad \Gamma'_0 = \Gamma' - 2\pi r' u' \quad q_{V0} = q_V$$
$$\Gamma''_{0S} = \Gamma''_S - 2\pi r'' u'' \quad \Gamma'_{0S} = \Gamma'_S - 2\pi r' u' \quad q_{V0S} = q_{VS}$$

把这些关系代入式(e)中得：

$$\Gamma'' = K\Gamma' + (1-K)i_0 q_V + [\Gamma''_S - K\Gamma'_S - (1-K)i_0 q_{VS}] \tag{f}$$

方括弧中是在定转速ω之下测得的一个常数。从组成方括弧中的几项容易看出，此常数将与叶栅几何特性及转速ω有关。当转速$\omega=0$时，叶栅成为不动环列叶栅，则式(f)应能回到特征方程(14-4)′，即方括弧中常数应为零；但当$\omega\neq0$旋转环列叶栅一般情况下，方括号中常

数不应为零。由此推断此常数应具有$S\omega^n$的形式，则

$$\Gamma''=K\Gamma'+(1-K)i_0q_V+S\omega^n \tag{g}$$

式中　S——与叶栅几何特性有关的常数。

又当叶栅旋转半径趋向无穷大时，旋转环列叶栅变成平移直列叶栅，要求式(g)成为平移直列叶栅的特征方程式(14-5)，这就要求$n=1$，$S=(1-K)2\pi r^2$。但在旋转环列叶栅的一般情形下，人们无法通过解析的办法找出S的表达式，实用上常引入一个与上式结构相似的式子表示S：

$$S=(1-K)2\pi r_a^2 \qquad (r'<r_a<r'')$$

式中　r_a——叶栅的有效半径，一般靠实验测定其值。上述S表达式已经被大量实践所证实。把S式代回式(g)中并注意$n=1$则得：

$$\Gamma''=K\Gamma'+(1-K)i_0q_1+(1-K)2\pi r_a^2\omega \tag{14-6}$$

这就是所求的转动环列叶栅的特征方程式。如为平移直列叶栅，由于此时$r'=r''=r$故$r_a=r$，代入式(14-6)则得到方程式(14-5)；如为不动叶栅$\omega=0$则(14-6)成为(14-4)，所以方程(14-6)是最一般形式的叶栅特征方程。

第三节　解直列叶栅绕流的升力法

当给定叶栅及栅前流动时，应用上述的叶栅特征方程式，可以计算栅后的流动。也就是说，应用叶栅特征方程能解叶栅绕流正问题，但不能用以设计叶栅（反问题）。但升力法可用来解叶栅绕流的反问题，可用于叶栅设计。如给定栅前流动及叶型在叶栅中的受力状况，则应用升力法可设计一能满足给定条件的叶栅。这一方法常用于平面直列叶栅，也就是轴流式水轮机、水泵和贯流式水轮机工作轮叶栅的设计。

升力设计法可简述如下：根据设计所提出的参数H(扬程)、η_{hc}(水力效率)、z(叶片数)、ω(叶轮转速)，经由水力机械泵基本方程，确定出绕叶栅中每个叶型的环量：

$$\Gamma_{Bh}=\frac{2\pi gH}{z\omega\eta_{hc}}$$

再根据Γ_{Bh}推出栅中每一叶型应具有的升力系数值：

$$C_{yBh}=\frac{2\Gamma_{Bh}}{lw_\infty}$$

式中　l——叶型弦长；

w_∞——栅前、后几何平均速度值。

在此基础上选出适合给定情况的翼型（则$C_{y1}=f(\alpha)$曲线也有了），相对栅隔$\frac{t}{l}$是已确定的参数，则须设计的直列叶栅就只剩安放角β_e是待定的了。

β_e设计的来须使栅中叶型能提供上式所要求的升力系数值C_{yBh}。由图14-10可以看出：

$$\beta_e=\beta_\infty+\alpha_{Bh}$$

式中　β_∞——几何平均速度与列线夹角，是个定值；

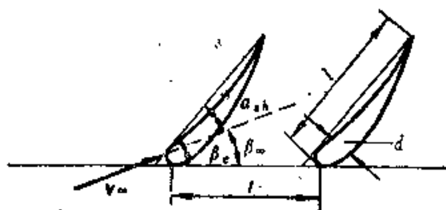


图14-10　叶栅叶型安放角和冲角的关系

α_{Sh}——栅中叶型冲角，是一待定的量。

故安放角β_e为一待定的量，它可被如下确定：对所选翼型，在其叶栅升力系数修正曲线图上，根据叶栅的相对栅距$\frac{t}{l}$及安放角β_e，查出从单个翼型到栅中叶型的升力系数修正值$L=\frac{C_{ySh}}{C_{y1}}$，并由此算出与设计所要求栅型升力系数值C_{ySh}对应的单翼型升力系数的大小$C_{y1}=C_{ySh}/L$再从单翼型$C_{y1}\sim\alpha$曲线上决定翼型应有的冲角大小。所设计的安放角β_e大小，取得来使能保证此冲角，则设计完成。

由上述设计过程看出，在冲角未确定前，安放角β_e是无法决定的，因之也无法求得L等等。全部计算无法一次完成，而须采用逐次逼近法确定安放角β_e。

安放角β_e的逐次逼近求取步骤如下：

1）作为零次近似取$\alpha_{Sh}^{(0)}=0$，则$\beta_e^{(0)}=\beta_\infty$。根据$\beta_e^{(0)}$及$\frac{t}{l}$，在等价平板叶栅的升力系数修正曲线上查取修正系数$L_b^{(0)}$。

2）由于对一般叶栅，尚无升力系数的修正数据，只有平板叶栅有详尽的分析结果，故上面只得到等价板栅的修正数据。为得到叶栅的修正系数，须再进一步修正板栅的数据，即

$$L^{(0)}=mL_b^{(0)}$$

式中m可根据叶型相对厚度$\bar{d}=\frac{d}{l}$由经验公式算出，当$\frac{l}{t}=0.86\sim0.95$时，

$$m=6.7\bar{d}+0.72$$

3）与设计栅型升力系数C_{ySh}，对应的单翼型升力系数，可如下决定：

$$C_{y1}^{(0)}=\frac{C_{ySh}}{L^{(0)}}$$

4）由翼型$C_{y1}\sim\alpha$曲线上查出与$C_{y1}^{(0)}$对应的冲角$\alpha_1^{(0)}$。

5）单个翼型的冲角$\alpha_1^{(0)}$转换成栅中叶型的冲角$\alpha_{Sh}^{(1)}$时，须加进一修正项$\Delta\alpha_0$，则

$$\alpha_{Sh}^{(1)}=\alpha_1^{(0)}+\Delta\alpha_0$$

式中$\Delta\alpha_0$根据叶型相对厚度$\bar{d}$，可按下列经验公式计算，当$\frac{l}{t}=0.86\sim0.95$范围内时：

$$\Delta\alpha_0=-20.8\bar{d}+1.3$$

6）从而一次近似安放角$\beta_e^{(1)}$取为：

$$\beta_e^{(1)}=\beta_\infty+\alpha_{Sh}^{(1)}$$

依此类推，重复步骤1)～6)，可得一序列$\{\beta_e^{(i)}\}=\{\beta_e^{(0)},\ \beta_e^{(1)},\ \beta_e^{(2)},\ \cdots\}$，直至前、后两次算得的$\beta_e^{(i)}$、$\beta_e^{(i+1)}$之差$\Delta\beta_e^{(i)}=\beta_e^{(i+1)}-\beta_e^{(i)}$小于某它许值为止。

上述设计方法，只有当序列$\{\beta_e^{(i)}\}$是收敛的，并且就收敛到与设计升力系数C_{ySh}相应的安放角β_e时，才是有意义的。下面作者给出升力法收敛性的一个理论证明。证明分两步：

一、序列$\{\beta_e^{(i)}\}$是收敛的

（一）$\{\beta_e^{(i)}\}$为一单调上升序列

零次近似取

$$\beta_e^{(0)}=\beta_\infty$$

由上述步骤1)～5)可算出一次近似冲角$\alpha_{Sh}^{(1)}>0$则：

$$\beta_e^{(1)}=\beta_\infty+\alpha_{Sh}^{(1)}$$

显然 $$\beta_e^{(1)}>\beta_e^{(0)}$$

据$\beta_e^{(1)}$、$\beta_e^{(0)}$在板栅修正系数曲线上查得$L_b^{(1)}$、$L_b^{(0)}$并且

$$L_b^{(0)}>L_b^{(1)}$$

由步骤2)算出叶栅修正系数$L^{(0)}$、$L^{(1)}$并且

$$L^{(0)}>L^{(1)}$$

再由步骤3)定出$C_{y1}^{(0)}$与$C_{y1}^{(1)}$，而且

$$C_{y1}^{(0)}<C_{y1}^{(1)}$$

在翼型曲线$C_{y1}\sim\alpha$上查取与$C_{y1}^{(0)}$、$C_{y1}^{(1)}$对应之冲角$\alpha_1^{(0)}$、$\alpha_1^{(1)}$则：

$$\alpha_1^{(0)}<\alpha_1^{(1)}$$

把由5)经验公式算得之$\Delta\alpha_0$，加到$\alpha_1^{(0)}$、$\alpha_1^{(1)}$上，则得栅中叶型之冲角。

$$\alpha_{Sh}^{(1)}=\alpha_1^{(0)}+\Delta\alpha_0$$

$$\alpha_{Sh}^{(2)}=\alpha_1^{(1)}+\Delta\alpha_0$$

显然 $$\alpha_{Sh}^{(1)}<\alpha_{Sh}^{(2)}$$

把$\alpha_{Sh}^{(1)}$与$\alpha_{Sh}^{(2)}$代入6)算式内得$\beta_e^{(1)}$、$\beta_e^{(2)}$，并且

$$\beta_e^{(2)}>\beta_e^{(1)}$$

依此类推，重复步骤1)～6)可得$\beta_e^{(3)}>\beta_e^{(2)}$、$\beta_e^{(4)}>\beta_e^{(3)}\cdots$，一般地有：

$$\beta_e^{(i+1)}>\beta_e^{(i)}\qquad(i=0、1、2、\cdots)$$

这说明序列$\{\beta_e^{(i)}\}$为一单调上升序列。

（二） 序列$\{\beta_e^{(i)}\}$存在上界β_e

首先由取法：$\beta_e^{(0)}=\beta_\infty$，$\beta_e=\beta_\infty+\alpha_{Sh}(\alpha_{Sh}>0)$，其中$\beta_e$就是与设计升力系数$C_{ySh}$对应的安放角，因此由它出发作计算1)～6)时，得到的仍旧是安放角β_e自己。然后，从$\beta_e^{(1)}$、出发经上述1)～6)计算得$\beta_e^{(1)}$。但注意到$\beta_e>\beta_e^{(0)}$，由(一)计算已证明了的：从$\beta_e^{(0)}$及β_e出发算出的结果$\beta_e^{(1)}$和β_e，则

$$\beta_e>\beta_e^{(1)}$$

依此类推可以证明：$\beta_e>\beta_e^{(2)}$、$\beta_e>\beta_e^{(3)}\cdots$。一般地有：

$$\beta_e>\beta_e^{(i)}\qquad(i=0、1、2、\cdots)$$

以上结果说明，β_e为序列$\{\beta_e^{(i)}\}$的一个上界，即序列$\{\beta_e^{(i)}\}$为一有界序列。

综合(一)与(二)知$\{\beta_e^{(i)}\}$为一单调上升有界序列，根据数学分析的极限理论，$\{\beta_e^{(i)}\}$的极限一定存在，也就是说序列$\{\beta_e^{(i)}\}$是收敛的。

二、序列$\{\beta_e^{(i)}\}$的极限就是β_e

首先应注意

$$\beta_e^{(i)}=\beta_\infty+\alpha_{Sh}^{(i)}$$

$$\beta_e=\beta_\infty+\alpha_{Sh}$$

α_{Sh}，β_e为准确地与设计升力系数C_{ySh}对应的栅中叶型的冲角及安放角。为了证明

$$\lim_{i\to\infty}\beta_e^{(i)}=\beta_e$$

则只须证明 $$\lim_{i\to\infty}\alpha_{Sh}^{(i)}=\alpha_{Sh}$$

由一已知$\{\beta_e^{(i)}\}$的极限一定存在，由上面$\beta_e^{(i)}$表达式可以断定序列$\{\alpha_{Sh}^{(i)}\}$的极限也一定存在。现若设其极限为α_{Sh}^l，那末应有下式成立：

$$\lim_{i\to\infty}\alpha_{Sh}^{(i-1)}=\alpha_{Sh}^l$$

$$\lim_{i\to\infty}\alpha_{Sh}^{(i)}=\alpha_{Sh}^l$$

另一方面，由步骤1)～5)倒推可导出

$$\alpha_{Sh}^{(i+1)}=\frac{C_{ySh}}{KmL_b\left(\frac{t}{l},\beta_\infty+\alpha_{Sh}^{(i)}\right)}+\Delta\alpha_0$$

式中　K——$C_{yl}\sim\alpha$曲线工作段的斜率；

L_b——平板叶栅的升力系数修正值；

$\Delta\alpha_0$——栅中叶型冲角修正值由步骤5)知它在整个逼近计算过程中保持不变，为一常数。

当令$i\to\infty$的极限情况下，上式成为：

$$\alpha_{Sh}^l=\frac{C_{ySh}}{KmL_b\left(\frac{t}{l},\beta_\infty+\alpha_{Sh}^l\right)}+\Delta\alpha_0$$

上式说明，α_{Sh}^l是能准确地提供设计所要求的升力系数C_{ySh}的栅中叶型的冲角。因此

$$\alpha_{Sh}^l=\alpha_{Sh}$$

即

$$\lim_{i\to\infty}\alpha_{Sh}^{(i)}=\alpha_{Sh}$$

进而

$$\lim_{i\to\infty}\beta_e^{(i)}=\lim_{i\to\infty}(\beta_\infty+\alpha_{Sh}^{(i)})$$

$$=\beta_\infty+\lim_{i\to\infty}\alpha_{Sh}^{(i)}=\beta_\infty+\alpha_{Sh}=\beta_e$$

可见序列$\{\beta_e^{(i)}\}$的极限就是β_e。这说明，当逼近计算进行下去时，$\beta_e^{(i)}$将越来越趋向能提供设计所要求的升力的栅中叶型安放角β_e。

这就证明了开头所提出的论点：升力设计法计算得到的安放角序列$\{\beta_e^{(i)}\}$，是收敛的并且就收敛到提供设计所要求的升力之安放角。这个证明为轴流式叶轮升力设计法提供了理论依据，并保证了升力设计法的可靠性。

第四节　平面叶栅绕流的保角变换解法

保角变换法可用来解由微弯薄翼或理论翼型所组成的平面叶栅的绕流问题，理论较完善，不需引用经验数据修正。通常用于轴流式水力机械叶轮叶栅的设计。

保角变换法解叶栅绕流问题，根据将叶栅变成的辅助绕流图案的不同，分成：单个圆法、一排圆法与同心圆法。在水力机械中，以采用单个圆法最为普遍。所以，我们将只就单个圆法进行讨论。这里我们将直列叶栅与环列叶栅解法分别介绍如下。

一、平面直列叶栅的保角变换解法

(一)　解题的一般思路

在ⓩ平面上有如图14-11所示之任一平面直列叶栅之绕流，所用标记均如图示。在无穷

ⓩ平面上绕流图案沿列线方向，在宽度为栅隔 t 的带形区域内，是呈周期性重复的。因此，我们只要研究一条(譬如平行实轴而沿列线方向宽度为 t 的)带形区域内的绕流情况，则整个平面上的流动情况也就完全确定了。

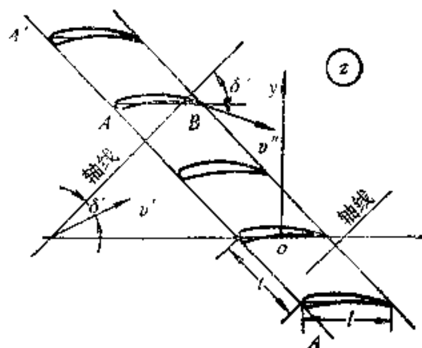


图14-11　ⓩ面上直列叶栅的任意绕流

可以利用保角变换方法，将ⓩ平面上的一条带形区域，变换为另一平面ⓢ的全平面。ⓩ面上带形区域内的叶型，变成ⓢ平面上的单位圆；使ⓩ平面上叶型外的带形区域，变成ⓢ平面上单位圆的外部。于是叶型绕流变成单位圆的绕流，而单位圆之绕流是我们详尽研究过并充分掌握了的。所以，只要找出ⓩ平面和ⓢ平面间变换函数，借助该函数，叶栅绕流情况就可以完全确定。

具体做法通常是：先借助变换函数 $\tau=Ke^{\frac{2\pi}{t}ze^{-i\delta}}$ 将ⓩ平面变换到辅助平面ⓣ，使得ⓩ平面上每一和叶栅轴线平行的、沿列线方向宽为 t 的带形区，变为ⓣ全平面。于是ⓩ平面上叶栅转换成ⓣ平面上单翼，并把叶栅绕流问题转换成单翼绕流的问题。

ⓩ平面上每一带形区域内流动，可以看成是在 $z=-\infty$ 处有一强度为 $q_V=tv'\cos\delta'=tv''\cos\delta''$、$\Gamma'=tv'\sin\delta'$ 的涡源和在 $z=+\infty$ 处有一强度为 $-q_V=-tv''\cos\delta''=-tv'\cos\delta'$、$\Gamma''=tv''\sin\delta''$ 的涡汇对叶型的绕流。由变换函数的性质可知：当 $z=-\infty$ 时 $\tau=0$；当 $z=+\infty$ 时 $\tau=\infty$。所以，转换到ⓣ平面后，就成了在原点有一强度为 Γ'、q_V 的涡源；在无穷远处则有一强度为 Γ''、$-q_V$ 之涡汇对翼型之绕流(图14-12)。

然后、再把ⓣ平面变换到ⓢ平面，使ⓣ平面上单翼变成ⓢ平面上的单位圆；使翼型外部绕流变成单位圆外部绕流。并使 $\tau=0$ 变成 $\zeta=-a^*$；$\tau=\infty$ 变成 $\zeta=+a^*$，而涡源(汇)强度不变。为了使ⓢ平面上流动，成为绕单位圆的流动，应在与点 $\zeta=\pm a^*$ 关于单位圆为对称的圆内点 $\zeta=\pm a$ 处，分别放上强度为 $-\Gamma''$、$-q_V$ 和 $-\Gamma'$、q_V 的涡汇和涡源(参图14-13)。于是，

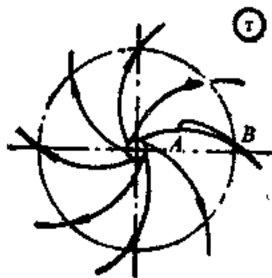


图14-12　ⓣ平面上绕单翼型的流动

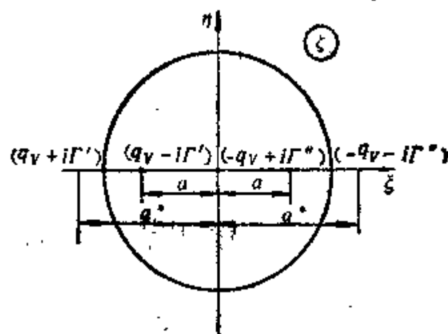


图14-13　单位圆的绕流

ⓢ平面上流动的复势 W_{ζ}^* 便可立即写出：

$$W_{\zeta}^*=\frac{\Gamma'+iq_V}{2\pi i}\ln(\zeta+a^*)-\frac{\Gamma'-iq_V}{2\pi i}\ln(\zeta+a)+\frac{\Gamma''-iq_V}{2\pi i}\ln(\zeta-a)$$

$$-\frac{\Gamma''+iq_V}{2\pi i}\ln(\zeta-a^*) \tag{14-7}$$

从上面可以看到，ⓢ平面上的流动复势很容易写出，如果又能知道变换函数 $\zeta=f(z)$ 就可以把它代入 W_{ζ}^* 而求得ⓩ平面上的流动复势 $W_z=F(z)$。于是ⓩ平面上每点流速通过 W_z 求导得到，整个ⓩ平面上的流动完全确定了。

变换函数 $\zeta=f(z)$ 可如下求得：设法掌握ⓩ平面上的一个流动、写出此流动的复势 W_z；再写出ⓢ平面与此流动相应的ⓢ平面上流动的复势 W_{ζ}，令 $W_z=W_{\zeta}^*$，就可得到变换函数 $\zeta=f(z)$。

（二） 直列平板叶栅解例

1． 平板叶栅到单位圆变换函数的构造

设于ⓩ平面上有一平板叶栅(图14-14a)，它决定于三个参数 l、t、β。为得到把板栅变换成单位圆的变换函数，研究ⓩ平面上绕板栅的一个最简单的流动——无限远处流速大小为1、方向沿平板方向的无环量绕流。由于绕板栅流动的周期性，我们只要研究包含一个平板（如 AB）、沿列线方向宽为一栅隔 t 的带形区域内的流动即可。此带形区的流量及栅前、后环量分别为：

$$q_V=\int_0^t w_x\mathrm{d}y=\int_0^t 1\times\cos\beta\mathrm{d}y=t\cos\beta$$

$$\Gamma=\Gamma'=\Gamma''=\int_0^t w_y\mathrm{d}y=\int_0^t 1\times\sin\beta\mathrm{d}y=t\sin\beta \tag{a}$$

故此带形区内流动，可视为在板前 $z=-\infty$ 处有强度为 Γ、q_V 的涡源，而板后 $z=+\infty$ 处有强度为 $-\Gamma$、$-q_V$ 之涡汇，所形成的绕平板 AB 的流动。此流动之复势容易写出，为

$$W_z=e^{-i\beta}z \tag{14-8}$$

要求待找的变换函数 $z=f(\zeta)$：把ⓩ平面上包含平板 AB 的带形区域变成ⓢ全平面；把 $z=\pm\infty$ 变到 ζ 平面实轴上 $\zeta=\pm R$ 的点；平板 AB 变成单位圆；并注意变换过程中源(汇)涡强度将不变。这么一来 ζ 平面实轴上点 $\xi=\pm R$ 处，分别有一强度为 $\mp\Gamma$、$\mp q_V$ 的涡汇和涡源。因此，为使ⓩ平面上绕平板 AB 的流动、经变换成为 ζ 平面上绕单位圆的流动，则须在点 $\zeta=\pm R$ 关于单位圆为对称的点 $\zeta=\pm\frac{1}{R}$ 处，分别置一强度为 $\pm\Gamma$、$\mp Q$ 的涡汇及涡源（见图14-14b）。这样一来，经我们要找的变换函数 $z=f(\zeta)$ 变换后，ⓩ平面上无环量绕平板 AB 的带形区域内流动，变成ⓢ平面上无环量绕单位圆的全平面上流动(见图14-14)。绕流复位势则由式(14-7)得：

$$W_{\zeta}^*=\frac{\Gamma+iq_V}{2\pi i}\ln(\zeta+R)-\frac{\Gamma-iq_V}{2\pi i}\ln\left(\zeta+\frac{1}{R}\right)+\frac{\Gamma-iq_V}{2\pi i}\ln\left(\zeta-\frac{1}{R}\right)-\frac{\Gamma+iq_V}{2\pi i}\ln(\zeta-R) \tag{b}$$

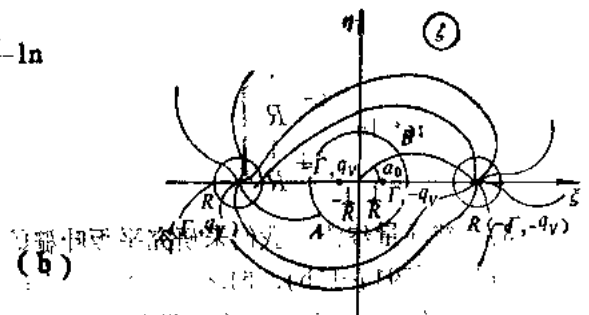


图14-14 平板叶栅绕流变成单位圆绕流

把式(a)中 Γ 代入式(b)内则

$$W_{\zeta}{}^{*}=\frac{t}{2\pi}\left(e^{-i\beta}\ln\frac{R+\zeta}{R-\zeta}-e^{i\beta}\ln\frac{\zeta-\frac{1}{R}}{\zeta+\frac{1}{R}}\right) \tag{14-9}$$

令
$$W_z=W_{\zeta}{}^{*}$$
并把式(14-8)与式(14-9)代入，则变换函数确定：

$$Z=\frac{t}{2\pi}\left(\ln\frac{R+\zeta}{R-\zeta}-e^{2i\beta}\ln\frac{\zeta-\frac{1}{R}}{\zeta+\frac{1}{R}}\right) \tag{14-10}$$

由变换式(14-10)看出，变换依赖于t、β和R，实际上R是依赖于板长l的。计算表明：

$$\frac{l}{t}=\frac{1}{\pi}\left[\cos\beta\ln\frac{1+R^2+2R\cos\alpha_0}{1+R^2-2R\cos\alpha_0}+\sin\beta\,\mathrm{arctg}\frac{2R\sin\alpha_0}{R^2-1}\right]$$

$$\mathrm{tg}\alpha_0=\frac{R^2-1}{R^2+1}\mathrm{tg}\beta$$

式中 α_0——单位圆周上驻点B的极角。由此可见，变换函数是以t、β、l为参数的函数。

2. 绕平板叶栅的几个特殊流动

已经找到了平板叶栅到单位圆的变换函数式(14-10)，绕平板叶栅的任意流动的复势，皆可通过此变换函数，由相应的绕圆流动的复势得出。因此为得到绕板栅流动的解，只要找出相应的绕圆流动的解就行了。

1） 无环量平行绕流 平板叶栅无环量平行绕流时，对应的绕圆流动复势，如上面所得到的为：

$$W_{\zeta}{}^{*}=f_{\parallel}(\zeta)=\frac{t}{2\pi}\left(e^{-i\beta}\ln\frac{R+\zeta}{R-\zeta}-e^{i\beta}\frac{\zeta-\frac{1}{R}}{\zeta+\frac{1}{R}}\right)$$

2） 无环量垂直绕流 在无环量平行绕流中，来流大小为1、方向平行于栅中平板，来流速度用复数表示为$e^{i\beta}$。这时绕流复势，在上面讨论中已得到为$f_{\parallel}(\zeta)$。如来流方向改为垂直于栅中平板(图14-15a)，这时的来流速度为$e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}=-ie^{i\beta}$。无环量垂直绕流的复势，只要在$f_{\parallel}(\zeta)$中用$-ie^{i\beta}$代$e^{i\beta}$、而以$ie^{-i\beta}$代$e^{-i\beta}$即可得到：

$$W_{\zeta}{}^{*}=f_{\perp}(\zeta)=\frac{t}{2\pi}\left(ie^{-i\beta}\ln\frac{R+\zeta}{R-\zeta}+ie^{i\beta}\ln\frac{\zeta-\frac{1}{R}}{\zeta+\frac{1}{R}}\right)$$

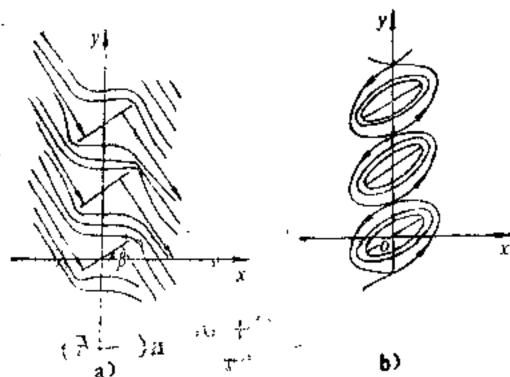


图14-15 平板叶栅的垂直和纯环量绕流

3） 纯环量绕流 我们来研究平板叶栅的纯环量绕流(图14-15b)，即考虑这样一个绕流：$w_x'=w_x''=0$；$w_y'=-w_y''$ 并沿包围单个平

板围线上的环量为 1。由于$\Gamma=(w''_y-w'_y)t=1$，所以

$$
\left.
\begin{aligned}
w'_y&=-\frac{1}{2t}\\
w''_y&=\frac{1}{2t}
\end{aligned}
\right\} \qquad \text{(c)}
$$

与上述②平面上平板叶栅纯环量绕流对应的ⓢ平面绕单位圆的流动中，在点ⓢ$=-R$涡、源的强度分别应为：

$$\Gamma=\int_0^t w'_y\mathrm{d}y=\int_0^t \frac{-1}{2t}\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}$$

$$q_\gamma=\int_0^t w'_x\mathrm{d}y=0$$

类似地在点$\zeta=R$处，涡、汇强度也为$\Gamma=-\frac{1}{2}$及$q_\gamma=0$。因而，在点$\zeta=\pm R$关于单位圆为对称的 点$\zeta=\pm\frac{1}{R}$处，应置以$\Gamma=\frac{1}{2}$、$q_\gamma=0$的涡源(汇)，才能使ⓢ面成为绕单位圆流动。因此，对应于②平面上平板叶栅的纯环量绕流、在ⓢ平面上绕单位圆流动的复势可写成：

$$W^*_\zeta=f_\gamma(\zeta)=\frac{-\frac{1}{2}}{2\pi i}\ln(\zeta+R)+\frac{\frac{1}{2}}{2\pi i}\ln\left(\zeta+\frac{1}{R}\right)+\frac{\frac{1}{2}}{2\pi i}\ln\left(\zeta-\frac{1}{R}\right)$$

$$+\frac{-\frac{1}{2}}{2\pi i}\ln(\zeta-R)$$

或在复势式中略去常数项后成为：

$$W^*_\zeta=f_\gamma(\zeta)=\frac{-1}{4\pi i}\ln\frac{(R+\zeta)(R-\zeta)}{\left(\zeta+\frac{1}{R}\right)\left(\zeta-\frac{1}{R}\right)}$$

3．平板叶栅的任意绕流

在上述平板叶栅特殊绕流讨论的基础上，我们可以进一步考虑平板叶栅任意绕流问题的求解了，也就是确定板栅任意绕流的复势。

设有绕过平板叶栅的任一流动，栅前、后流速各为$\boldsymbol{w}'$、$\boldsymbol{w}''$，几何平均速度则为$W=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{w}'+\boldsymbol{w}''\right)$、它对平板的冲角记为$\delta$并设绕单个平板环量为$\Gamma$。

把$\boldsymbol{w}_\infty$分解成平行与垂直栅中平板的两个分量：$w_\infty\cos\delta$、$w_\infty\sin\delta$。令以二分速度绕板栅流动时，在ⓢ平面上对应流动的复势应记成：$w_\infty\cos\delta f_{/\!/}$、$-w_\infty\sin\delta f_\perp$。$f_{/\!/}$、$f_\perp$表示式如前；第二个复势前的负号，是由于现垂直来流方向与前述相反之故。把绕板栅强度为Γ的纯环量流动，所对应的ⓢ平面上流动复势应为Γf_γ。根据势流迭加原理，此平板叶栅任意绕流对应的ⓢ平面上的复势可写出如下：

$$W^*_\zeta=f(\zeta)=w_\infty\cos\delta f_{/\!/}-w_\infty\sin\delta f_\perp+\Gamma f_\gamma \qquad (14-11)$$

式(14－11)即为平板叶栅任意绕流情况下、在辅助流动平面ⓢ上、对应的绕单位圆流动

的复势函数。式(14-11)与式(14-10)联合消掉变数ζ，则可得物理平面②上、绕平板直列叶栅的流动复势函数，式中Γ可通过茹可夫斯基假设确定。至此，任意绕平板直列叶栅的流动问题，完全解决了。

4．栅中平板环量的确定

如果我们只对叶栅总动力特性感兴趣，则可通过确定绕平板的环量而求得平板所受的升力。

根据茹可夫斯基假定，平板在尾缘B速度应为有限，即

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_B=\text{有限}$$

即
$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_B=\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right]_B=\text{有限}\tag{d}$$

变换函数$z=e^{i\beta}f_{11}$，在B点不保角，故其导数应等于零。

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\right|_B=\left[e^{i\beta}\frac{\mathrm{d}f_{/\!/}}{\mathrm{d}\zeta}\right]_B=0$$

从而推出
$$\left.\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right|_B=\infty，\left.\frac{\mathrm{d}f_{/\!/}}{\mathrm{d}\zeta}\right|_B=0$$

把第一式代入式(d)可以推出：

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\right|_B=0\tag{e}$$

把式(14-11)代入式(e)并注意上述第二等式则：

$$-w_\infty\sin\delta\left(\frac{\mathrm{d}f_\perp}{\mathrm{d}\zeta}\right)_B+\Gamma\left(\frac{\mathrm{d}f_\gamma}{\mathrm{d}\zeta}\right)_B=0$$

把2中所得的$f_\perp$与f_γ的表示式代入，并用B点在⑤平面单位圆上像点的坐标$\zeta=e^{i\alpha_0}$代入，可求得栅中平板的环量：

$$\Gamma_{sh}=-\frac{4w_\infty tR\sin\delta\cos\alpha_0}{(R^2+1)\cos\beta}\tag{14-12}$$

当单个平板被绕流时，如在第十三章第五节所得到的结果

$$\Gamma_1=-\pi lw_\infty\sin\delta$$

我们用L表示环量比值则：

$$L=\frac{\Gamma_{sh}}{\Gamma_1}=\frac{4tR}{\pi l(R^2+1)}\cdot\frac{\cos\alpha_0}{\cos\beta}\tag{14-13}$$

如前所述，R与α_0是依赖于相对栅隔$\frac{t}{l}$与安放角β的，所以归根结底比值L是$\frac{t}{l}$和β的函数。图14-16中绘出了$L=L\left(\frac{t}{l},\beta\right)$关系曲线，在水力机械设计中常用到此曲线。

从总动力特性来讲，由于任何平面直列叶栅都存在与其等价的平板叶栅，所以任何叶型叶栅的绕流，从理论上也已解决。因此，平板叶栅绕流问题的解决，具有重要理论意义。平

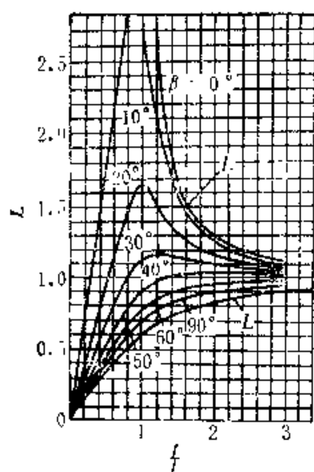


图14-16 L 随 $\frac{t}{l}$ 和β的变化曲线

板叶栅绕流结果，也常被工程设计人员所引用（如用升力法设计轴流式叶轮时）。故平板叶栅绕流的解，还具有很大实际意义。

二、平面环列叶栅的保角变换解法

设在Ⓩ平面上，有如图14-17所示的、由n个叶片所组成的环列叶栅，被在圆心处之涡源及在无穷远处的涡汇流动所绕流，要求确定绕流流场。

可以看出，在整个物理平面Ⓩ上，流动沿圆周呈周期性重复。如果我们将Ⓩ平面分成n个张角均为$\frac{2\pi}{n}$之扇形区时，那么任一扇形区内之流动情况都和其它扇形区内情况完全相同。故只要详尽地研究一个扇形区内的流动情况，就可掌握全平面上的流动情况了。

可借助于变换函数$\tau=z'^n$将Ⓩ平面上，每一张角为$\frac{2\pi}{n}$之扇形区，变换为Ⓣ全平面。于是Ⓩ平面上的环列叶栅变成了Ⓣ平面上一单翼，环列叶栅的绕流问题，也转换成单翼的绕流问题了（图14-18）。

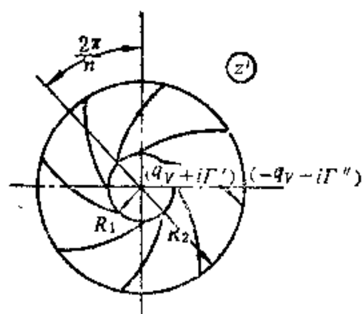


图14-17　平面任意环列叶栅的绕流

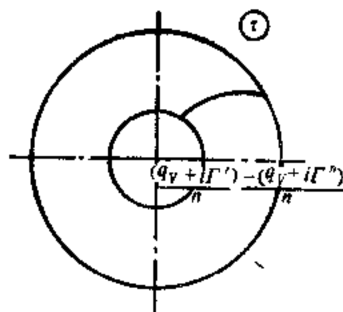


图14-18　Ⓣ平面上的单翼绕流

如果在Ⓩ平面上，原点处涡、源强度为Γ'，q_V；无限远处涡，汇的强度为$-\Gamma''$、$-q_V$则在$\tau=z'^n$变换下，则Ⓣ平面上出现原点有强度为$\frac{\Gamma'}{n}$、$\frac{q_V}{n}$的涡源，并在无穷远有强度为$\frac{-\Gamma''}{n}$、$\frac{-q_V}{n}$涡汇的绕过单个翼型的流动。

可以看出，在解平面直列叶栅过程中，我们将Ⓩ平面变到Ⓣ平面时，也得到和现在一样的Ⓣ平面上的单个翼型绕流。所以，自然想到先将环列叶栅变为直列叶栅、以后解题路线就和上述直列叶栅解题路线全同了。

将环列叶栅变为直列叶栅的变换函数，可如下构造出来：既然环列叶栅和直列叶栅，变到Ⓣ平面上时图形相同，则

$$z'^n=\tau=Ke^{\frac{2\pi}{t}ze^{-i\theta}}$$

双边取对数后得：

$$n \ln z' = \frac{2\pi}{t} z e^{-i\theta} + 常数$$

变换函数允许相差一常数，故上式改写成：

$$n \ln z' = \frac{2\pi}{t} z e^{-i\theta}$$

或把环列叶栅变成直列叶栅的变换函数，最后写成：

$$z = \frac{nt}{2\pi} e^{i\theta} \ln z' \tag{14-14}$$

若把式(14-14)代入平面直列叶栅的各结果公式中，则就可得出平面环列叶栅绕流的各相应解答。

第五节　平面叶栅绕流的奇点分布解法

解平面叶栅绕流的解析方法，除去保角变换法，还有基于势流迭加原理的奇点分布解法。这类方法可用来解无限薄及有限厚叶型叶栅绕流的正、反问题。在很多场合，奇点分布法表现得相当简洁和有效，故在水轮机与水泵的产品设计中均有所应用。在这一节，我们介绍由无限薄叶型组成的叶栅绕流正、反问题的解法。通过求解过程，说明奇点分布法的解题路线及其特点。

薄叶型叶栅的奇点分布解法是薄翼奇点分布解法的直接推广。完全类似，想象地把叶栅从流场里抽去，它对流场的扰动则用连续分布于原栅中叶型处的奇点——点涡——之作用来代替。代替后的奇点诱导流场与无穷远来流合成的流场应与原真实流场全同。根据原流场内栅中叶型应为一条流线的条件，则可作出以奇点分布规律为核的积分方程式来。在解正问题时，根据边界条件来解积分方程，求出奇点分布规律，进而获得绕流流场的解。解反问题则是根据对叶栅的技术要求和经验统计资料，予先给定奇点分布规律，运用逐次逼近法以作出符合要求绕流条件的叶栅。不论解正问题、还是解反问题，均以奇点诱导流场计算为基础，故拟先讨论奇点诱导流场的计算，然后求解叶栅绕流问题。以下分别讨论直列及环列叶栅的绕流。

一、直列叶栅绕流的解法

(一)　诱导速度的计算

1．诱导速度计算公式的导出

对无限薄叶型栅格，类似薄翼，每一栅中叶型均可按某一定规律 $\gamma(s)$ 沿叶型弧长 s，连续分布的旋涡层来代替它（图14-19)。为计算这些涡层在平面上任一点处的诱导流速，取定栅型中某一个为基本参考叶型，并给它以标号“0”。其左和右之叶型则分别标以…、-2、-1、1、2、…。

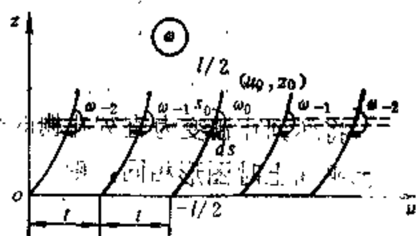


图14-19　栅中涡层分布图

用平行于叶栅列线的一系列直线分割栅中涡层，则每两根相邻直线将切割出与列线平行的一系列涡层微段。每一涡层微段的旋涡强度为旋涡密度 γ 与微段弧长 ds 之积：γds，这么一来每两根相邻直

线，切割出的涡层微段系列，皆可视为一个强度 γds 集中在微段中点、间隔为 t 的无穷涡列。以下就从这些涡列出发，来计算涡层的诱导流场。

把基本叶型0之中点取为沿叶型弧的曲线坐标之原点，叶型0上任一点的曲线坐标记为 s_0。另外，把整个叶栅所在复平面记为Ⓦ，并根据专业习惯实轴与纵轴分别记为 u、z（见图14-19）。现考虑基本叶型0上一点 s_0（复坐标 ω_0），该点旋涡密度 $\gamma(s_0)$，包含此点的微元弧段 ds_0 之旋涡强度为 $\gamma(s_0)ds_0$，则此涡层微段在平面上任一点 ω 处的复势为 $\frac{\gamma(s_0)ds_0}{2\pi i}\ln(\omega-\omega_0)$。其它叶型上与 ω_0 处于同一列的各相应点的坐标为 $\omega_{-j}=\omega_0-jt$、$\omega_j=\omega_0+jt$（$j=1$、2、…）（图14-19），包含它们的微元涡层在平面上点 ω 处的复势则为 $\frac{\gamma(s_0)ds_0}{2\pi i}\ln(\omega-\omega_{-j})$ 和 $\frac{\gamma(s_0)ds_0}{2\pi i}\ln(\omega-\omega_j)$。上述这些微元涡层所形成的、平行 u 轴的无穷涡列，它在平面上点 ω 处的复势，由迭加原理应为：

$$W(\omega)=\frac{\gamma(s_0)ds_0}{2\pi i}\left[\ln(\omega-\omega_0)+\sum_{j=-\infty}^{\infty}\ln(\omega-\omega_j)\right]$$

$$=\frac{\gamma(s_0)ds_0}{2\pi i}\ln\left[\sin\frac{\pi}{t}(\omega-\omega_0)\right] \tag{a}$$

上述复势求导可得复速度

$$dv_u-idv_z=d\bar{v}=\frac{dW}{d\omega}=\frac{\gamma(s_0)ds_0}{2ti}\frac{\cos\frac{\pi}{t}(\omega-\omega_0)}{\sin\frac{\pi}{t}(\omega-\omega_0)}$$

或根据三角函数和双曲函数的关系改写成：

$$dv_u-idv_z=\frac{\gamma(s_0)ds_0}{2ti}\frac{\sin\frac{2\pi}{t}(u-u_0)-i\,\mathrm{sh}\frac{2\pi}{t}(z-z_0)}{\mathrm{ch}\frac{2\pi}{t}(z-z_0)-\cos\frac{2\pi}{t}(u-u_0)}$$

分开实部与虚部可得：

$$dv_u=-\frac{\gamma(s_0)ds_0}{2t}\frac{\mathrm{sh}\frac{2\pi}{t}(z-z_0)}{\mathrm{ch}\frac{2\pi}{t}(z-z_0)-\cos\frac{2\pi}{t}(u-u_0)}$$

$$dv_z=\frac{\gamma(s_0)ds_0}{2t}\frac{\sin\frac{2\pi}{t}(u-u_0)}{\mathrm{ch}\frac{2\pi}{t}(z-z_0)-\cos\frac{2\pi}{t}(u-u_0)} \tag{b}$$

这是以基本叶型上点 s_0（复坐标 $\omega_0=u_0+iz_0$）为标帜的涡列，在平面上任意一点 $\omega=u+iz$，所诱导的速度。那么分割涡层栅形成的所有无穷涡列在 ω 点处的总诱导速度，即为把式(b)沿叶型从 $\frac{-l}{2}$ 至 $\frac{l}{2}$（l 为叶型弧长）积分：

$$v_u = \frac{-1}{2t}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \gamma(s_0)\frac{\operatorname{sh}\frac{2\pi}{t}(z-z_0)}{\operatorname{ch}\frac{2\pi}{t}(z-z_0)-\cos\frac{2\pi}{t}(u-u_0)}\,ds_0$$

$$v_z = \frac{1}{2t}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \gamma(s_0)\frac{\sin\frac{2\pi}{t}(u-u_0)}{\operatorname{ch}\frac{2\pi}{t}(z-z_0)-\cos\frac{2\pi}{t}(u-u_0)}\,ds_0$$

最后，根据专业习用符号：把待求速度点记为（u_0，z_0），而把沿叶型弧的积分变量取为(u，z) 及 s，则诱导速度公式为：

$$v_u = \frac{1}{2t}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\operatorname{sh}\frac{2\pi}{t}(z-z_0)}{\operatorname{ch}\frac{2\pi}{t}(z-z_0)-\cos\frac{2\pi}{t}(u-u_0)}\gamma(s)ds$$

$$v_z = \frac{-1}{2t}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\sin\frac{2\pi}{t}(u-u_0)}{\operatorname{ch}\frac{2\pi}{t}(z-z_0)-\cos\frac{2\pi}{t}(u-u_0)}\gamma(s)ds \qquad (14\text{-}15)$$

式中$\gamma(s)$逆时针取正值；顺时针则取负值。上式即为代替栅中叶型的所有涡层，在平面上任意一点（u_0，z_0）处所诱导的速度。

2．栅中叶型上诱导速度的计算

在实际计算时，往往是要计算叶型弧上的速度分布。但当待求速度点（u_0，z_0）在叶型弧上时，积分变量取过该点的情况下，积分（14-15）中被积函数将成为$\frac{0}{0}$的不定形式，这使积分无法进行。为了避免这一困难，可将诱导速度 v_u、v_z 分成两部分计算：基本叶型上涡层，对位于其本身上的点 s_0 处的诱导速度 v_{1u}、v_{1z}；基本叶型以外的涡层，对基本叶型上 s_0 点的诱导速度 v_{2u}、v_{2z}，亦即

$$v_u = v_{1u} + v_{2u}$$
$$v_z = v_{1z} + v_{2z}$$

（1） v_{1u}、v_{1z} 的计算　图14-20a为栅中基本叶型，叶型上点 s 处涡层在其上 s_0 点的诱导速度记为 dv_{1u}，整个基本叶型上涡层在 s_0 点的诱导速度则可按下式计算：

$$v_{1u} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dv_{1u} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\gamma(s)ds}{2\pi|s_0 s|}\cos(v_1, u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\gamma(s)ds}{|s_0 s|}\sin(\overline{s_0 s}, u)$$

$$(14\text{-}16)$$

$$v_{1z} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dv_1 z = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\gamma(s)ds}{2\pi|s_0 s|}\sin(v_1, u) = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\gamma(s)ds}{|s_0 s|}\cos(\overline{s_0 s}, u)$$

或

$$v_{1u} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{z-z_0}{(u-u_0)^2+(z-z_0)^2}\gamma(s)ds \qquad (14\text{-}16)'$$

$$v_{1z}=\frac{-1}{2\pi}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{u-u_0}{(u-u_0)^2+(z-z_0)^2}\gamma(s)\mathrm{d}s$$

上式中 $\gamma(s)$ 逆时针为正，顺时针为负。

基本叶型上的涡层，在其自身上某点的诱导速度之切线与法线分量 v_{1s}、v_{1n} 也常用到，下面给出它们的算式。考虑到水力机械叶型只有微小弯度，叶型弧近似可处理作直线（图14-20b），则沿叶型切线与法线方向之速度为：

$$v_{1s}=\mp\frac{\gamma(s_0)}{2}$$

$$v_{1n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{\gamma(s)\mathrm{d}s}{|s_0-s|} \tag{14-17}$$

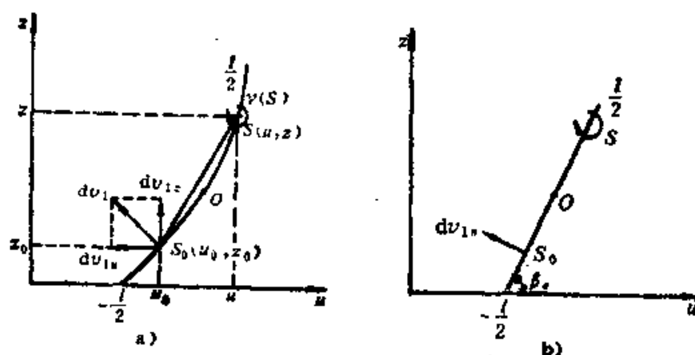


图14-20 基本叶型上诱导速度之计算

对直线叶型诱导速度的坐标分量式(14-16)可改写成：

$$\left.\begin{aligned}v_{1u}&=\frac{\sin\beta_e}{2\pi}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{\gamma(s)\mathrm{d}s}{|s_0-s|}\\v_{1z}&=\frac{-\cos\beta_e}{2\pi}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{\gamma(s)\mathrm{d}s}{|s_0-s|}\end{aligned}\right\} \tag{14-18}$$

式(14—18)中β_e为叶型安放角。

（2） v_{2u}、v_{2z} 的计算　其它叶型上涡层，在基本叶型上的 $s_0(u_0,z_0)$处的诱导速度为：

$$v_{2u}=v_u-v_{1u},\quad v_{2z}=v_z-v_{1z}$$

将式（14 15）与式（14-16）代入则得：

$$v_{2u}=\frac{1}{t}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\left\{\frac{1}{2}\frac{\mathrm{sh}\frac{2\pi}{t}(z-z_0)}{\mathrm{ch}\frac{2\pi}{t}(z-z_0)-\cos\frac{2\pi}{t}(u-u_0)}-\frac{t}{2\pi}\frac{z-z_0}{(u-u_0)^2+(z-z_0)^2}\right\}\gamma(s)\mathrm{d}s$$

$$v_{2z}=\frac{1}{t}\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}\left\{-\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{2\pi}{t}(u-u_0)}{\operatorname{ch}\frac{2\pi}{t}(z-z_0)-\cos\frac{2\pi}{t}(u-u_0)}+\frac{t}{2\pi}\frac{u-u_0}{(u-u_0)^2+(z-z_0)^2}\right\}\gamma(s)\mathrm{d}s$$

或可改写成下列形式：

$$v_{2u}=\frac{1}{t}\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}a(s_0,\ s)\ \gamma(s)\mathrm{d}s$$

$$v_{2z}=\frac{1}{t}\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}b(s_0,s)\ \gamma(s)\mathrm{d}s \tag{14-19}$$

$$a(s_0;\ s)=\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh}\frac{2\pi}{t}(z-z_0)}{\operatorname{ch}\frac{2\pi}{t}(z-z_0)-\cos\frac{2\pi}{t}(u-u_0)}-\frac{t}{2\pi}\frac{z-z_0}{(u-u_0)^2+(z-z_0)^2}$$

$$b(s_0;\ s)=\frac{-1}{2}\frac{\sin\frac{2\pi}{t}(u-u_0)}{\operatorname{ch}\frac{2\pi}{t}(z-z_0)-\cos\frac{2\pi}{t}(u-u_0)}+\frac{t}{2\pi}\frac{u-u_0}{(u-u_0)^2+(z-z_0)^2}$$

式 (14-19) 即为计算 v_{2u} 与 v_{2z} 的公式。式中函数 $a(s_0;\ s)$、$b(s_0;\ s)$ 的值仅与旋涡点 s 和待求速度点 s_0 的坐标相对值及涡列间距 t 的大小有关。

把诱导速度 v_u、v_z 分成两部分：$v_u=v_{1u}+v_{2u}$，$v_z=v_{1z}+v_{2z}$，而$(v_{1u},\ v_{1z})$、$(v_{2u},\ v_{2z})$分别按式(14-18)、式(14-19)计算。作上述处理后，式(14-15)计算时，被积函数成为不定的困难可以避免了。这是因为式(14-19)中被积函数 $a(s_0;\ s)$、$b(s_0;\ s)$，当 $s\to s_0$ 时不再趋向 $\frac{0}{0}$、而是趋向零了。这只要注意三角函数及双曲函数的级数展开，以及当 $s\to s_0$ 时它们的近似表示式：

$$\operatorname{sh}\frac{2\pi}{t}(z-z_0)=\frac{2\pi}{t}(z-z_0)+\frac{1}{3!}\left[\frac{2\pi}{t}(z-z_0)\right]^3+\frac{1}{5!}\left[\frac{2\pi}{t}(z-z_0)\right]^5+\cdots$$

$$\approx\frac{2\pi}{t}(z-z_0)$$

$$\operatorname{ch}\frac{2\pi}{t}(z-z_0)=1+\frac{1}{2!}\left[\frac{2\pi}{t}(z-z_0)\right]^2+\frac{1}{4!}\left[\frac{2\pi}{t}(z-z_0)\right]^4+\cdots$$

$$\approx1+\frac{1}{2!}\left[\frac{2\pi}{t}(z-z_0)\right]^2$$

$$\sin\frac{2\pi}{t}(u-u_0)=\frac{2\pi}{t}(u-u_0)-\frac{1}{3!}\left[\frac{2\pi}{t}(u-u_0)\right]^3+\frac{1}{5!}\left[\frac{2\pi}{t}(u-u_0)\right]^5-\cdots$$

$$\approx\frac{2\pi}{t}(u-u_0)$$

流体力学赵

$$\cos\frac{2\pi}{t}(u-u_0)=1-\frac{1}{2!}\left[\frac{2\pi}{t}(u-u_0)\right]^2+\frac{1}{4!}\left[\frac{2\pi}{t}(u-u_0)\right]^4-\cdots$$

$$\approx 1-\frac{1}{2!}\left[\frac{2\pi}{t}(u-u_0)\right]^2$$

将它们的近似式分别代入 $a(s_0, s)$ 与 $b(s_0, s)$ 则

$$a(s_0; s)\approx\frac{1}{2}\frac{\frac{2\pi}{t}(z-z_0)}{\left\{1+\frac{1}{2!}\left[\frac{2\pi}{t}(z-z_0)\right]^2\right\}-\left\{1-\frac{1}{2!}\left[\frac{2\pi}{t}(u-u_0)\right]^2\right\}}$$

$$-\frac{t}{2\pi}\frac{z-z_0}{(u-u_0)^2+(z-z_0)^2}$$

$$=\frac{t}{2\pi}\frac{z-z_0}{(z-z_0)^2+(u-u_0)^2}-\frac{t}{2\pi}\frac{z-z_0}{(u-u_0)^2+(z-z_0)^2}$$

同理可得：

$$b(s_0; s)=-\frac{t}{2\pi}\frac{u-u_0}{(z-z_0)^2+(u-u_0)^2}+\frac{t}{2\pi}\frac{u-u_0}{(u-u_0)^2+(z-z_0)^2}$$

由 $a(s_0; s)$ 与 $b(s_0; s)$ 的上述表达式不难看出，当 $s\to s_0$ 时函数 $a(s_0; s)$、$b(s_0; s)$ 均趋向零。

根据上面的讨论，叶型弧上任意一点，其两侧的速度组成可总结如下：

1） 无穷远来流速度 $\boldsymbol{w}_\infty$；

2） 基本叶型上涡层所引起的诱导速度 $\boldsymbol{v}_1$：其沿叶型弧切线及法线方向的分量为 (v_{1s}, v_{1n})，可近似按式(14-17)计算；其坐标轴方向之分量则为 (v_{1u}, v_{1z})，可近似按式(14-18)计算；

3） 栅中其它叶型上涡层所引起的诱导速度 $\boldsymbol{v}_2$，它的坐标轴方向分量 (v_{2u}, v_{2z})，可按式(14-19)计算；

4） 由所求速度点处旋涡，在叶型弧两边产生的切向诱导速度 $\boldsymbol{v}_s$，它可按式(9-9)计算：$v_s=\mp\frac{\gamma(s_0)}{2}$。

（二） 薄叶型直列叶栅绕流的解法

在上述涡层诱导流场计算的基础上，现在可以进而讨论叶栅绕流的问题了。苏联学者列索兴根据薄叶型栅绕流的边界条件，建立了包含旋涡分布规律为核的积分方程式。西蒙诺夫曾用此关系式求出了无限薄、小曲率叶型栅绕流正问题的解。他还曾用逐次逼近的办法（列索兴—西蒙诺夫法），给出了设计薄叶型栅的方法。下面就来分别介绍解正，反问题的西蒙诺夫方法。

1． 解反问题的列索兴—西蒙诺夫方法

用奇点分布设计直列微弯薄叶型栅的方法，属于理论解析法的范畴。用此法进行设计时，下列条件是已给定的：

1） 叶栅稠密度 $\frac{l}{t}$；

2） 叶片数 z；

3） 无穷远来流速度 $\boldsymbol{w}_\infty$；

4） 绕栅中叶型的环量 Γ。

要求确定能保证绕叶型环量Γ的叶型形状，及其在叶栅中的安放角。

设计所要求叶栅的奇点分布法是：首先，选定旋涡分布规律$\gamma(s)$，使其能保证所要求的绕叶型环量Γ；进而确定叶型形状及其安放角，使按选定的规律$\gamma(s)$沿叶型布置旋涡后，在诱导流与无穷远来流的合成流场中，流速能与叶型表面相切，即

$$\mathrm{tg}\beta=\frac{w_z}{w_u}=\frac{w_{\infty z}+v_{1z}+v_{2z}}{w_{\infty u}+v_{1u}+v_{2u}} \tag{14-20}$$

式中 β ——叶型弧线之切线对u坐标轴的倾角。

分布在叶型上计算点s_0处的旋涡诱导速度v_s，不影响β角的计算故未纳入式（14-20）中。式(14-20)是包含$\gamma(s)$为核的积分方程，可用来解叶栅绕流的正、反问题。它是用奇点分布法解叶栅绕流的基本方程。

由所述方法可知，为设计叶栅须计算合成流场，要计算合成流场则须先计算涡层诱导速度场，而为要计算诱导速度场则又必须先给定叶型形状及其安放位置，即须先给定叶栅。因此计算无法一次完成，须采用逐次逼近的方法。具体计算过程可分以下几步进行：

1） 旋涡分布规律$\gamma(s)$的选定；

2） 诱导速度的计算；

3） 给定第一次近似叶型及叶栅；

4） 确定第二次近似叶型及叶栅。

现将上列四步分别讨论如下：

（1） 旋涡分布规律$\gamma(s)$的选定 鉴于解薄翼绕流的奇点分布法，沿翼型旋涡的分布规律可展成傅里哀级数形式（13-17）：

$$\gamma(\theta)=A_0\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin k\theta \qquad (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

级数中变量θ与沿翼型曲线的弧坐标变量s之间，存在关系$s=\frac{l}{2}\cos\theta\left(-\frac{l}{2}\leqslant s\leqslant\frac{l}{2}\right)$。如回到弧坐标表示则：

$$\gamma(s)=A_0\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2s}{l}\right)}{1-\left(\frac{2s}{l}\right)}}+A_1\sqrt{1-\left(\frac{2s}{l}\right)^2}+2A_2\left(\frac{2s}{l}\right)\sqrt{1-\left(\frac{2s}{l}\right)^2}+\cdots$$

在用奇点分布法解叶栅绕流时，沿栅型的旋涡分布规律仍可采用上列级数形式表示。这时绕每一栅型的环量，如同薄翼时一样仍为

$$\Gamma=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\gamma(s)\mathrm{d}s=\frac{\pi l}{2}\left(A_0+\frac{A_1}{2}\right) \tag{14-21}$$

由式（14-21）可见，绕栅型环量仅与$\gamma(s)$展式中前二项的系数A_0、A_1有关。这表明其它项并不影响环量的大小，而仅仅影响速度、压力的分布。

绕栅型的环量Γ只依赖于$\gamma(s)$展式中前二项的系数这件事，与薄翼绕流时一样。通过对薄翼绕流奇点分布法的讨论知道，$\gamma(s)$展式中第一项$A_0\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2s}{l}\right)}{1-\left(\frac{2s}{l}\right)}}$代表平板的有冲角绕流；

济付大学走

第二项 $A_1\sqrt{1-\left(\frac{2s}{l}\right)^2}$ 代表抛物线翼型的无冲角绕流；而它们的和 $A_0\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2s}{l}\right)}{1-\left(\frac{2s}{l}\right)}}+$ $A_1\sqrt{1-\left(\frac{2s}{l}\right)^2}$ 则代表有冲角的曲线翼型绕流。所以在 $\gamma(s)$ 展式中即使只取头两项，只要适当调整 A_0、A_1 的值，则既可保证绕翼型的一定环量；又可得到性能良好的翼型。

处于栅中的叶型被绕流时，虽然在一定程度上改变了单翼的结果，但并不影响绕流的质的方面。因此在解叶栅绕流时，$\gamma(s)$ 仍旧可以采取两项的形式，令

$$\gamma(s)=A_0\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2s}{l}\right)}{1-\left(\frac{2s}{l}\right)}}+A_1\sqrt{1-\left(\frac{2s}{l}\right)^2} \tag{14-22}$$

这么一来，在保持 Γ 一定大小的前提下，相对地取大 A_0 则得冲角大、弯度小的曲线栅型绕流；而把 A_1 取大时，则可得冲角小而弯度大的曲线栅型的绕流。故 $\gamma(s)$ 取为式(14-22)，只要适当调整 A_0、A_1 两个系数，则可既保证 Γ 的一定大小，并能取得最有利的栅型弧线形状。

（2） 诱导速度计算 分布在基本叶型上的涡层，对其上 s_0 点的诱导速度 v_1，当把叶型近似按直线叶型处理时，v_1 的坐标轴分量可用式(14-18)计算。将上面所选定的旋涡分布规律式(14-22)，代入式(14-18)积分得：

$$\left.\begin{aligned} v_{1u}&=-\left(\frac{A_0}{2}-A_1\frac{s_0}{l}\right)\sin\beta_e \\ v_{1z}&=\left(\frac{A_0}{2}-A_1\frac{s_0}{l}\right)\cos\beta_e \end{aligned}\right\} \tag{14-23}$$

基本叶型外其它涡层，在基本叶型上 s_0 点的诱导速度 v_2，则可按式(14-19)计算。把式(14-22)代进式(14-19)积分得到：

$$v_{2u}=\frac{1}{t}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}a(s_0,s)\left[A_0\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2s}{l}\right)}{1-\left(\frac{2s}{l}\right)}}+A_1\sqrt{1-\left(\frac{2s}{l}\right)^2}\right]ds$$

令 $\bar{s}=\frac{2s}{l}$ 做积分变量的代换后，并给被积函数乘以 $\frac{\sqrt{1-\bar{s}^2}}{\sqrt{1-\bar{s}^2}}$ 则上式成为：

$$v_{2u}=\frac{l}{2t}\int_{-1}^{1}\frac{a(\bar{s}_0,\bar{s})[A_0(1+\bar{s})+A_1(1-\bar{s}^2)]}{\sqrt{1-\bar{s}^2}}d\bar{s} \tag{c}$$

可以利用聂泊姆宁雷数值积分公式，对上式进行数值计算。对六个等分段计算时，该公式具有下列形式：

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(\bar{s})}{\sqrt{1-\bar{s}^2}}d\bar{s}=\frac{\pi}{1280}\left[167f(-1)+378f\left(-\frac{2}{3}\right)-135f\left(-\frac{1}{3}\right)\right.$$
$$\left.+460f(0)-135f\left(\frac{1}{3}\right)+378f\left(\frac{2}{3}\right)+167f(1)\right] \tag{d}$$

现在我们将叶型弧线等分成六段，利用聂泊姆宁雷积分公式(d)，对式(c)进行数值积分得下列第一式并同理得下列第二式：

$$v_{2u}=\frac{\pi l A_0}{2560t}\left[126a\left(\bar{s}_0;\ -\frac{2}{3}\right)-90a\left(\bar{s}_0;\ -\frac{1}{3}\right)+460a(\bar{s}_0;0)\right.$$

$$\left.-180a\left(\bar{s}_0;\ \frac{1}{3}\right)+630a\left(\bar{s}_0;\ \frac{2}{3}\right)+334a(\bar{s}_0;1)\right]$$

$$+\frac{\pi l A_1}{2560t}\left[210a\left(\bar{s}_0;\ -\frac{2}{3}\right)-120a\left(\bar{s}_0;\ \frac{-1}{3}\right)+460a(\bar{s}_0;0)\right.$$

$$\left.-120a\left(\bar{s}_0;\ \frac{1}{3}\right)+210a\left(\bar{s}_0;\ \frac{2}{3}\right)\right] \tag{14-24}$$

$$v_{2z}=\frac{\pi l A_0}{2560t}\left[126b\left(\bar{s}_0;\ \frac{-2}{3}\right)-90b\left(\bar{s}_0;\ \frac{-1}{3}\right)+460b(\bar{s}_0;0)\right.$$

$$\left.-180b\left(\bar{s}_0;\ \frac{1}{3}\right)+630b\left(\bar{s}_0;\ \frac{2}{3}\right)+334b(\bar{s}_0;1)\right]$$

$$+\frac{\pi l A_1}{2560t}\left[210b\left(\bar{s}_0;\ \frac{-2}{3}\right)-120b\left(\bar{s}_0;\ \frac{-1}{3}\right)+460b(\bar{s}_0;0)\right.$$

$$\left.-120b\left(\bar{s}_0;\ \frac{1}{3}\right)+210b\left(\bar{s}_0;\ \frac{2}{3}\right)\right]$$

式(14-24)中之 $a(\bar{s}_0;\ \bar{s})$，$b(\bar{s}_0;\ \bar{s})$ 表示 $\bar{s}$ 处涡列对 $\bar{s}_0$ 处诱导速度之作用因子。它虽可经式（14-19）中之相应公式来算其值，但实用上常借用西蒙诺夫之诺模图(图14-21)来确定 $a(\bar{s}_0;\bar{s})$ 和 $b(\bar{s}_0;\bar{s})$ 在各点之值。可按下列办法在诺模图 14-21 上确定 $a(\bar{s}_0;\ \bar{s})$、$b(\bar{s}_0;\bar{s})$ 之值：将绘制之叶栅的栅距缩成诺模图上之栅距 t，把按同样比例被缩小后的叶片上之涡点 $\bar{s}$，放在图之原点（涡点）上，并使列线与图上横轴平行、叶型与图上点涡方向一致，则与待求速度点 $\bar{s}_0$ 重合处的诺模图上值，即为所求的 $a(\bar{s}_0;\bar{s})$ 与 $b(\bar{s}_0;\bar{s})$ 值。如遇把 $\bar{s}$ 放在图上原点时，$\bar{s}_0$ 已越出图线范围，则可把图转过180°，在 $\bar{s}_0$ 所落下处查取 a、b 值，但须改变符号。

（3） 给定第一次近似叶型与叶栅　在逼近计算中，第一次近似叶栅作为计算的出发点可取为平板叶栅。板长 l 及栅距 t 应和设计时定出的叶型弦长与栅距相同；平板叶型的安放角 β_e：

$$\beta_e=\beta_\infty-\alpha \tag{e}$$

式中　β_∞——无穷远来流对 u 轴的倾角；α——来流对叶型的冲角（见图14-22）。α 之大小，在实际计算时可根据经验取定。为保证叶栅绕流有良好的性能，冲角 α 不宜过大，一般不超过8°～10°。

从第十三章第五节单独平板绕流时的解例知道，如冲角 α 不大时平板产生的环量应为：$\pi l w_\infty \alpha$。处于叶栅中之平板，由于平板间的相互影响，其环量为：

$$\Gamma'=\pi l w_\infty \alpha L \tag{f}$$

式中 $L=L\left(\frac{t}{l},\ \beta_e\right)$ 为一修正系数，可由图14-16曲线查得。另一方面，绕现栅中平板的环量可近似地取为：

$$\Gamma'=\frac{\pi l}{2}A_0 \tag{g}$$

比较（f）、(g)两式可得：

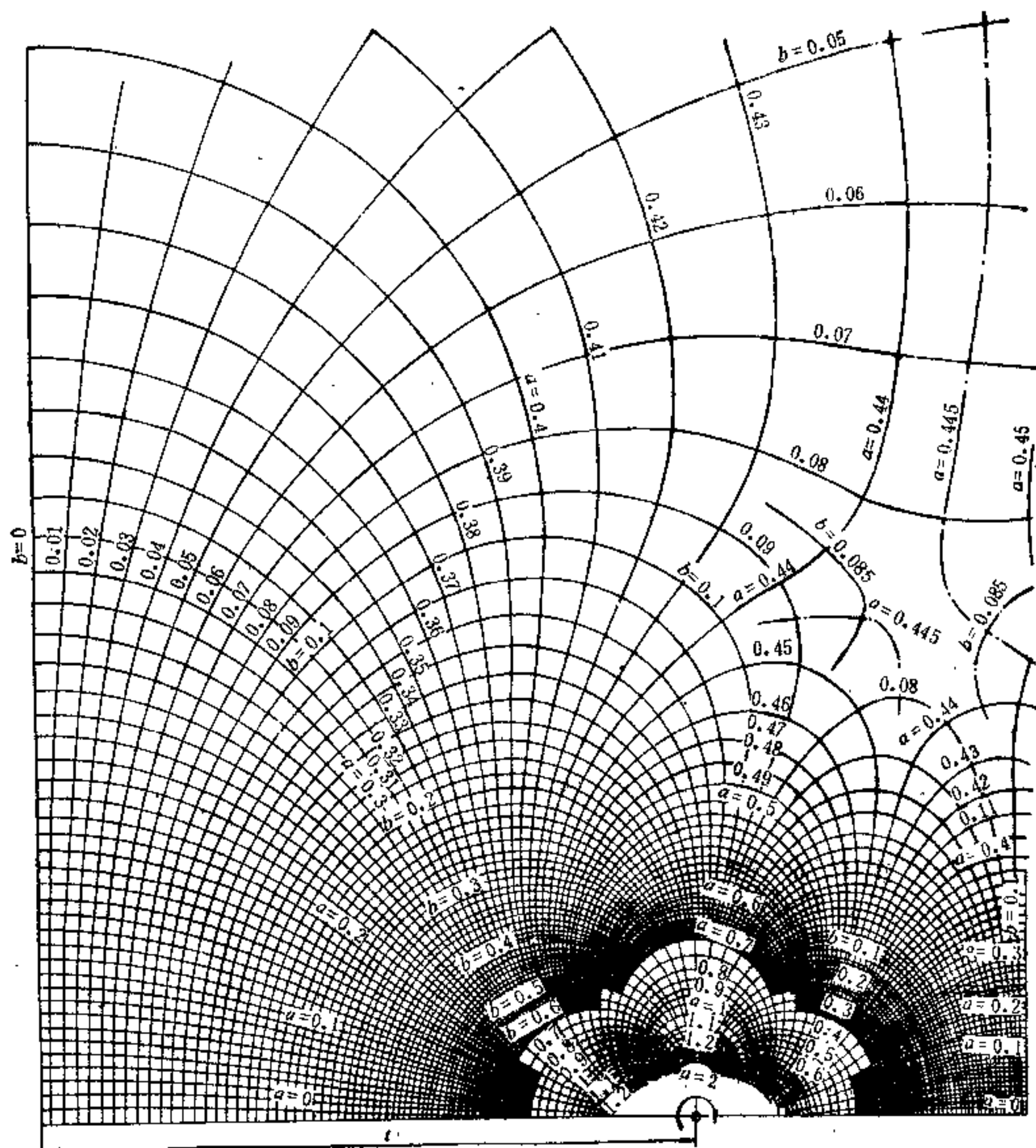


图14-21 $a(\xi_0;\ \xi)$、$b(\xi_0;\ \xi)$ 诺模图

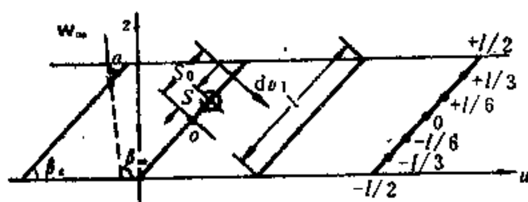


图14-22 第一次近似的平板叶栅

$$\alpha = \frac{A_0}{2Lw_\infty} \tag{14-25}$$

取定冲角α后，由式 (e) 栅板安放角β_e可以确定；根据β_e及$\frac{t}{l}$则可查取相应的修正系数值L。把α与L代入式 (14-25)，则可近似计算出A_0值：

$$A_0 = 2Lw_\infty\alpha$$

把A_0值代进式 (14-21)，就可确定系数A_1的值，即

$$A_1 = 2\left(\frac{2L}{\pi L} - A_0\right)$$

这么一来，计算式(14-22)、式(14-23)与式(14-24)中的系数A_0、A_1才被确定。诱导速度v_1、v_2的计算也才能付诸实现，为做逼近计算作好准备。

（4） 确定第二次近似叶型与叶栅通过式(14-20)可计算栅型曲线上任一点的切线方向，由此即可绘制出栅型曲线。具体步骤可分述如下：

1） 按(3)中所述做出平板叶栅，作为求作叶栅的第一次近似。

2） 将上述栅型直线用分点0、1、2、3、4、5、6等分成六段，每段长$\frac{l}{6}$（图14-22)。

3） 按式(14-23)、式(14-24)算出各分点处的诱导速度，并代入式(14-20)定出各分点处叶型曲线的切向角$\beta_i(i=0、1、\cdots、6)$。

4） 算出下列角的算术平均值：

$$\beta_{0-1}=\frac{1}{2}(\beta_0+\beta_1)、\ \beta_{1-2}=\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\cdots、\beta_{5-6}=\frac{1}{2}(\beta_5+\beta_6)$$

5） 过o点按倾角β_{0-1}作直线，并在其上截取线段$l_{0-1'}=\frac{l}{6}$得点$1'$；再过$1'$点按倾角β_{1-2}作直线，并截取线段$l_{1'-2'}=\frac{l}{6}$得点$2'$；依此类推可得折线$0-1'-2'-\cdots-6'$。

6） 作与折线各段$0-1'$、$1'-2'$、$\cdots5'-6'$之中点相切的光滑曲线，即得叶型的第二次近似曲线（图14-23)。

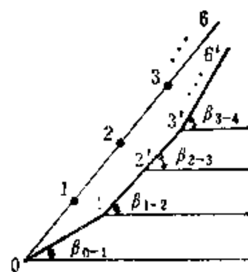


图14-23 第二次近似叶型曲线

上述作出的叶型总体构成第二次近似叶栅。在第二次近似叶栅基础上，重复类似步骤可求取第三、四、…次近似，直到满意为止。水机叶栅计算经验表明，进行了第二次近似即可达到足够精度，而只在个别剧烈弯曲叶型的情况下，才需转入第三次近似。

按以上步骤设计出的是代表无限薄叶型的叶型弧线——骨线，实用上尚须根据强度要求予以加厚。

上述设计由无限薄叶型组成的直列叶栅的列索兴—西蒙诺夫方法，由于为简化计算而引进的条件（如不考虑厚度的影响、假定叶型曲率很小等)，致使在应用上有它的局限性。特别是这种方法不能计算实际叶型表面的速度分布，因而不能在设计中考虑汽蚀的要求。

列索兴曾发展了无厚直列叶栅的设计方法，给出了有限厚叶型直列叶栅的设计方法。此时，沿叶型骨线除了布置总强度等于绕叶型环量的旋涡外，尚须在骨线上安置总强度为零的源、汇系。这么一来，可使奇点诱导流与无穷远来流迭加后，在骨线周围形成一根封闭流线。只要奇点分布选择得当，就可使此封闭流线与有厚栅型形状一样，同时使二绕流流场也相同。二方法比较：前一方法较为简便；但后一方法则更完善，在设计中它可同时考虑对叶栅的汽蚀要求。尽管如此，但如果叶栅设计任务中，主要在于保证功率及转速，而对汽蚀性能要求不高的话，用前一方法也可得出满意结果。所以无厚叶栅计算方法至今仍在应用。

2． 解正问题的西蒙诺夫方法

在上述反问题解法的基础上，下面简要介绍一下解薄叶型绕流正问题的西蒙诺夫方法。这时问题的提法是：栅距t、叶型弧长l、安放角β_e、弧线形状及来流w_∞都已给定，要求叶栅

绕流流场：

$$w=w_\infty+v$$

上式中w_∞为已知，v是涡层诱导流速为待定。从式(14-15)知道，要求v须计算包含旋涡分布规律$\gamma(s)$为被积函数的积分。因此，要计算诱导流速v(从而合成流速w)，关键在于确定旋涡分布规律$\gamma(s)$。$\gamma(s)$可展成级数，所以只要设法确定各展开项的系数，而各系数则可根据绕流条件来确定。以下就来说明确定系数的具体步骤：

（1） 根据实际所需要的精度，取定$\gamma(s)$展式中的项数。比如可取五个组成项：

$$\gamma(\bar{s})=A_0\sqrt{\frac{1+\bar{s}}{1-\bar{s}}}+A_1\sqrt{1-\bar{s}^2}+2A_2\bar{s}\sqrt{1-\bar{s}^2}+A_3(4\bar{s}^2-1)\sqrt{1-\bar{s}^2}+A_4 4\bar{s}(2\bar{s}^2-1)\sqrt{1-\bar{s}^2}$$

式中 $\bar{s}=\frac{2s}{l}$。

（2） 计算叶型弧线上点s_0处的速度v_{1n}、v_{2u}与v_{2z}

$$v_{1n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\gamma(\bar{s})\mathrm{d}\bar{s}}{\bar{s}_0-\bar{s}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[-A_0+A_1\bar{s}_0+A_2(2\bar{s}_0^2-1)+A_3(4\bar{s}_0^3-3\bar{s}_0)+A_4(8\bar{s}_0^4-8\bar{s}_0^2+1)\right]$$

$$v_{2u}=\frac{l}{2t}\int_{-1}^{+1}a(\bar{s}_0;\ \bar{s})\gamma(\bar{s})\mathrm{d}\bar{s}$$

$$=\frac{\pi l}{2560t}\Big\{334A_0a(\bar{s}_0;\ 1)+[630A_0+210A_1+280A_2+163.3A_3-62.2A_4]a\left(\bar{s}_0;\ \frac{2}{3}\right)+[-180A_0-120A_1-80A_2+66.7A_3+124.4A_4]a\left(\bar{s}_0;\ \frac{1}{3}\right)+[460A_0+460A_1-460A_3]a(\bar{s}_0;\ 0)+[-90A_0-120A_1+80A_2+66.7A_3-124.4A_4]a\left(\bar{s}_0;\ -\frac{1}{3}\right)+[126A_0+210A_1-280A_2+163.3A_3+62.2A_4]a\left(\bar{s}_0;\ -\frac{2}{3}\right)\Big\}$$

把上式中$a(\bar{s}_0;\ \bar{s})$换成$b(\bar{s}_0;\ \bar{s})$就得到v_{2z}的计算公式。

（3） 所有速度在叶型弧线任一点法线方向投影之和应为零。根据这个绕流条件可以建立下列方程：

$$w_\infty\sin(\beta_\infty-\beta)+v_{1n}+v_{2u}\sin\beta-v_{2z}\cos\beta=0$$

式中 β——叶型弧线任一点之切线的倾角。

把(2)中v_{1n}、v_{2u}与v_{2z}代入(3)中方程，则得包含A_0、A_1、A_2、A_3、A_4五个未知数的线代数方程。沿叶型弧线取五个不同的点，从而得s_0五个不同的相应值，代入上方程则可得五个线代数方程。

(4) 解上述五个线代数方程的联立方程组，则系数A_0、A_1、A_2、A_3、A_4可被确定，从而$\gamma(s)$被求出。

本方法可应用于求定非计算工况下，绕水机叶片的环量，或用于轴向导水机构的研究。

二、环列叶栅的绕流计算

本节讨论不动的平面环列叶栅的绕流问题，这类流动出现在水机的径向导水机构中。这里只介绍平面环列叶栅绕流的奇点分布解法，叶栅不动且叶型无限薄。不动环列叶栅绕流解法的讨论，将为计算转动环列叶栅绕流奠定基础。

(一) 诱导速度的计算

图 14-24 为一静止平面环列叶栅，叶型数目为z。叶型上任意点的切线与径向线间夹角记作β，并称为叶型角。为研究绕叶栅的平面流动，沿轴向取单位厚度流层，通过此流层的流量设为q_v。

抽掉栅中叶型，用沿叶型弧线的涡层代替它们，并且沿涡层旋涡分布规律记为$\gamma(s)$。用圆心在旋转轴上、半径为 $R(R_2\leqslant R\leqslant R_1$，$R_1$、$R_2$为叶栅的进、出口半径）的一系列同心圆分割叶栅，将每一叶型分成N个微段。其中第K微段，长度ds_K、平均半径R_K，则该段的旋涡强度$\mu_k=\gamma(R_K,\phi_K)ds_k$. 这么一来，每两个相邻的分割圆之间包含的$z$个涡层微段，可视为均布在半径为$R_K$的圆周上、强度为$\mu_K$的一个环形涡列（参图14-24）。

利用保角变换函数：

$$\zeta=\left(\frac{R}{R_K}\right)^z e^{iz(\phi-\phi_K)}$$

则R—ϕ平面上的上述环形涡列，变成落在$\zeta=+1$处、强度为μ_k的一个涡，而R—ϕ平面上有阴线的扇形区则变成ζ全平面（图14-25）。

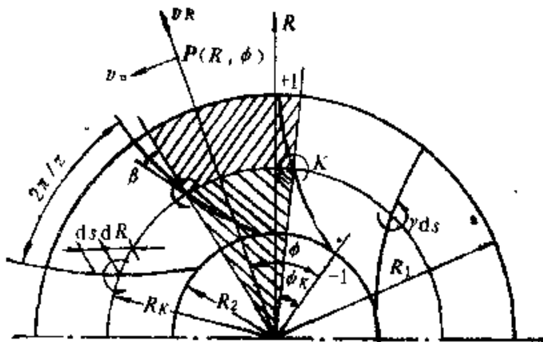


图14-24 平面环列叶栅的绕流

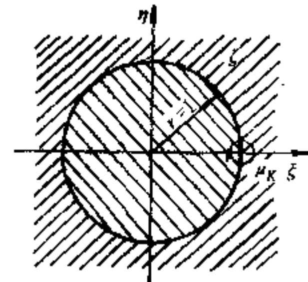


图14-25 环形涡列在ζ平面上的映象

在ζ平面上单涡所引起的流动之复位势为：

$$W^*(\zeta)=-\frac{i\mu_K}{2\pi}\ln(\zeta-1)$$

把ζ代以变换关系式，则可导出R-ϕ平面上环形涡列所引起流动之复势函数：

$$W(R,\phi)=\frac{\eta_k}{2\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{\left(\frac{R}{R_K}\right)^z\sin z(\phi-\phi_k)}{\left(\frac{R}{R_K}\right)^z\cos z(\phi-\phi_K)-1}\right.$$

$$\left.-i\ln\sqrt{\left(\frac{R}{R_K}\right)^{2z}-2\left(\frac{R}{R_K}\right)^z\cos z(\phi-\phi_K)+1}\right]$$

复势函数之虚部即为环形涡列流动的流函数：

$$\psi_K=-\frac{\mu_K}{4\pi}\ln\left[\left(\frac{R}{R_K}\right)^{2z}-2\left(\frac{R}{R_K}\right)^{z}\cos z(\phi-\phi_K)+1\right]$$

对流函数ψ_K求导，可得环形涡列的诱导速度：

$$v_{uK}=-\frac{\partial\psi_K}{\partial R}=\frac{z\mu_K}{4\pi R}\left[1-\frac{\left(\frac{R_K}{R}\right)^{-z}-\left(\frac{R_K}{R}\right)}{\left(\frac{R_K}{R}\right)^{z}+\left(\frac{R_K}{R}\right)^{-z}-2\cos z(\phi-\phi_K)}\right]$$

$$v_{RK}=\frac{\partial\psi_K}{R\partial\phi}=-\frac{z\mu_K}{2\pi R}\frac{\sin z(\phi-\phi_K)}{\left(\frac{R_K}{R}\right)^{z}+\left(\frac{R_K}{R}\right)^{-z}-2\cos z(\phi-\phi_K)}$$

或改写成

$$v_{uK}=\frac{z\mu_K}{4\pi R}(1-F_u)$$
$$v_{RK}=-\frac{z\mu_K}{2\pi R}F_R \tag{14-26}$$

$$F_u=\frac{\left(\frac{R_K}{R}\right)^{z}-\left(\frac{R_K}{R}\right)^{-z}}{\left(\frac{R_K}{R}\right)^{z}+\left(\frac{R_K}{R}\right)^{-z}-2\cos z(\phi-\phi_K)}$$
$$F_R=\frac{\sin z(\phi-\phi_K)}{\left(\frac{R_K}{R}\right)^{z}+\left(\frac{R_K}{R}\right)^{-z}-2\cos z(\phi-\phi_K)} \tag{14-27}$$

式 (14-26)为与基本参考叶型上第K段涡层所对应的环形涡列的诱导速度公式。如果将上式沿基本叶型（标号"0"）由出口至进口积分，即可得栅中所有涡层对平面上任一点P (R、ϕ) 的诱导速度v_u与v_R了。

$$v_u=\int_{R_2}^{R_1}\frac{z\mu_0}{4\pi R}(1-F_u)$$

$$v_R=-\int_{R_2}^{R_1}\frac{z\mu_0}{2\pi R}F_R$$

式中F_u、F_R均沿基本叶型取值，并且

$$\mu_0=\gamma(R_0)\mathrm{d}s_0=\gamma(R_0)\frac{\mathrm{d}R_0}{\cos\beta_0}$$

代入上式中得

$$v_u=\int_{R_2}^{R_1}\frac{z\gamma(R_0)}{4\pi R\cos\beta_0}(1-F_u)\mathrm{d}R_0$$

$$v_R=-\int_{R_2}^{R_1}\frac{z\gamma(R_0)}{2\pi R\cos\beta_0}F_R\mathrm{d}R_0$$

根据习惯，把待求速度点坐标加下标"0"，而积分变量取消下标则上式可写成

$$v_u=\int_{R_2}^{R_1}\frac{z\gamma(R)}{4\pi R_0\cos\beta}(1-F_u)\mathrm{d}R$$

$$v_R=-\int_{R_2}^{R_1}\frac{z\gamma(R)}{2\pi R_0\cos\beta}F_R\mathrm{d}R \tag{14-28}$$

$$F_u=\frac{\left(\frac{R}{R_0}\right)^z-\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-z}}{\left(\frac{R}{R_0}\right)^z+\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-z}-2\cos z(\phi_0-\phi)}$$

$$F_R=\frac{\sin z(\phi_0-\phi)}{\left(\frac{R}{R_0}\right)^z+\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-z}-2\cos z(\phi_0-\phi)} \tag{14-29}$$

在式（14-28）积分号下γ逆时针为正、顺时针为负。

（二）薄叶型环列叶栅绕流解法

设环列叶栅已给定；栅前环量为Γ、穿过叶栅的流量为q_v也已知，要求计算绕叶栅流动速度场。在所述条件下，流场中任意一点（R_0，ϕ_0）的合成速度之周向和径向分量 w_u、w_R可写成：

$$w_u=v_u+\frac{\Gamma}{2\pi R_0}$$

$$w_R=v_R+\frac{q_v}{2\pi R_0} \tag{14-30}$$

式中Γ逆时针为正、顺时针为负；q_v离心为正、向心为负，v_u、v_R是涡层诱导速度周向和径向分量。由式（14-30）知道，要计算绕叶栅流场关键在于计算涡层诱导速度v_u，v_R；而从v_u、v_R计算公式（14-28）知道，这就要计算包含旋涡分布函数$\gamma(R)$为被积函数的积分。这个积分只要把确定的$\gamma(R)$函数代入，就可以进行计算。

为将γ能展成熟知的级数形式，作以下R到q_v的变量代换，令

$$\cos\theta=\frac{2R-(R_1+R_2)}{R_1-R_2} \tag{14-31}$$

当$R=R_1$和R_2时，$\theta=0$和π。因此，当R由R_2变化至R_1时，对应地θ由π变化至0。变量代换后把$\gamma(\theta)=\frac{\gamma(R)}{\cos\beta}$展成傅里哀级数

$$\gamma(\theta)=A_0\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\theta$$

因此，为了确定γ，只要确定其展式中之系数即可，而这些系数可以根据绕流条件予以确定。下面就来说明确定这些傅里哀系数的具体步骤：

1） 根据实际所需要的精度，取定$\gamma(\theta)$展式中的项数，譬如取M个组成项：

$$\gamma(\theta)=A_0\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}+\sum_{n=1}^{M}A_n\sin n\theta$$

2) 诱导速度的计算　将诱导速度算式 (14-28) 中积分变量R，经式 (14-31) 予以代换，则积分变量成为θ，并把$\gamma(\theta)$ 的有限傅里哀展式代入计算：

$$v_u=\int_{R_2}^{R_1}\frac{z\gamma(R)}{4\pi R_0\cos\beta}(1-F_u)\mathrm{d}R$$

$$=\frac{z(R_1-R_2)}{8\pi R_0}\int_0^\pi(1-F_u)\gamma(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{z(R_1-R_2)}{8\pi R_0}\int_0^\pi(1-F_u)\left\{A_0\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}+\sum_{n=1}^{M}A_n\sin n\theta\right\}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=A_0\frac{z(R_1-R_2)}{8\pi R_0}\int_0^\pi(1-F_u)(1+\cos\theta)\mathrm{d}\theta+\sum_{n=1}^{M}A_n\frac{z(R_1-R_2)}{8\pi R_0}\int_0^\pi$$

$$\times(1-F_u)\sin n\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

同理可得：

$$v_R=-A_0\frac{z(R_1-R_2)}{4\pi R}\int_0^\pi F_R(1+\cos\theta)\mathrm{d}\theta-\sum_{n=1}^{M}A_n\frac{z(R_1-R_2)}{4\pi R_0}\int_0^\pi F_R\sin n\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

在v_u、v_R之表述式中，如令

$$\left.\begin{aligned}v_{u_0}&=\frac{z(R_1-R_2)}{8\pi R_0}\int_0^\pi(1-F_u)(1+\cos\theta)\mathrm{d}\theta\\v_{u_n}&=\frac{z(R_1-R_2)}{8\pi R_0}\int_0^\pi(1-F_u)\sin n\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\\v_{R_0}&=-\frac{z(R_1-R_2)}{4\pi R_0}\int_0^\pi F_R(1+\cos\theta)\mathrm{d}\theta\\v_{R_n}&=-\frac{z(R_1-R_2)}{4\pi R_0}\int_0^\pi F_R\sin n\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}\right\}\quad(14\text{-}32)$$

则

$$\left.\begin{aligned}v_u&=A_0v_{u_0}+\sum_{n=1}^{M}A_nv_{u_n}\\v_R&=A_0v_{R_0}+\sum_{n=1}^{M}A_nv_{R_n}\end{aligned}\right\}\quad(14\text{-}33)$$

由式 (14-32) 可知，v_{u_0}、v_{u_n}、v_{R_0}与v_{R_n}，只是计算点 (R_0, ϕ_0) 的函数，而和涡旋强度无关。当叶型弧线$\phi=\phi(R)$ 已知时，它们即可通过积分求出。在求积时，可利用下列熟知的积分结果：

$$\int_0^\pi(1+\cos\theta)\mathrm{d}\theta=\pi$$

$$\int_0^\pi \sin n\theta \sin\theta d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (n=1) \\ 0 & (n\neq 1) \end{cases}$$

3） 建立待定系数A_n的方程式　根据绕流条件，叶型弧线应为流场中的一条流线，即在叶型弧线上每点处流速与其相切。若β为该点叶型角，则应有：

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{w_u}{w_R}$$

进而将式（14-30）代入上式，并把v_u与v_R用式（14-33）代替则得：

$$A_0(v_{u_0} - v_R\ \mathrm{tg}\beta) + \sum_{n=1}^{M} A_n v_{u_n} - \mathrm{tg}\beta \sum_{n=1}^{M} A_n v_{R_n}$$

$$= \frac{Q}{2\pi R}\ \mathrm{tg}\beta - \frac{\Gamma}{2\pi R} \tag{14-34}$$

如沿给定的叶型弧线取定$M+1$个点，从而得R_0、ϕ_0、β的$M+1$个相应值，代入式（14-34）可得$M+1$个包含A_0、A_1、A_2……A_M的线代数方程。

4） 系数A_n的计算　联立求解上所得$M+1$个线代数方程，则系数A_0、A_1、A_2、…、A_M可被定出，并由此$\gamma(\theta)$也就确定了。在这个基础上，绕叶型环量及绕叶栅流场都可算出来了。

由公式（14-32）可知，如计算点不在叶型弧线上时，v_{u_0}、v_{u_n}、v_{R_0}、v_{R_n}不难求得。但当计算点位于叶型弧线上时，F_u与F_R在$R=R_0$和$\phi=\phi_0$将变成不定$\frac{0}{0}$，给积分带来困难。为解决这一困难，可将沿叶型弧线连续分布的旋涡$\gamma(\theta)$用若干个离散涡来代替，然后把诸计算点分别安排在各个相邻的离散涡之间。这么一来，就可以避开积分时出现不定的困难了。

以上是对平面不动环列叶栅的讨论，即$\omega=0$的情况。如环列叶栅以等角速度ω旋转时，则流场中任一点（R_0，ϕ_0）的相对速度分量为：

$$w_u = v_u + \frac{\Gamma}{2\pi R} - \omega R$$

$$w_R = v_R + \frac{q_V}{2\pi R}$$

第六节　绕叶栅流动的三元计算理论

一、三元流动理论概述

水力机械叶轮中的流体流动是非常复杂的，一般说来，流动都具有空间中三元的性质。为了了解叶轮中流动的情况，可以对叶轮中的流动参数进行测量，但要想对转动的叶轮中流动进行参数测量是谈何容易的事；另一方法是对叶轮中流动进行理论解析，但又由于控制方程为非线性的、并且边界条件也很复杂，致使理论解析遭遇到难以克服的数学困难。随着大型计算机的发展，叶轮中三元流动的求解找到了新的途径——数值计算解法。

叶轮中三元流动的数值解法，大多建立在吴仲华教授提出的两类相对流面理论的基础上。这是早在50年代初，为了提高可压缩流体叶轮机械（如燃气轮机、压气机等）的性能，就由吴教授提出来的求解叶轮中三元流动的一个理论，但只是由于近年来计算数学和高速电

子计算技术的发展，才使基于这个理论的、三元流动的复杂计算成为可能。目前，三元流动计算在可压缩流体叶轮机械中不仅继续是科研对象，而且已发展成为实际工程设计的常规方法了。在水力机械中对三元理论的研究较晚，约开始于60年代大型可逆式水泵水轮机的研制。而研究的总的趋势也只是将可压缩叶轮机械的三元流动理论成果，应用于水力机械的计算和设计中。在水力机械中应用了三元理论的计算方法后，可以预估转轮在不同工况下的能量和汽蚀性能，这使得有可能用理论计算的方法设计出性能良好的叶轮来。

对叶轮中的流动，即使作了理想流体、定常流动和流场是连续的简化假设后，要获得真正的三元解仍然是困难的。1952年吴仲华教授提出降低流动元的方法来简化计算，把叶轮中实际上的三元流动化成两个相关的二元流动问题来求解，这就是有名的两类相对流面（s_1流面和s_2流面）理论。两类相对流面的概念如下：

（一） 第一类相对流面s_1

设B_1B_2为叶栅进口处，两相邻叶片C_1、C_2间半径为R_1的任意一圆弧段，则过此弧段进入叶道的流线将形成流面$B_1B_2Q_2Q_1$（图14-26），这类流面就称为第一类相对流面s_1。在转轮流道内有很多这样的s_1流面。在实际的叶轮中，由于叶片数有限的影响，通过叶轮的流动不可能是轴对称的，进入叶道的流线也不可能一致，因而流面s_1并也不是与转轮同轴的回转面，它在叶片区域可以是翘曲的。

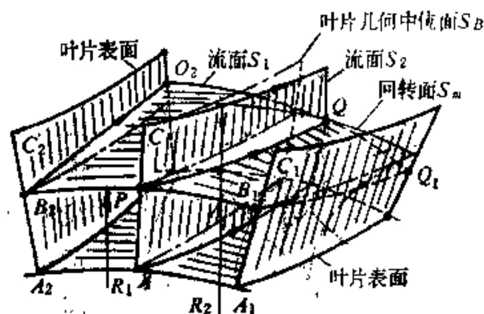


图14-26　s_1流面和s_2流面

（二） 第二类相对流面s_2

过栅前任一径向线而进入叶道的各流线所组成的流面，就叫作第二类相对流面s_2。显然，在转轮叶道内有许多这样的s_2流面。在图14-26a中，绘出了过两相邻叶片圆弧B_1B_2中点P的流面s_2（AC为径向线）。若把叶片的几何中位面s_B旋转至点P处，则一般说来它与s_2流面并不重合，即二者形状并不一致。

通过上述两类流面的交替运用，虽然可以把叶轮中一个实际三元流动的问题，简化为s_1和s_2流面上的两个互相关联的二元流动的问题来求解，但这样的求解仍然非常复杂。因此，到目前为止，在实际应用时只能满足于某种近似结果。就s_1、s_2流面而言，它们均为复杂的空间曲面，在实用上为不致使数学求解过于复杂，常常对s_1、s_2流面作一些近似假设。作为初步近似，可以把s_1流面取作以轴面流线为母线的、与转轮同轴的回转面；至于s_2流面，则通常假定转轮中的流动是轴对称的，因此可只研究叶道间的一个s_2流面上流动就成了，一般取位于叶道中间、形状和叶片几何中位面一致的面为s_2流面。在作了上述这样初步近似的假设后，计算结果显然只能是准三元的了。近年来出现的大量三元流动解法是属于准三元的，所不同之处在于求解的数学方法。

在应用电子计算机求解s_1流面和s_2流面流动的解时，目前采用的数值方法主要有以下三大类：有限差分法、有限元法和流线曲率法。对s_1流面为回转面时，求解其上流动尚有奇点分布法。在本教程中不准备讨论所有的准三元计算方法，只拟介绍叶轮中准三元计算的流线曲率法，且讨论是针对叶轮内流动的正命题而言。

除了上述以两类流面为基础的准三元理论外，近年来国内外也在进行真正的三元流动理

论的研究工作。但都还处于起始阶段，有待进一步发展和完善。下面就以求解s_2相对流面上的流动为例，来介绍流线曲率法。

二、准正交曲线坐标系

如前所述，我们把欲对其进行计算的s_2流面，取为两相邻叶片的中间流面，且其形状与叶片中位面一致。中间流面s_2上的流动，通过向轴面（子午面）的旋转投影，可得到相应的轴面流动。s_2面上流线投影为轴面流线。为方便起见，流面s_2上流动的计算常转到轴面上来作相应的计算。

在求解轴面流动时，常用轴面流线及其法线组成的坐标系，叫流线坐标系。而在进行轴面流动的数值计算时，就利用流线及其法线组成的流网作为求解的网格。但计算轴面流动在开始时，准确的流线位置尚属未知，而是要通过逐次逼近法、不断修正而确定的。在每逼近计算一次后，由于流线位置的修正，其法线也须相应变更。坐标系的变更，给计算带来相当大的困难。但如采取所谓准正交曲线坐标系，则计算中的困难可得以解决。

现用一组与全部jj根轴面流线近乎正交的任意的轴面曲线q（它们在s_2流面上的相应曲线记为s）来代替流线的法线，这种任定的轴面曲线q，称为准正交线（图14-27）。准正交线由于不要求它与每条流线精确正交，因此在计算过程中当流线发生变化时，可总保持其为不变。这可以避免流线坐标系中变更坐标，所带来的计算困难。准正交线编号记以i，从叶轮出口至进口设总共有ii根准正交线。若取准正交线q、流线m和圆周曲线θ作为三条坐标曲线时，所成的坐标系就叫准正交曲线坐标系。并约定对混流式叶轮，m正向取为由低压向高压边；q的方向取为由上冠至下环；θ正向与旋转方向一致。

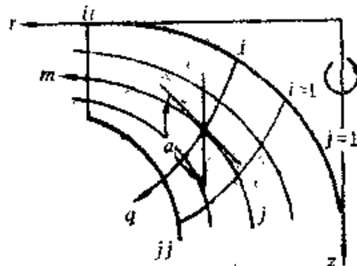


图14-27　准正交线q

三、s_2流面流动的解析方程

（一）沿准正交线方向的速度梯度方程

设叶轮进口单位重液体的能量（不计位能）为$E_e=\frac{p_e}{\gamma}+\frac{v_e^2}{2g}$，在叶轮内某点处的能量$E=\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}$。则自叶轮进口流至叶轮中某一点时，液流能量的减少为$E_e-\left(\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}\right)$。根据水机基本方程式，它与速度矩变化（$v_{eu}r_e-v_ur$）的关系为：

$$E_e-\left(\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}\right)=\frac{\omega}{\eta_h g}(v_{eu}r_e-v_ur) \tag{a}$$

式中下标"e"表示叶轮进口处值。

由速度三角形（图14-28）可得：

$$v_u=r\omega-(-w_u)=r\omega+w_u$$

$$v^2=r^2\omega^2+w^2-2r\omega(-w_u)=r^2\omega^2+w^2+2r\omega w_u$$

令

$$H_e=gE_e;\quad \lambda_e=v_{eu}r_e$$

将上述各式代入式（a）中，则得：

$$\frac{w^2}{2}=\left(1-\frac{1}{\eta_{hc}}\right)(\omega\lambda_e-r^2\omega^2-r\omega w_u)+(H_e-\omega\lambda_e)+\frac{1}{2}r^2\omega^2-\frac{p}{\rho}$$

将上式沿s_2流面上s曲线方向求导数，然后在等式两边同除以$\frac{dq}{ds}$，则得

$$w\frac{dw}{dq}=\frac{1}{\eta_h^2}(\omega\lambda_e-r^2\omega^2-r\omega w_u)\frac{d\eta_{he}}{dq}$$

$$+\left(1-\frac{1}{\eta_{he}}\right)\left(\omega\frac{d\lambda_e}{dq}-2r\omega^2\frac{dr}{dq}-\omega w_u\frac{dr}{dq}-r\omega\frac{dw_u}{dq}\right)$$

$$+\left(\frac{dH_e}{dq}-\omega\frac{d\lambda_e}{dq}\right)+r\omega^2\frac{dr}{dq}-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dq} \tag{14-35}$$

式中 H_e——叶轮进口单位质量液体的能量；

λ_e——叶轮进口来流的预旋；

η_{he}——水力效率。

在 s_1 流面上沿 s 曲线方向压强的导数为：

$$\frac{dp}{ds}=\frac{\partial p}{\partial r}\frac{dr}{ds}+\frac{\partial p}{\partial\theta}\frac{d\theta}{ds}-\frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

两边同除以$\frac{dq}{ds}$，则得：

$$\frac{dp}{dq}=\frac{\partial p}{\partial r}\frac{dr}{dq}+\frac{\partial p}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dq}+\frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{dq}$$

上式两端再各乘以$\left(-\frac{1}{\rho}\right)$后，可得：

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dq}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\frac{dr}{dq}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dq}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{dq} \tag{b}$$

为了将压力梯度能以相对速度及其导数表出，考虑叶轮中液体的运动方程式。设不可压缩理想液体、在以定角速度ω旋转的叶轮流道内作定常相对运动，如不计质量力则在相对圆柱坐标系（r，θ，z）中的欧拉运动微分方程组可写成：

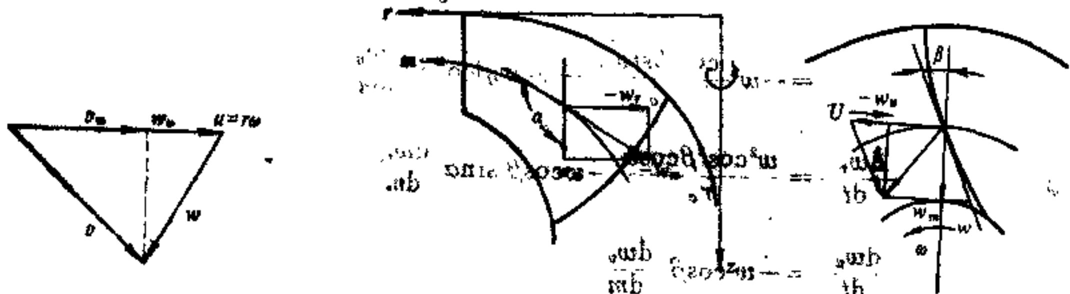


图14-28 速度三角形图　　　　图 14-29 相对速度及其分量图

$$\frac{dw_r}{dt}-\frac{(w_u+r\omega)^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\frac{\mathrm{d}w_u}{\mathrm{d}t}-\frac{w_r w_u}{r}+2\omega w_r=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\partial\theta} \tag{c}$$

$$\frac{\mathrm{d}w_z}{\mathrm{d}t}=\frac{-1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

由图14-29相对速度w及各分量间的关系为:

$$w_m=-w\cos\beta;\quad w_u=-w\sin\beta$$

$$w_r=w_m\sin\alpha;\quad w_z=-w_m\cos(\pi-\alpha)=w_m\cos\alpha \tag{d}$$

注意β指相对速度 w 与其轴面投影速度间的夹角（常称之为 s_2 流面的水流角）。另设轴面流线的曲率半径为r_c，则沿轴面流线微段$d_m=r_c\mathrm{d}\alpha$（图14-30），从而可导出下列几个关系式:

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}m}=\frac{1}{r_c}$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\frac{w_m}{r_c}=-\frac{w\cos\beta}{r_c} \tag{e}$$

$$\frac{\mathrm{d}w_m}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}w_m}{\mathrm{d}m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}w_m}{\mathrm{d}m}w_m=-w\cos\beta\frac{\mathrm{d}w_m}{\mathrm{d}m}$$

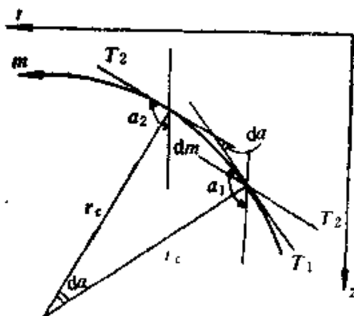


图 14-30 曲率半径及其夹角关系图

运用关系式（d）、（e）可以计算式（c）左边的加速度:

$$\frac{\mathrm{d}w_r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(w_m\sin\alpha)=w_m\cos\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}+\sin\alpha\frac{\mathrm{d}w_m}{\mathrm{d}t}$$

$$=w^2\frac{\cos^2\beta\cos\alpha}{r_c}-w\cos\beta\sin\alpha\frac{\mathrm{d}w_m}{\mathrm{d}m}$$

$$\frac{\mathrm{d}w_u}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}w_u}{\mathrm{d}m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}w_u}{\mathrm{d}m}w_m=-w\cos\beta\frac{\mathrm{d}w_u}{\mathrm{d}m}$$

$$\frac{\mathrm{d}w_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(w_m\cos\alpha)=w_m(-\sin\alpha)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}+\cos\alpha\frac{\mathrm{d}w_m}{\mathrm{d}t}$$

$$=-w\cos\beta(-\sin\alpha)\left(-w\frac{\cos\beta}{r_c}\right)+\cos\alpha\left(-w\cos\beta\frac{\mathrm{d}w_m}{\mathrm{d}m}\right)$$

$$=-w^2\frac{\cos^2\beta\sin\alpha}{r_c}-w\cos\beta\cos\alpha\frac{\mathrm{d}w_m}{\mathrm{d}m}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}w_r}{\mathrm{d}t}=\frac{w^2\cos^2\beta\cos\alpha}{r_c}-w\cos\beta\sin\alpha\frac{\mathrm{d}w_m}{\mathrm{d}m}$$

$$\frac{\mathrm{d}w_u}{\mathrm{d}t}=-w\cos\beta\frac{\mathrm{d}w_u}{\mathrm{d}m} \tag{f}$$

$$\frac{\mathrm{d}w_z}{\mathrm{d}t}=-\frac{w^2\cos^2\beta\sin\alpha}{r_c}-w\cos\beta\cos\alpha\frac{\mathrm{d}w_m}{\mathrm{d}m}$$

把式（f）与（d）代回运动方程式（c），则得:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=w^2\left(\frac{\cos^2\beta\cos\alpha}{r_c}-\frac{\sin^2\beta}{r}\right)-w(\cos\beta\sin\alpha-2\omega\sin\beta)-r\omega^2$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\theta}=w^2\cos\beta\sin\beta\sin\alpha-wr\cos\beta\left(\frac{dw_u}{dm}+2\omega\sin\alpha\right)\qquad(g)$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=-w^2\frac{\cos^2\beta\sin\alpha}{r_c}-w\cos\beta\cos\alpha\frac{dw_m}{dm}$$

将式（g）代回压力梯度式（b），则得：

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dq}=w^2\left\{\left[\frac{\cos^2\beta\cos\alpha}{r_c}-\frac{\sin^2\beta}{r}\right]\frac{dr}{dq}+[\cos\beta\sin\beta\sin\alpha]\frac{d\theta}{dq}\right.$$
$$\left.-\left[\frac{\cos^2\beta\sin\alpha}{r_c}\right]\frac{dz}{dq}\right\}-w\left\{\left[\cos\beta\sin\alpha\frac{dw_m}{dm}-2\omega\sin\beta\right]\frac{dr}{dq}\right.$$
$$+\left[r\cos\beta\left(\frac{dw_u}{dm}+2\omega\sin\alpha\right)\right]\frac{d\theta}{dq}+\left[\cos\beta\cos\alpha\frac{dw_m}{dm}\right]$$
$$\left.\times\frac{dz}{dq}\right\}-r\omega^2\frac{dr}{dq}\qquad(h)$$

把式（h）代入式（14-35）合并、简化后，得到计算 s_2 流面上流动的、沿准正交线 q 的相对速度梯度方程式

$$\frac{dw}{dq}=wA+(B-D_1)+\frac{1}{w}(C+D_2)\qquad(14\text{-}36)$$

式（14-36）中的各个系数表示式如下：

$$A=\left(\frac{\cos^2\beta\cos\alpha}{r_c}-\frac{\sin^2\beta}{r}\right)\frac{dr}{dq}+(\cos\beta\sin\beta\sin\alpha)\frac{d\theta}{dq}-\left(\frac{\cos^2\beta\sin\alpha}{r_c}\right)\frac{dz}{dq}$$

$$B=-\left\{\left(\cos\beta\sin\alpha\frac{dw_m}{dm}-2\omega\sin\beta\right)\frac{dr}{dq}+\left[r\cos\beta\left(\frac{dw_u}{dm}+2\omega\sin\alpha\right)\right]\frac{d\theta}{dq}\right.$$
$$\left.+\left(\cos\beta\cos\alpha\frac{dw_m}{dm}\right)\frac{dz}{dq}\right\}$$

$$C=\left(\frac{dH_e}{dq}-\omega\frac{d\lambda_e}{dq}\right)$$

$$D_1=\omega\left[\left(\frac{-1}{\eta_{he}^2}\right)r\frac{d\eta_{he}}{dq}-\left(1-\frac{1}{\eta_{he}}\right)\frac{dr}{dq}\right]\sin\beta$$

$$D_2=\omega\left[\left(\frac{-1}{\eta_{he}^2}\right)(r^2\omega-\lambda_e)\frac{d\eta_{he}}{dq}-\left(1-\frac{1}{\eta_{he}}\right)\left(2r\omega\frac{dr}{dq}+r\frac{dw_u}{dq}-\frac{d\lambda_e}{dq}\right)\right]$$

上面得到的沿准正交线 q 的相对速度梯度方程式（14-36），是一个以流线曲率及斜率为参变量的常微分方程式。但由于是一变系数、非线性常微分方程，故求解仍很困难。通常可对微分方程式（14-36）进行数值求解，沿准正交线 q 从上冠至下环逐步计算，便可得到相对速度 w 在轴面（从而 s_2 流面）上的数值解了。

（二）连续性方程

s_2 流面上的流动除去应满足方程式（14-36）外，同时还必须满足连续性条件，通过以各条准正交线为母线的回转面上的流量应相等，且必须等于给定流量。

除了要求满足上述的总流量条件外，还要求满足分管流量相等的条件，即要求相邻两流线之间通过相同的流量（按流量等分原则来划分流线）。根据这一条件可以检查流线位置与形状之是否正确。

假定中间流面 s_2 上的液流参数与该参数的周向平均值近似相等，并通过以第 i 根准正交线 q 为母线的回转面上从上冠($j=1$)至某条流线（$j=j$）的分管累计（参图 14-31）流量记为 Gj,i，则

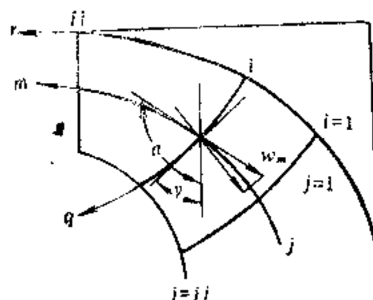


图 14-31 流量计算参考图

$$Gj,i=z\int_0^{qj,i} w\cos\beta\sin(\alpha-\gamma)\left(\frac{2\pi r}{z}-\delta\right)dq \tag{14-37}$$

式中 δ——叶片的圆周方向厚度；

z——叶片数。

设通过叶轮流道的给定总容积流量为 G_B，则计算总容积流量 Gjj,i 应满足的条件为：

$$Gjj,i=z\int_0^{qjj,i} w\cos\beta\sin(\alpha-\gamma)\left(\frac{2\pi r}{z}-\right)dq=G_B \tag{14-38}$$

各分管累计流量 Gj,i 应满足的条件则是：

$$Gj,i=\frac{j-1}{jj-1}G_B \tag{14-39}$$

如总流量条件（14-38）不能满足时，则应调整相对速度 w 沿准正交线的分布，亦即须调整起算条件重新计算速度 w 的分布。上述条件满足后，再来检查各分管累计流量情况，当式（14-39）不被满足时，则应修改轴面流线位置，然后重新进行计算，直到要求条件被满足时为止，这时 s_2 流面的计算便也告完成了。

四、s_2 流面上数值计算方法及步骤

s_2 流面上流动计算的基本方程为速度梯度方程式（14-36）及连续性方程式（14-38）、（14-39），前者用来做求解计算、后者用来做校核计算。在进行 s_2 流面的数值计算中，也仍旧要依靠上述方程。在通过速度梯度方程式（14-36）做求解计算时，为了求得相对速度 w 的解值，必须事先确定方程中出现的参数 α、r_o、β、$\frac{dr}{dq}$、$\frac{d\theta}{dq}$、$\frac{dz}{dq}$、$\frac{dw_m}{dm}$、$\frac{dw_u}{dm}$、$\frac{dw_u}{dq}$、$\frac{d\eta_{hc}}{dq}$、$\frac{d\lambda_e}{dq}$ 和 $\frac{dH_e}{dq}$ 等的值。下面分别介绍这些参数的确定及 s_2 流面的数值计算方法与步骤。

（一）初始流网、计算网点及初始速度的确定

作为计算 s_2 流面上流动的第一件事，必须先确定出轴面上的初始流网、网点及初始速度 w 以为计算的基础。为此，在轴面流道内自叶轮出口到叶轮进口作出 ii 根准正交线 q，并顺流道作出 jj 根轴面流线 m（图14-27），则 jj 根轴面流线与 ii 根准正交线的交点形成计算 s_2 流面上流动的计算网点，称之为计算站。

开始时轴面流线尚属未知，是按某种假设来确定初步近似流线的。譬如，可按相对速度 w 在整个流场内为常数的假设，从而各流线间环形面积应相等，据此作出初步近似流线。当然也可根据设计者的经验，直接给出初步近似流线的形状。显然，初步近似流线的形、位带

有一定的任意性，但这一任意性最后将以满足叶道内流动的连续性方程来消除。

（二） 轴面流线几何参数 α 和 r_c 的计算

设初步给出的轴面近似流线（图14-31）的方程为$r=f(z)$，则轴面流线的斜率为

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z},\quad \alpha=\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} \tag{14-40}$$

轴面流线的曲率$\frac{1}{r_c}$，则可如下求出：从（图14-30）知$\mathrm{d}m=r_c\mathrm{d}\alpha$，因此

$$\frac{1}{r_c}=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}m} \tag{i}$$

又由式（14-40）与弧微分公式则有：

$$\mathrm{d}\alpha=\frac{\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}z^2}\mathrm{d}z}{1+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)^2}$$

$$\mathrm{d}m=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)^2}\,\mathrm{d}z$$

把上二式代入式（i），则得轴面流线曲率的计算公式：

$$\frac{1}{r_c}=\frac{\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}z^2}}{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{14-41}$$

实际上，一般所谓给出初步近似轴面流线，往往只是给了轴面流线上一些离散点的坐标（r，z），并未给出函数$r=f(z)$。因此，需要采取简单实用的数学方法，求出通过给定离散点的光滑曲线作为近似流线，并从而得出流线方程式$r=f(z)$。这种求取通过若干离散点的光滑曲线函数的方法有很多，但近年来用得较广泛、也较适于作三元计算的一种方法，叫做样条函数拟合法。这种方法是把通过曲线上每三个点的曲线段，用一个三次多项式曲线去拟合它，从而那段曲线函数便可用该三次多项式来近似。这样把流线从出口到进口分成若干段，便可得若干个三次多项式（其系数不同），总合这些三次多项式便可取得整条流线的方程式$r=f(z)$了。

（三） 叶片几何参数$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}$、$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}q}$、$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}q}$、$\beta$和$\delta$的计算

由图14-31上的几何关系不难看出：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}=\sin\gamma,\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}q}=\cos\gamma \tag{14-42}$$

式中 γ 为准正交线q对轴线z的倾角，当准正交线取定后，则各计算点的γ值也定了。

$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}q}$是 s_2 流面上 θ 对 q 的导数，因 s_2 流面形状假定与叶片中位面相同，而叶片中位面形状已知为：

$$\theta_B=\theta_B(r,z)$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}q}=\frac{\mathrm{d}\theta_B}{\mathrm{d}q}=\frac{\partial\theta_B}{\partial r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}+\frac{\partial\theta_B}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}q}$$

把式（14-42）代入上式，得 $\frac{d\theta}{dq}$ 的计算公式：

$$\frac{d\theta}{dq}=\frac{\partial\theta_B}{\partial r}\sin\gamma+\frac{\partial\theta_B}{\partial z}\cos\gamma \tag{14-43}$$

由于任一准正交线取定后，在整个计算过程便不再改变，在压气机及汽轮机叶轮计算中常取准正交线为直线，则上式中 γ 角对每一条准正交线为一常数值，故给计算带来较大方便。但在混流式水机叶轮的计算中，准正交线难以均取直线。这是因为一般混流式叶轮进、出口边皆为曲线，为要算出进、出口边的液流参数 w、β，则应使进、出口边恰好各自落在一条准正交线上，因此准正交线就需要和进、出口边一样采用同样的曲线形式。对曲线形式的准正交线，虽然 γ 沿准正交线 q 是变化的，但此时只要准正交线方程 $r=f(z)$ 已知后，倾角γ也容易求得：

$$\gamma=\operatorname{arctg}\frac{dr}{dz}$$

方程式（14-36）中 s_2 流面的水流角 β，在假定 s_2 流面与叶片中位面相同的条件下，由图 14-32 所示几何关系可得：

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{r d\theta}{dm}=\frac{r d\theta_B}{dm}=r\left(\frac{\partial\theta_B}{\partial r}\frac{dr}{dm}+\frac{\partial\theta_B}{\partial z}\frac{dz}{dm}\right) \tag{j}$$

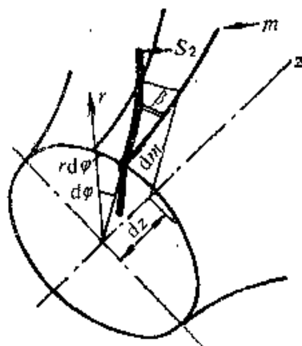


图14-32　s_2流面水流角β的示意图

但由图14-31可以看出：

$$\frac{dr}{dm}=\sin\alpha;\quad \frac{dz}{dm}=-\cos(\pi-\alpha)=\cos\alpha$$

把上二式代入式(j)则得：

$$\operatorname{tg}\beta=r\left(\frac{\partial\theta_B}{\partial r}\sin\alpha+\frac{\partial\theta_B}{\partial z}\cos\alpha\right) \tag{14-44}$$

式(14-44)右边，$\theta_B=\theta_B(r,\ z)$叶片中位面方程为已知，则 $\frac{\partial\theta_B}{\partial r}$、$\frac{\partial\theta_B}{\partial z}$ 可以算出；α 为轴面流线对转轴z的倾角，只要流线定了各点的α角也就定了。因此，对各计算点等式右边各项的值全可确定，从而β角便也容易算出来了。

关于式(14-38)中叶片沿圆周方向厚度δ的计算，若给了叶片正、背面角坐标θ_p、θ_s时，则

$$\delta=r|\theta_p-\theta_s| \tag{14-45}$$

如给的是垂直于叶片中位面的厚度$\delta=\delta(r,\ z)$时，则

$$\delta\cos\phi=s \tag{k}$$

ϕ是中位面法线与圆周θ方向的夹角。从而，$\cos\phi$也就是叶片中位面$\theta_B=\theta_B(r,\ z)$法线方向对圆周θ方向的方向余弦，由数学知：

$$\cos\phi=\frac{1}{\sqrt{1+r^2\left(\frac{\partial\theta_B}{\partial r}\right)^2+r^2\left(\frac{\partial\theta_B}{\partial z}\right)^2}}$$

把此式代入式(k)可得：

$$\delta = s\sqrt{1+r^2\left(\frac{\partial\theta_B}{\partial r}\right)^2+r^2\left(\frac{\partial\theta_B}{\partial z}\right)^2} \tag{14-46}$$

（四） 导数$\frac{dw_m}{dm}$、$\frac{dw_u}{dm}$的计算

在相对速度w未求出前，w_m、w_u、$\frac{dw_m}{dm}$和$\frac{dw_u}{dm}$当然也属未知。但开始时可假设叶轮中w为常数，从而根据式(d)可以确定w_m及w_u如下：

$$w_m = -w\cos\beta;\quad w_u = -w\sin\beta$$

根据轴面流线各计算点上的w_m及w_u值，通过样条函数的办法即可求出一阶导数$\frac{dw_m}{dm}$和$\frac{dw_u}{dm}$的近似值了。而以后的计算中、则可以上一次计算得的w_m、w_u值为基础进行计算。

（五） 沿准正交线q的其它导数的计算

属于这类导数的有$\frac{dw_u}{dq}$、$\frac{d\eta_{ho}}{dq}$、$\frac{d\lambda_e}{dq}$和$\frac{dH_e}{dq}$等，这些导数值均可通过样条逼近函数求导得到。

（六） 速度梯度方程的求解

至此，在速度梯度方程式(14-36)中，除w本身外，其它参数均已确定，可以进入方程式(14-36)的求解了。

求解速度梯度方程(14-36)可以有各种数值方法，这里介绍差分解法。方程式(14-36)可缩写成下列形式：

$$\frac{dw}{dq} = f(w,\ q) \tag{14-47}$$

式中$f(w,\ q)$代表方程式(14-36)右端表达式。沿准正交线q的各计算站j，写出与方程(14-47)对应的差分方程，则为：

$$w_{j+1} = w_j + f(w_j,\ q_j)\Delta q \tag{14-48}$$

使用精度较好的预报校正格式来求解差分方程式(14-48)。令

$$\begin{aligned} \bar{w}_{j+1} &= w_j + f(w_j,\ q_j)\Delta q \\ \bar{\bar{w}}_{j+1} &= w_j + f(\bar{w}_{j+1},\ q_{j+1})\Delta q \end{aligned} \tag{14-49}$$

式(14-49)第一式称为预报式，计算时应采用第j根流线上的各参数值；式(14-49)第二式叫做校正式，计算时应采用第$j+1$根流线上的各参数值。要求的下一站的相对速度值w_{j+1}可取作预报值与校正值的算术平均值：

$$w_{j+1} = \frac{1}{2}(\bar{w}_{j+1} + \bar{\bar{w}}_{j+1}) \tag{14-50}$$

在给定上冠初始速度w_{1i}($j=1$)的情况下，根据式(14-49)与式(14-50)的计算可得准正交线i上速度w的完整分布。

研究表明，当相邻流线间速度差不大于30%时，上述算法可得满意结果。

（七） 流量校核

容积流量积分式(14-38)，在算出各计算站的w值后，可用样条函数法进行积分。将算

得的总流量与给定流量比较，若算得的总流量太小或太大，则应分别增大或减小上冠处的初始速度w_{1i}，然后重新计算速度w的分布和总流量。一般迭代几次后便可得出与正确流量对应的上冠处初始速度w_{1i}和相应的沿准正交线q的w分布了，并称之为w的第一次近似分布。

通过式(14-37)还可计算出流量沿准正交线q的分布。然后用样条函数法反插，可决定沿准正交线上、通过等流量的两相邻流线的间隔(图14-33)。对自出口到进口的每一条准正交线，计算上述间隔后，可得到修正轴面流线。用修正后的新轴面流线及w的第一次近似分布做第二次近似计算，计算方法与第一次完全相同。

上述逼近计算，可反复进行迭代，直到最后不修改轴面流线而流量误差不超出允许误差范围为止。这时s_2流面的相对速度w_{si}分布计算便告完成。

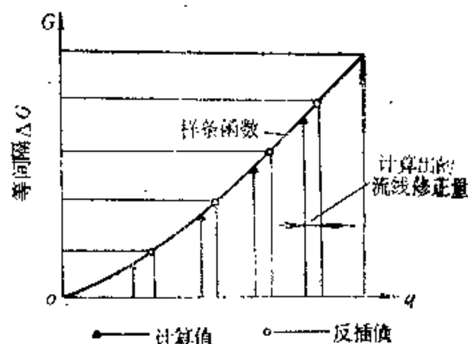


图14-33　流量沿准正交线的分配

(八)　叶片表面速度w和压力p的计算

s_2流面上的相对速度w求出后，可用下述方法计算叶片正、背面的速度w_p、w_s和压力p_p、p_s近似分布了。

考虑s_1回转面上的流动，设在二叶片间相对速度w呈线性分布。由于绝对运动无旋，则沿如图14-34a所示的四边形的环量应为零：

$$v_s\frac{\mathrm{d}m}{\cos\beta_s}-v_p\frac{\mathrm{d}m}{\cos\beta_p}+\left(v_u+\frac{\partial v_u}{\partial m}\mathrm{d}m\right)r\Delta\theta-v_ur\Delta\theta=0 \tag{1}$$

式中的v_p、v_s为沿叶片正、背面绝对速度的分量；而β_p、β_s(p、s指向为离心方向)为水流角。

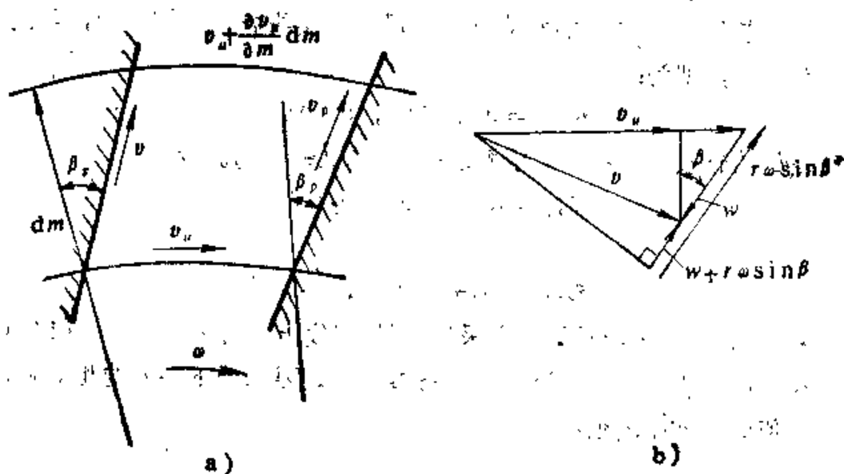


图14-34　绝对运动的速度环量

见图14-34b，由速度三角形可得下列三个关系式：

$$v_u=r\omega+w_u$$
$$v_p=r\omega\sin\beta_p+w_p$$
$$v_s=r\omega\sin\beta_s+w_s$$

把上式代入式(l)可得：

$$\frac{w_s}{\cos\beta_s}-\frac{w_p}{\cos\beta_p}+r\omega(\mathrm{tg}\beta_s-\mathrm{tg}\beta_p)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}[(r\omega+w_u)r\Delta\theta]=0 \qquad (m)$$

在上述s_2流面求解中，我们已得到作为两叶片中间流面的s_2流面上的速度w及水流角β。考虑到叶片间速度的线性分布，则可建立下列方程：

$$w=\frac{1}{2}(w_p+w_s) \qquad (n)$$

联立方程式(m)及(n)，则可得叶片正、背面的相对速度：

$$w_p=\frac{\cos\beta_s\cos\beta_p}{\cos\beta_s+\cos\beta_p}\left\{\frac{2w}{\cos\beta_s}+r\omega(\mathrm{tg}\beta_s-\mathrm{tg}\beta_p)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}[(r\omega+w\sin\beta)r\Delta\theta]\right\} \qquad (14\text{-}51)$$

$$w_s=2w-w_p$$

式中　$\Delta\theta=\frac{2\pi}{z}-\frac{\delta}{r}$

叶片表面压力可通过相对运动伯努里方程式确定。列出叶轮进口的e点处和叶片表面任意一点的相对运动伯努里方程，得

$$p_s=p_e+\gamma\frac{w_e^2-u_e^2}{2g}-\gamma\frac{w_s^2-u_s^2}{2g}$$

$$p_p=p_e+\gamma\frac{w_e^2-u_e^2}{2g}-\gamma\frac{w_p^2-u_p^2}{2g}$$

写成前面引入的λ_e和H_e形式，即把$\frac{w_e^2-u_e^2}{2g}=\frac{v_e^2}{2g}-\frac{\omega\lambda_e}{g}$代入上式经整理可得：

$$p_s=\frac{\gamma}{g}\left(H_e-\omega\lambda_e-\frac{w_s^2-u_s^2}{2}\right)$$

$$p_p=\frac{\gamma}{g}\left(H_e-\omega\lambda_e-\frac{w_p^2-u_p^2}{2}\right) \qquad (14\text{-}52)$$

式中　λ_e——叶轮进口来流预旋；

　　H_e——进口处单位质量液体的能量。

以上对s_2流面流动求解的流线曲率法，作了必要的介绍。s_1流面上流动也可采用流线曲率法㊀（或其它方法）求解。流线曲率法是计算叶轮中三元流动方法中，理论上比较简单、计算量较小，结果也相近的计算方法。

s_1与s_2流面上流动计算可以各自单独进行，这样也能达到对叶轮中流动进行分析的目的。但在求解s_1、s_2流面流动时，发现这两个流面的计算是相关的。s_1流面的形状与厚度，可以通过s_2流面的计算来确定；而s_2流面计算中的w_u、w_m和β等值又可由s_1流面的计算提供。因此可以把两个流面上相关联的流动迭代计算，相互修正，直至收敛。这样的准三元流动计

㊀ Theodore Katsanis, Use of Arbitrary Quasi-Orthogonals for Calculating Flow Distribution in the Meridional of a Turbomachine, NASA TN D2546, 1964.

流体力学赵

算，是目前应用最多的计算方法。

习 题 十四

14-1 叶栅有哪些几何参数？哪几个几何参数可完全确定一平面叶栅？

14-2 何谓等价叶栅与等价平板叶栅，引入等价叶栅有何意义？

14-3 哪些叶栅存在等价平板叶栅？

14-4 何谓叶栅特征方程，方程的物理意义如何？

14-5 说明零向系数t_0与穿透系数K的物理意义。

14-6 说明绕翼型流动与绕栅型流动的异同。

14-7 什么叫做栅型升力，如何计算？它与绕单翼时升力算式的联系如何？

14-8 叶栅对栅前、后流动有无影响？如何计算这个影响？

14-9 如已知栅前、后流速分别为w_1与w_2则无穷远来流速度应等于什么？

14-10 证明，$f=v_0\cos\delta f_{/\!/}-v_0\sin\delta f_{\perp}+\Gamma f_V$是与板栅任意绕流对应的辅助平面上绕单位圆流动的复势函数。

14-11 用奇点分布法解平面直列叶栅绕流，其主要优点是什么？

第十五章　气体动力学基础

在前面各章中讨论流体运动时，除个别情况(如水锤现象)，流体一直被认为是不可压缩的，即把流体的密度ρ当作是常数。当流体为液体时，或气体在流动速度不太大时是没有问题的，即那时液体或气体的密度在流动时确实变化极小，因而在求解各类问题的方程时，即使将密度作常数处理，其解也是符合流动的基本特征的。但当气体作高速流动时，再把密度作为常量将会导致解的不准确。有时由于密度的变化，流动图案将会发生根本改变。故这时必须考虑密度的变化，即把流体看成是可压缩的。研究这部分问题的学科就是气体动力学。

本章只讨论气体动力学中的一部分流动，即讨论理想定常的一元气体流动。

第一节　基本概念

在讨论不可压缩流体的运动时，流场的压力与速度分布是最终要求。即在各种流动情况下未知量是速度$v(x,y,z,t)$与$p(x,y,z,t)$。而在气体动力学中讨论流体的运动时，由于流体的可压缩性，增加了未知量$\rho(x,y,z,t)$。这样一来在前几章所建立的方程（指基本方程）就不足以用来求出所有的未知流动参数。但幸好有热力学的一些基本定律可使我们将流体的压力、密度以及温度等量之间的关系写成方程。热力学的方程加上以前建立的基本方程，就可能解决可压缩流体的流动问题了。

压力p，密度ρ以及温度T三个量称为气体的状态参数。对于完全气体而言，此三个量应满足状态方程：

$$\frac{p}{\rho}=gRT \tag{15-1}$$

式中　p——气体的绝对压力；

ρ——密度；

T——热力学温度；

R——气体常数。

除压力过高及温度极低外，一般情况的气体都遵循式（15-1)所给出的关系。对于一定种类的气体，气体常数R为一常量，如空气的R为29.27m/k。

由完全气体的状态方程可知，气体（指可压缩的）的压力不只取决于密度，还与其温度有关，亦即气体在一般情况下不再是正压的。这就给气体的流动分析带来困难。但在许多流动场合，气流都是近似等熵的㊀，即在流动过程中发生的热力过程可认为是绝热的与可逆的。这时，密度和压力即有单值的对应关系：

$$\frac{p}{\rho^k}=常数 \tag{15-2}$$

㊀ 在气体力学中要用到许多热力学知识，读者应有一定的热力学知识或参考有关书籍。

即压力与密度满足等熵热流方程(15-2)。

在讨论气体流动时一般不去注意温度这一参数。如果有需要给出温度场，则状态方程(15-1)可将它与压力及密度联系起来而得到其解。

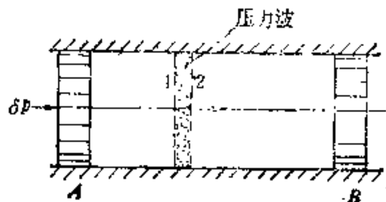


图15-1 压力扰动的传播

可压缩流体与不可压缩流体的根本区别有必要在本章的开头作一下分析。如图15-1所示，设有一等径的直管，内有流体位于两活塞A与B之间。如果在某时刻作用在活塞A上的压力突然有一个增量δp，试分析一下当流体是可压缩与不可压缩的时候，情况将有何不同。如果流体不可压缩，则只要在活塞A上一有了压力扰动δp，则活塞B马上会作出反应而发生移动，在A与B之间就好像有一根推杆一样。这说明在活塞A处产生的压力扰动在同一瞬间即传到活塞B处而不需要传播时间。但如果流体可压缩时情形就不同了：当活塞A处突然有一压力扰动δp后，它开始向右运动，于是紧靠活塞的流体将受到带动也向右运动，而与之相邻的右方流体由于惯性还未运动，两部分之间距离减小，即产生了压缩，流体的密度也将有一个增量或扰动($\delta\rho$)。于是经一段时间间隔相邻的流体压力也上升了Δp，开始向右运动去压缩其右方相邻的流体，同样使密度与压力产生变化。也就是压力与密度的扰动，经过一定的时间一步步向活塞B传去。可见，由流体可压缩，在活塞A处的压力扰动δp要经一段时间间隔才能传播到活塞B处。这种微小的压力扰动在流体中传播就是以波的形式完成的，因而称之为压力波。压力波传播时具有一定的速度，通常以a来表示。如微小压力扰动在空气中的传播速度即为声音在空气中传播的速度，简称音速或声速。声速a不是常数，它随气体的温度的变化而变化。由于压力扰动在气体中的传播是以波的形式出现的，因而其他的扰动量也都以波的形式传播，且小扰动波的传播速度就是声速。

第二节 一元气流的基本方程

由于本章只限于探讨一元定常的理想气体流动，所以气体动力学方程也只给出其一元形式。于是我们沿气体流动的流线或流管来研究。气体是无粘性的，流动为定常的，与时间t无关。于是自变量只有沿流线的一个流动坐标l。在建立方程时认为流动是等熵的，不考虑重力的影响。

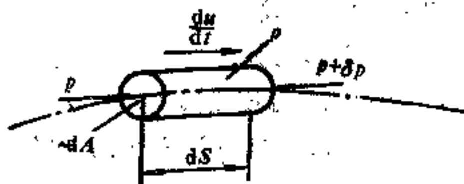


图15-2 一元气流运动分析

如图15-2所示，沿流管取一长为dl，截面为dA的柱形微段，根据牛顿第二定律有：

$$-\frac{dp}{ds}\,dl\,dA=\rho dl\,dA\,\frac{du}{dt}$$

式中$\frac{du}{dt}$是微段气体沿流线的加速度。因流动是定常的，故u只是l的函数，因而有：

$$\frac{du}{dt}=\frac{du}{dl}\,\frac{dl}{dt}=u\,\frac{du}{dl}$$

将之代入前式即有：

$$udu=-\frac{dp}{\rho} \tag{15-3}$$

式(15-3)即为第一个基本方程——运动微分方程。

在定常流动中，流经流管任一截面的质量流量都相同(因质量守恒)，故有

$$m=\rho uA=常量$$

如下改写其形式：

$$\ln m=\ln\rho+\ln u+\ln A=常量$$

取微分：

$$\frac{dm}{m}=\frac{d\rho}{\rho}+\frac{du}{u}+\frac{dA}{A}=0 \tag{15-4}$$

式(15-4)是一元气流的第二个基本方程——连续方程。它表明，沿流管速度，密度及截面的相对变化量的代数和必须等于零。

由于气流是等熵的，故有第三个基本方程：

$$\frac{p}{\rho^k}=常量 \tag{15-4)'$$

这样一来我们就有了三个方程去解三个变量u，p，ρ。

现根据运动微分方程与连续方程分析一下气流的一些基本特性。首先由式(15-3)可知，气体速度的变化与压力的变化符号相反，即速度增大时压力减小，速度减小时压力则增大。另外，在气流中压力的变化会导致密度的改变，且两者符号相同。于是可以断定，在气流中速度增大必然导致密度减小，反之密度则增大。亦即气流加速时必导致体积膨胀。

现在再进一步分析一下速度的变化与密度的变化之间的数量关系。为此令 $dp=\frac{dp}{d\rho}\times d\rho$，并式(15-3)写作：

$$udu=-\frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{\rho}=-a^2\frac{d\rho}{\rho}$$ ㊀

或写成

$$\frac{d\rho}{\rho}=-\left(\frac{u}{a}\right)^2\frac{du}{u}=-M_a^2\frac{du}{u} \tag{15-5}$$

式中$M_a=u/a$叫马赫数，是可压缩流动中的一个非常重要的无量纲判别数（如同以前的雷诺数R_e一样）。

由式(15-5)可知，同样的速度变化，在高速流动中，即M_a值大时，所引起的密度变化也大。而在低速气流里则只引起很小的密度变化。因此可用马赫数M_a的大小来判别是否需要考虑气体的可压缩性。

特别需要注意的是在亚音速气流中，即 $M_a<1$ 时，$|d\rho/\rho|<|du/u|$，即密度的变化比速度的变化小。而在超音速气体中则相反，那时$|d\rho/\rho|>|du/u|$，即密度的变化比速度变化大。这就使流动在亚音速区与超音速区有了本质上的差别。在低速的不可压缩流动中，流

㊀ $a^2=\frac{dp}{d\rho}$在下节给出，暂先用它。

速与流管的截面积成反比，因此我们可以根据流线的疏密来判断速度与压力的变化。但对高速气体来说情况就不太一样，即流速大的地方流管的截面不一定小或流线不一定密。从连续方程只能断言截面A与ρu成反比。因u增大时，ρ减小，故ρu不一定增大。ρu代表单位过流截面的质量流量，常被称之为质流速度。质流速度大者，流管截面积必小，如图15-3所示。质流速度ρu的变化为

$$\frac{\mathrm{d}(\rho u)}{\rho u}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}u}{u}=(1-M_a^2)\frac{\mathrm{d}u}{u} \tag{15-6}$$

由上式可见，在亚音速气流($M_a<1$)中，$\mathrm{d}(\rho u)$与$\mathrm{d}u$同号，即速度增大时质流速度也增大，那时流管截面A减小，这和不可压缩流动中的特性相同。然而在超音速气流中($M_a>1$)，$\mathrm{d}(\rho u)$却与$\mathrm{d}u$异号，即速度增大时ρu反减小，于是截面A增大。这一点也可从连续方程(15-4)得到：

$$\frac{\mathrm{d}A}{A}=-\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}u}{u}\right)=-\frac{\mathrm{d}(\rho u)}{\rho u}=(M_a^2-1)\frac{\mathrm{d}u}{u} \tag{15-6a}$$

由上式知，在$M_a<1$的亚音速气流中，流管截面积的变化$\mathrm{d}A$与流速变化$\mathrm{d}u$异号，而在$M_a>1$的超音速气流中情况正好相反。

在收缩管路中，亚音速气流作加速流动，而超音速气流则作减速流动，两者流速都向音速趋近。在扩张管路中，不论是超音速还是亚音速气流，流速都向远离音速变化。所以气流不论是从亚音速向超音速过渡，还是从超音速向亚音速过渡，流管都是先收缩而后扩张。等于音速的流动叫临界流动，它只能发生在流管截面最小之处，那里的质流速度ρu达到极大值。

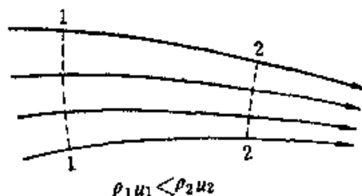


图15-3 流管截面变化与ρu之关系

根据运动微分方程，可以推导出一元定常等熵的理想流动的一个很有用的方程——能量方程。运动微分方程

$$u\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}p}{\rho}$$

可写为

$$\mathrm{d}\left(\frac{u^2}{2}\right)+\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=0$$

根据等熵关系有：

$$\frac{p^{\frac{1}{k}}}{\rho}=c_1\ （常量）$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=c_1\frac{\mathrm{d}p}{p^{1/k}}=c_1\frac{k}{k-1}\mathrm{d}\left(p^{\frac{k-1}{k}}\right)$$

故有

$$\mathrm{d}\left(\frac{u^2}{2}\right)-c_1\frac{k}{k-1}\mathrm{d}\left(p^{\frac{k-1}{k}}\right)=0$$

沿流线积分上式便得：

$$\frac{u^2}{2}+c_1\frac{k}{k-1}p^{\frac{k-1}{k}}=\text{常数}$$

将前面的c_1值代入后得：

$$\frac{u^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}=\text{常数} \tag{15-7}$$

式(15-7)称作能量方程，也称作气体的伯努里方程。当$k\to\infty$时（不可压缩）即得以前的不可压缩流体的伯努里方程

如果气流在某点速度为零即$u=0$，那时的压力为p_0，密度为ρ_0，则根据能量方程有：

$$\frac{u^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}=\frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}=\text{常数} \tag{15-8}$$

压力p_0与密度ρ_0叫滞止压力与滞止密度。

根据状态方程(15-1)和音速的计算公式，式(15-8)还可以写为：

$$\frac{u^2}{2}+\frac{k}{k-1}gRT=\frac{k}{k-1}gRT_0 \tag{15-8a}$$

以及

$$\frac{u^2}{2}+\frac{a^2}{k-1}=\frac{a_0^2}{k-1} \tag{15-8b}$$

式中的T_0与a_0称为滞止温度和滞止音速。从以上两式可知，当沿流线速度增大时，则温度以及当地音速都下降。p_0，T_0及a_0是气流中温度压力及音速可能有的最大值。

在气流中如果某截面处的流速和当地音速相等了，即$u=a$，$M_a=1$，则称此处的流动为临界流动，发生临界流动的截面称为临界截面，其上的流动参数叫临界参数，记为a_*，p_*，ρ_*，及T_*。令式(15-8b)中之$u=a=a_*$，即可得临界参数和滞止参数之间的关系：

$$\frac{a_*}{a_0}=\sqrt{\frac{T_*}{T_0}}=\sqrt{\frac{2}{k+1}} \tag{15-9}$$

根据等熵关系有 $\frac{p_*}{p_0}=\left(\frac{\rho_*}{\rho_0}\right)^k=\left(\frac{T_*}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}$，因而

$$\left.\begin{aligned}\frac{p_*}{p_0}&=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}\\ \frac{\rho_*}{\rho_0}&=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}\end{aligned}\right\} \tag{15-9a}$$

空气的$k=1.4$，故对空气而言：

$$\frac{p_*}{p_0}=0.528,\ \frac{\rho_*}{\rho_0}=0.636,\ \frac{T_*}{T_0}=\frac{a_*^2}{a_0^2}=0.831 \tag{15-9b}$$

除滞止参数与临界参数外，在气体力学中还常常提到极限速度这一参数。它表示在理论上气流可达到的最大速度。令式(15-8)中的$p=0$，$\rho=0$，$T=0$和$a=0$，便得极限速度u_{max}与临界音速和滞止音速的关系：

$$u_{max}=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}a_*=\sqrt{\frac{2}{k-1}}a_0 \tag{15-10}$$

此式说明，极限速度的数值只与滞止温度有关，并不直接依赖于滞止压力。

能量方程常写成其无量纲形式。无量纲速度为速度u与当地音速之比，即$\frac{u}{a}=M_a$。用a_0去除式(15-8b)得：

$$\frac{a^2}{a_0^2}=\frac{T}{T_0}=\left[1-\frac{k-1}{2}M_a^2\right]^{-1} \qquad (15\text{-}11)$$

再利用等熵关系得：

$$\frac{p}{p_0}=\left[1+\frac{k-1}{2}M_a^2\right]^{-\frac{k}{k-1}} \qquad (15\text{-}11a)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left[1+\frac{k-1}{2}M_a^2\right]^{-\frac{1}{k-1}} \qquad (15\text{-}11b)$$

上三式即用马赫数表示的能量方程。

用能量方程代替运动微分方程后，气体一元定常等熵流动的基本方程即为式(15-4)所给出的连续方程，式(15-8)所给出的能量方程与式(15-2)所给出的等熵热流方程。用此三个基本方程可求三个气流参数u，p与ρ。

第三节　音速与马赫(Mach)数

前两节我们已经用到了音速和马赫数这两个气体动力学中的重要参数。下面我们来求音速a，并介绍马赫数M在气体动力学中的意义。

如图15-4所示，有一无穷长圆管，截面为单位面积。一静止活塞在某一瞬时t开始运动，运动的速度很小，为δu。活塞的运动导致与之相邻气体的运动，此扰动接着以波的形式继续向前传播，传播的速度为a，扰动面（波面）前面的气体仍为原静止状态，其压力及密度分别为p与ρ。而波面后面的气体却是以速度δu在运动，且受到压缩后压力与密度都已是$p+\delta p$与$\rho+d\rho$，即有了增量δp与$\delta\rho$。设在时间间隔Δt后波面达到直管的1-1断面处。我们将根据流动的连续性（质量守恒）及动量守恒定律来求波面传播速度a。

在截面1-1后面（左面）气体的质量是：

$$m_1=\rho a\Delta t$$

这一质量又可以是：

$$m_2=(\rho+\delta\rho)(a-\delta u)\Delta t$$

上两式中m_1是在t时刻时计算的截面1-1与活塞之间气体的质量，而m_2是在$t+\Delta t$时刻计算的，根据质量守恒应有：

$$m_1=m_2=\text{常量}$$

即

$$(\rho+\delta\rho)\delta u=a\delta\rho \qquad (15\text{-}12)$$

另外根据动量定理又可有

$$\delta p\Delta t=(\rho+\delta\rho)(a-\delta u)\delta u\Delta t \qquad (15\text{-}13)$$

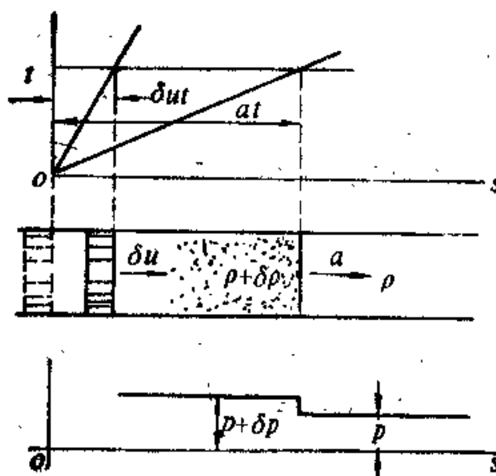


图15-4　音速的推导原理

比较式(15-12)与(15-13)可得

$$\frac{\delta p}{\delta \rho}=(a-\delta u)a$$

由于所考虑的是微小扰动或弱扰动，故$\delta u \ll a$。因此在上式右端的括弧中的δu即可省略，故有

$$\frac{\delta p}{\delta \rho}=a^2$$

所以

$$a=\sqrt{\frac{\delta p}{\delta \rho}}=\sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} \tag{15-14}$$

在弱扰动情况下可认为变化过程为等熵的，即有

$$\frac{p}{\rho^k}=c_1(\text{常量})$$

所以

$$p=c_1\rho^k,\ \frac{\partial p}{\partial \rho}=kc_1\rho^{k-1}=k\frac{p}{\rho}$$

将上式结果代入式（15-14)即得：

$$a=\sqrt{k\frac{p}{\rho}}=\sqrt{kgRT} \tag{15-15}$$

式（15-15）即为弱扰动相对于气体的传播速度，即音速a。由上式可知，音速的大小与气体的绝对温度的平方根成正比。

上面我们是在直管中求出的平面波的传播速度。对空间球面波而言，所推导出的音速表达式（15-15）仍是适用的。不同的只是那时波的强度（振幅）将逐渐减弱而已。

式（15-15）有可能用来推算在空气中音速的大小。

［例15-1］ 试计算当空气温度为15℃时的声音传播速度。

［解］ 由气体性质表可查到15℃时空气的绝热指数$k=1.4$，气体常数$gR=237\text{J/(kg·K)}$。又

$$T=273+t℃=273+15=288\text{K}$$

则根据式（15-15）有

$$\begin{aligned}a&=\sqrt{kgRT}\\&=\sqrt{1.4\times 287\times 288}\\&=340\text{m/s}\end{aligned}$$

我们将举一例来说明音速在可压缩气体运动中之重要性并进而说明由音速而引出的马赫数之重要性。设想一以速度v在可压流体中运动翼型，当它运动时，由之引起的压力扰动将以音速用波的形式向前传播（如图15-5所示）。该压力扰动波会向前传得很远，并因流体的粘性逐渐衰减其强度，同时还“提醒”翼型前方的流体后面有翼型在逼来。流体同时也就作出反应，开始流动，以躲开将要来到的翼型。所以绕过翼型的流线始终是平滑的。从翼型发出压力扰动后经时间间隔Δt，在翼型前方$(a-v)\Delta t$距离地方的流体已受到翼型即将来到的信息。

如果翼型运动速度增加了，情况会如何呢？显然，相对速度$a-v$将减小，于是翼型前方的流体在离翼型很近时才得到它即将来临的信息，才开始运动以躲开即将来临的翼型。那么当翼型的运动的速度达到了音速则情形就变成：翼型前方的流体根本无时间提前获得信息，压

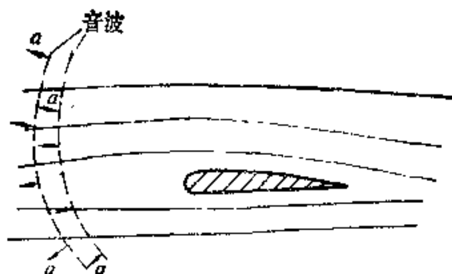


图15-5　翼型产生的音波

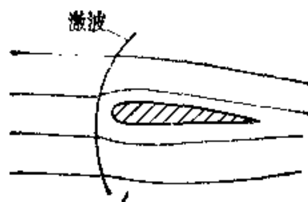


图15-6　翼型前端的弯曲激波

力扰动波与翼型将同时到达。因而直到翼型已经来到流体才开始运动以绕开翼型。这时情形如图15-6所示在翼型前缘外面有个所谓的激波，在该波前面流体完全是静止的，波后面的流体才开始形成一定形状的流线绕过翼型。从相对运动的角度来观察，即站在翼型上观察流动，则流动通过激波时突然减速。在波后流动变为亚音速的。

再来观察一种情况，来看音速在可压缩流体运动中的意义。设有一个点声源以低于音速的速度在静止流体中运动和以大于音速的速度运动（如图15-7所示）。在开始时刻$t=0$有一个声音脉冲产生并立即以当地音速向四方传播。在时刻t_1此声源移动了vt_1的距离。$t=0$时刻发出的声音脉冲波呈圆形，半径为at_1。在t_1时刻又发出声音脉冲。在t_2时刻声源又移动了，共移动的距离为vt_2。t_1时刻发出的声波也呈圆形，半径为$a(t_2-t_1)$，如图15-7a所示。

当声源以亚音速运动时，各时刻声源发出的声波形成一族不相交的偏心圆。位于点A处的观察者会发现，他所听到的脉冲频率比实际发射频率为高。实际上观察者在A点听到的频率是

$$f=f_0/(1-v/a)$$

式中　f_0——移动点声源的脉冲发射频率，这种频率的改变就是常说的多卜勒效应。

当点声源以比声速大的速度运动时，各时刻发射出的声波将相互交叠（图15-7b所示），并且形成一个锥体，半锥角为：

$$\theta=\sin^{-1}(a/v)$$

站在点声源前面A处的观察者将听不到点声源发出的声音脉冲。只有锥体内各点的观察者才会觉察到这个移动的声源。

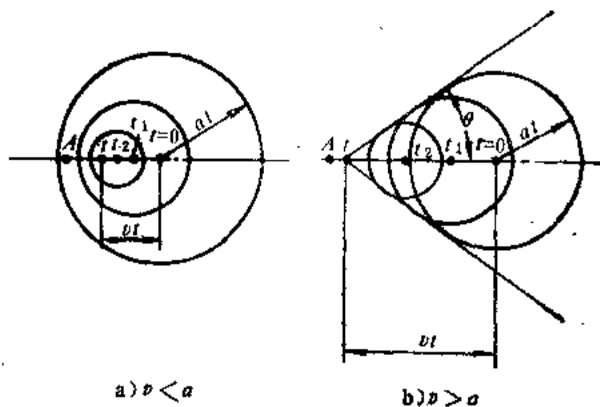


图15-7　移动点声源产生的声音场

由上述的物理过程可以发现，和声音传播及流体可压缩性紧密相关的一个重要参数是比值v/a。该参数在前节已提到，它最初由一位奥地利学者恩斯特·马赫提出的，所以冠以其名，叫马赫数：

$$M_a=v/a \tag{15-16}$$

图15-7b上所画的锥状波面叫马赫波，其半锥角叫马赫角。

马赫数M_a实际的物理含意是流体的惯性力与作用于流体上的弹性力之比。如果马赫数小，流体的惯性力就不足以使流体压缩而形成具有一定弹性力的弹性变形。这时即可认为流

体是不可压缩的。

根据马赫数的数值大小可把可压缩流分为：

$M_a<1$　亚音速流动

$M_a\approx1$　跨音速流动

$M_a>1$　超音速流动

马赫数大于5的流动有时称之为高超音速流动。

［例15-2］　设协和式飞机正以速度$v=1400$km/h在高空飞行，海拔高为12000m，该处气温为-56℃。试问飞行马赫数多大？

［解］　首先来计算当地音速

$$a=\sqrt{kgRT}$$

查表$k=1.4$，$gR=287$J/(kg·K)，$T=273+t=273-56=217$K代入上式得：

$$a=\sqrt{1.4\times287\times217}=295\text{m/s}$$

按米秒计算的飞行速度为：

$$v=1400\times1000/3600=389\text{m/s}$$

因此飞行马赫数为：

$$M_a=\frac{v}{a}=\frac{389}{295}=1.32$$

第四节　变截面管道中的等熵可压缩流动

在第二节的基本方程的分析中已经指明，在变截面管道中的可压缩流体的流动的特点和不可压缩流体截然不同。在不可压缩流动中，如果管道截面先收缩后扩张（文吐里管），则速度先是增大的，在截面最小之处流速达到极大值，压力达到最小值。在扩张段流速则又逐渐下降，压力再回升。而在可压缩流动中，流速与截面的关系则全然不同。截面变化与流速变化的关系是式(15-6a)所给定的：

$$\frac{dA}{A}=(M_a^2-1)\frac{du}{u}\tag{15-16a}$$

该式表明截面的变化dA与流速的变化du之间的关系完全取决于马赫数M_a的值。

在亚音速流情况下，M_a^2-1为负值，由上式可知，截面积减时速度增加，而截面增大时速度减少。

在超音速流的情况下M_a^2-1为正值，因而截面增大速度也增大，截面减小速度也减小。

在跨音速情况下$M_a\approx1$，在dA为零之处不是最大截面就是最小截面。在该截面处流速为超音速的也好，是亚音速也好，其流速不是最大值就是最小值（因du也为零）。图15-8a、b就表示了这两种情况。

现在假设马赫数为1时，情况将如何呢？当$M=1$，而dA不为零，这时du将成为无穷大。这在实际上是不可能的。因dA必须也为零，以使du成为实际可能存在的有限值。

具有d$A=0$截面的流道不是先收缩然后再扩张（图15-8a）就是先扩张然后再收缩（图15-8b）。在先一情况下，若流动一开始是亚音速的，则收缩段上将使流动加速一直到在最小截面处（d$A=0$）成为音速（$M_a=1$）。若流动一开始为超音速的，则收缩段上流动将被减速

一直到在最小截面处($dA=0$) 成为音速 ($M_a=1$)。而在图15-8b那种具有 $dA=0$截面的管道中，不管是哪种流动都不会达到音速：如果流动一开始是亚音速的，则在扩张段上减速一直到最小值。如果流动一开始是超音速的，则在扩张段上加速，使速度更增加一直到最大值。从上面的分析可见，只有在管道的最小截面之处，马赫数才能达到1。这个截面叫喉截面或喉部。要注意的是并非在最小截面之处马赫数必然为1。

一、拉伐尔喷管

现在我们来讨论一种变截面管道——拉伐尔喷管。用此管可产生超音速流。根据前面的讨论，该管应有一段收缩段以使把亚音速流加速。接着要一段喉段产生跨音速流。然后是扩张段以继续加速气流成为超音速的。图15-9所表示的即为拉伐尔喷管示意结构。

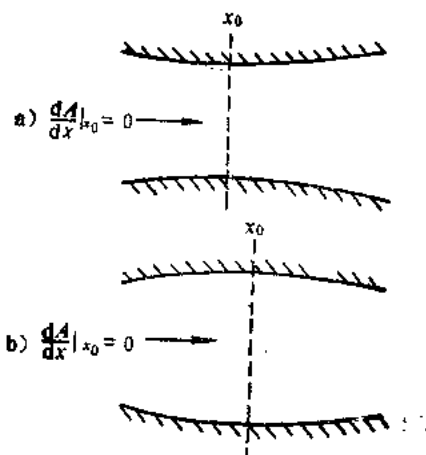


图15-8　具有$dA=0$截面的流道轮廓

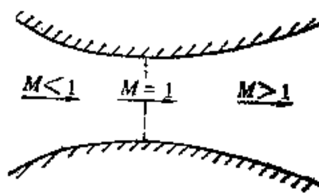


图15-9　拉伐尔喷管

下面分析一下拉伐尔喷管的流动参数与马赫数的关系。根据连续方程有

$$\rho uA=\text{常量}$$

式中的常量总是用马赫数等于1截面处之值给定，即

$$\rho uA=\rho_* u_* A_* \tag{15-16b}$$

各符号的 * 下标表示临界参数，即$M_a=1$时的各参数。式 (15-16) 可写为：

$$\frac{A}{A_*}=\frac{\rho_* u_*}{\rho u}$$

但速度等于马赫数与当地音速的乘积，故上式可写成：

$$\frac{A}{A_*}=\frac{\rho_*}{\rho}\frac{M_{a*}\sqrt{kgRT_*}}{M_a\sqrt{kgRT}}$$

因为$M_*=1$，故有

$$\frac{A}{A_*}=\frac{\rho_*}{\rho}\left(\frac{T_*}{T}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{M_a} \tag{15-17}$$

考虑到拉伐尔喷管中的流动是等熵的，在整个拉伐尔喷管中所有流动参数的滞止值为常量(式15-8) 于是可有：

$$\frac{\rho_*}{\rho}=\left[\frac{1+\frac{k-1}{2}M_a{}^2}{\frac{k+1}{2}}\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

$$\frac{T_*}{T}=\frac{1+\frac{k-1}{2}M_a^2}{\frac{k+1}{2}}$$

将这些式代入式（14-17）得：

$$\frac{A}{A_*}=\frac{1}{M_a}\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M_a^2}{\frac{k+1}{2}}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \tag{15-18}$$

上式给出了马赫数为M_a的某一拉伐尔喷管截面面积与临界截面面积（$M_a=1$处）之比。这个比值和马赫数有关，当然对所有的马赫数该公式都适用，即无论是亚音速，跨音速与超音速都可根据其马赫数来计算该处之截面面积。

［例15-3］ 如果想设计一个超音速风洞，以空气作流动介质，并要求达到$M_a=3$，即风速要为当地音速的三倍，那么在喉部截面取为10cm²时，则实验段（$M_a=3$处）之截面应该多大？

［解］：空气的$k=1.4$，根据式（15-18）应该有：

$$A=\frac{A_*}{M_a}\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M_a^2}{\frac{k+1}{2}}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$=\frac{10}{3}\times\left(\frac{1+\frac{1.4-1}{2}\times 3^2}{\frac{1.4+1}{2}}\right)^{\frac{1.4+1}{2\times(1.4-1)}}\text{cm}^2$$

$$=42.3\text{cm}^2$$

二、拉伐尔喷管的过流量

在设计超音速风洞时要考虑的一个重要数据是其尺寸。尺寸的大小直接影响其过流量，因而影响到所选用的压气系统及压力罐的容量大小以保证风洞可连续工作一定的时间。

计算过流量的最理想截面为其喉部（$M=1$），该处之质量流量为：

$$\dot{m}=\rho_* A_* u_*$$

$$=\rho_* A_*\sqrt{kgRT_*}$$

如果用滞止参数表示$\dot{m}$，就更方便。根据式（15-11）并考虑$M_*=1$，则有：

$$\frac{T_*}{T_0}=\frac{2}{k+1},\qquad \frac{\rho_*}{\rho_0}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

代入前式则得：

$$\dot{m}=\rho_0\sqrt{kgRT_0}\,A_*\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \tag{15-19}$$

通常已知的是滞止温度和滞止压力（即压力罐中的温度及压力）。用理想气体状态方程即可将式（15-19）中的ρ_0用p_0，T_0替换，于是有：

$$\dot{m}=\frac{p_0A_*}{\sqrt{RT_0}}k^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \tag{15-20}$$

对空气而言，$\dot{m}=0.685\frac{p_0A_*}{\sqrt{RT_0}}$ (15-21)

［例15-4］ 一空气风洞之实验段截面面积为225cm²，马赫数为3，温度为－20℃，压力为50kPa。试问该风洞需要多大的质量流量？

［解］ 先计算喉部截面之面积：

$$A_*=AM_a\left(\frac{\frac{k+1}{2}}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$=225\times3\times\left(\frac{\frac{1.4+1}{2}}{1+\frac{1.4-1}{2}\times3^2}\right)^{\frac{1.4+1}{2\times(1.4-1)}}\quad\text{cm}^2$$

$$=53.2\text{cm}^2=0.00532\text{m}^2$$

再计算滞止压力与滞止温度：由式（15-11）有：

$$p_0=p\left(1+\frac{k-1}{2}M_a^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$=50\times\left(1+\frac{1.4-1}{2}\times3^2\right)^{\frac{1.4}{1.4-1}}\quad\text{kPa}$$

$$=1836\text{kPa}$$

$$T_0=T\left(1+\frac{k-1}{2}M_a^2\right)$$

$$=(273-20)\times\left(1+\frac{1.4-1}{2}\times3^2\right)\text{K}$$

$$=708\text{K}$$

于是可得质量流量：

$$\dot{m}=\frac{p_0A_*}{\sqrt{RT_0}}k^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$=\frac{1836\times10^3\times0.00532}{\sqrt{287\times708}}\times\sqrt{1.4}\times\left(\frac{2}{1.4+1}\right)^{\frac{1.4+1}{2\times(1.4-1)}}\quad\text{kg/s}$$

$$=14.8\text{kg/s}$$

三、喷管流动的分类

下面定性的讨论一下拉伐尔喷管中压力的分布。图15-10上画出了拉伐尔喷管及沿该管之马赫数M与压力p的分布曲线。在拉伐尔喷管进口处，因马赫数很小（近似认为是零），其压力可近似认为是滞止值p_0。当截面逐渐收缩后，马赫数逐渐上升，压力逐渐下降。到了临界截面（喉部）时，压力与滞止压力的比值为：

$$\frac{p_*}{p_0}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

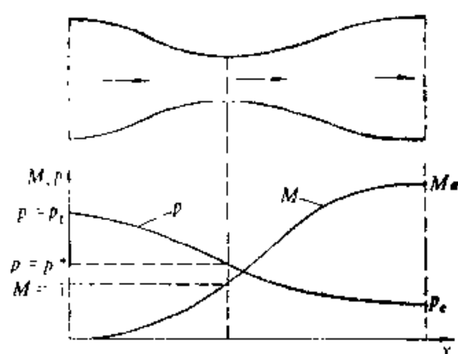


图15-10 拉伐尔喷管中M与p之分布

此比值叫临界压力比。对空气而言$p_*/p_0=0.528$。之所以叫临界压力比的原因是：为在拉伐尔喷管中达到音速，其出口压力与滞止压力之比非得小于此比值不可。过了喉部后，压力将继续下降。到喷管出口时压力将达到出口截面比所对应的出口压力值。马赫数也将单调的沿管路上升。

现在就会出现这样一个问题：当拉伐尔喷管出口压力$p_{出}$（按截面比计算出的）与喷管的背压（喷管射流所流入介质或环境的压力）$p_{背}$不相等时将会遇到什么样的物理现象？首先假设$p_{出}>p_{背}$，则如图15-11a所示的，在喷管出口将会出现一所谓的膨胀波。该波使流动转向，继续扩大截面与加速，并且使压力降到背压。这种出口压力大于背压的喷管叫欠膨胀喷管。

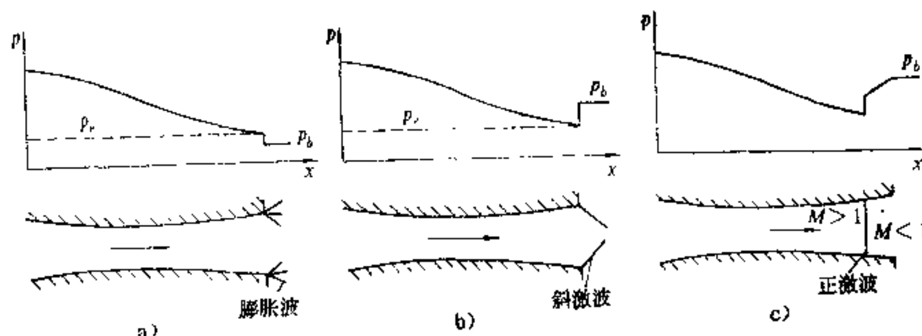


图15-11 喷管流动的分类

如果喷管的出口压力$p_{出}$小于喷管的背压，这时将会出现激波，如图15-11b、c所示。如果压力差不太大，则在喷管出口有一斜激波，超音速气流经此斜激波突变为亚音速气流，压力变为背压（图15-11b）。如果压差过大，不足以被斜激波所接纳与转变，则一个发生在喷管内部的正激波（图15-11c）将使该处的压力有个突然跃升（这时之激波前后的压差还不致过大），并同时使超音速流动变为亚音速流。然后随着截面的继续扩大，压力再继续上升到出口处的背压值（也是喷管出口压力值）。这样的喷管，即其按出口截面计算出的出口压力小于喷管背压的喷管叫过膨胀喷管。

最后，当一喷管出口压力等于背压时（$p_{出}=p_{背}$），此喷管叫理想喷管。

［例15-5］ 在某一拉伐尔喷管中截面比为4:1的截面处的滞止压力为1.3MPa。喷管中的气流为空气流。如果喷管的背压是100kPa，试问此喷管为哪一类喷管

［解］ 根据式（15-18)来求$A/A_*=4$的截面处之马赫数：

$$4=\frac{1}{M_a}\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M_a^2}{\frac{k+1}{2}}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$=\frac{1}{M_a}\left(\frac{1+\frac{1.4-1}{2}M_a^2}{\frac{1.4+1}{2}}\right)^{\frac{1.4+1}{2\times(1.4-1)}}$$

$$=\frac{1}{M_a}\left[\frac{1+0.2M_a^2}{1.2}\right]^3$$

故有
$$2M_a=\frac{1+0.6M_a^2+0.12M_a^4+0.008M_a^6}{1.728}$$

用试算法可计算出马赫数：

$$M_a=2.94$$

又根据式 (15-11a) 可求出口截面处之压力与滞止压力之比：

$$\frac{p}{p_0}=\left[1+\frac{k-1}{2}M_a^2\right]^{-\frac{k}{k-1}}$$

$$=\left[1+\frac{1.4-1}{2}\times 2.94^2\right]^{-\frac{1.4}{1.4-1}}$$

$$=0.0298$$

故
$$p=0.0298p_0$$
$$=0.0298\times 1.3\ \text{MPa}$$
$$=0.0387\text{MPa}$$
$$=38.7\text{kPa}$$

故
$$p<p_{背}(=100\text{kPa})$$

所以此喷管为过膨胀喷管。

第五节　管道中之绝热流动

液体在管道中的流动我们在前面不可压缩流动中已研究的比较彻底。而可压缩流体在管道中的流动讨论起来就比较困难。其原因是可压缩流动中的密度与压力都还和温度有关系。使问题复杂化的还有管壁摩擦与热传导不能只简单的归结为一个热损耗参数。在管道流动中常讨论两类问题：一是在绝缘管路中的流动。那时流体可作为一绝热系统考虑。另一个是在较长管路中的流动，那时的流动可当作等温流动来处理。我们这里只讨论前一种流动。

一、　绝热流动

我们还是从基本方程讨论起。对于一管路中的均匀流动（管道截面不变）质量守恒方程为

$$\rho u=常量$$

或写成微分形式：
$$\frac{\mathrm{d}u}{u}+\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=0 \qquad (15\text{-}22)$$

能量方程为式(15-7)

$$\frac{u^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}=常量$$

由热力学可知，

$$k=\frac{c_p}{c_v}\ ,\ \ c_p-c_v=R,\ \ h=c_pT$$

$$\frac{k}{k-1}=\frac{c_p}{R},\qquad \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}=\frac{c_p}{R}\frac{p}{\rho}=c_pT=h$$

所以能量方程可写成：

$$\frac{u^2}{2}+h=\text{常量}$$

式中h为流动的焓，$h=c_pT$。上式的微分形式为：

$$\frac{kR}{k-1}\mathrm{d}T+u\mathrm{d}u=0 \tag{15-23}$$

再来看动量守恒方程。如图15-12所示的一段长为Δx的管道中的流动。所取控制体各面上的流动参数如图所示。根据动量定理可有：

$$A[p-(p+\Delta p)]-\tau_0c\Delta x=\rho uA(-u+u+\Delta u) \tag{15-24}$$

式中　c——管道截面之周长；

τ_0——管壁切应力。

引用达西摩擦系数则有

$$\tau_0=\frac{1}{8}f\rho u^2 \tag{15-25}$$

将式(15-25)简化后即可写出动量方程的微分形式如下：

$$\rho u\mathrm{d}u+\mathrm{d}p+\frac{f\rho u^2}{2D}\mathrm{d}x=0 \tag{15-26}$$

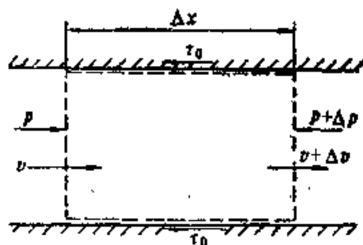


图15-12　管道中的绝对流动

式中　D——管道直径。

二、沿管长的马赫数分布

现在我们将前面各守恒方程与状态方程联系起来。式(15-1)中之gRT可换成a^2/k，故

$$\frac{p}{\rho}=gRT=\frac{a^2}{k}$$

将式(15-25)各项除以p，并把ρ用上式关系用其他参数替换之后得：

$$kM_1^2\frac{\mathrm{d}u}{u}+\frac{\mathrm{d}p}{p}+\frac{kfM^2}{2D}\mathrm{d}x=0 \tag{15-27}$$

状态方程之微分形式为：

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}T}{T} \tag{15-28}$$

用连续方程(15-22)将ρ用u代替，用能量方程当把上式代入动量方程(15-26)时可得：

$$(M_1^2-1)\frac{\mathrm{d}u}{u}+\frac{kfM_1^2}{2D}\mathrm{d}x=0 \tag{15-29}$$

又马赫数可写成如下形式：

$$M_a = u/(kgRT)^{\frac{1}{2}}$$

写成微分形式为：

$$\frac{\mathrm{d}M_a}{M_a} = \frac{\mathrm{d}u}{u} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}T}{T} \tag{15-30}$$

再用式(15-23)将上式中之T替换则有：

$$\frac{\mathrm{d}M_a}{M_a} = \frac{\mathrm{d}u}{u}\left[1 + \frac{(k-1)M_a^2}{2}\right] \tag{15-31}$$

用上式将式(15-29)中之u替换得

$$\frac{(1-M_a^2)\mathrm{d}M_a}{M_a^3\{1+[(k-1)/2]M_a^2\}} = \frac{kf\mathrm{d}x}{2D} \tag{15-32}$$

上式即给出了马赫数与管长的微分方程。由此式可知，如果流动是亚音速的，则有$\mathrm{d}M_a/\mathrm{d}x>0$，因而沿管道马赫数是递增的。反之，若流动是超音速的，$\mathrm{d}M_a/\mathrm{d}x$就小于零，因而沿管路马赫数为递减的。可见壁面的摩擦效应总是使流动的马赫数趋向1。一个管路中的流动永远不可能从亚音速转变为超音速。一开始是亚音速的流动，其马赫数最多只能达到1，而且只可能在管路末端达到。而一开始为超音速的管流，则可以经过激波在管路内变为亚音速的。

为求马赫数沿管路长度上的分布，应把式(15-32)积分，在积分时认为等式右端表达式中的达西摩擦系数f为一沿整个管路的平均值$\bar{f}$(实际上f沿管路变化不太大)。等式左端表达式可分为部分分数之和，于是有：

$$\left[\frac{1}{M_a^3} - \frac{k+1}{2M_a} + \frac{(k+1)(k-1)M_a}{4\left(1+\frac{k-1}{2}M_a^2\right)}\right]\mathrm{d}M_a = \frac{k\bar{f}\mathrm{d}x}{2D} \tag{15-33}$$

积分后得：

$$\frac{-1}{2M_a^2} - \frac{k+1}{2}\ln M_a + \frac{k+1}{4}\ln\left(1+\frac{k-1}{2}M_a^2\right) = \frac{k\bar{f}x}{2D} + c \tag{15-34}$$

式中　c——积分常数，可用定义一个x_*来给定之。x_*对应$M_a=1$的管路之长。所以

$$c = \frac{-k\bar{f}x_*}{2D} - \frac{1}{2} + \frac{k+1}{4}\ln\left(\frac{k+1}{2}\right) \tag{15-35}$$

将c代入式(15-34)得：

$$\frac{1-M_a^2}{kM_a^2} + \frac{k+1}{2k}\ln\left[\frac{(k+1)M_a^2}{2+(k-1)M_a^2}\right] = \frac{\bar{f}(x_* - x_M)}{D} \tag{15-36}$$

式中　x_M——对应马赫数M_a的管长坐标。

［例15-6］　管路中一绝热的均匀空气流动之初始处马赫数$M_a=0.2$，平均摩擦系数$\bar{f}=0.015$。试计算出从初始点开始到管长为直径的几倍之处流动达到音速和在何处之马赫数为0.8

［解］　将$M_a=0.2$，$k=1.4$代入式(15-36)得：

$$\frac{\bar{f}(x_* - x_{0.2})}{D} = 14.53$$

故 $$\frac{x_*-x_{0.2}}{D}=\frac{14.53}{\bar{f}}=\frac{14.53}{0.015}=969$$

又将$M=0.8$代入式(15-36)得：

$$\frac{\bar{f}(x_*-x_{0.8})}{D}=0.07$$

故 $$\frac{\bar{f}(x_{0.8}-x_{0.2})}{D}=\frac{\bar{f}(x_*-x_{0.2})}{D}-\frac{\bar{f}(x_*-x_{0.8})}{D}$$

$$=14.53-0.07=14.46$$

所以有 $$\frac{x_{0.8}-x_{0.2}}{D}=\frac{14.46}{\bar{f}}=\frac{14.46}{0.015}=964$$

三、沿管长的压力分布

式(15-28)给出了求压力的微分方程：

$$\frac{dp}{p}=-\frac{du}{u}\left[1+(k-1)M_a^2\right]$$

用式(15-31)可将上式改写如下：

$$\frac{dp}{p}=-\frac{dM_a}{M_a}\left[\frac{1+(k-1)M_a^2}{1+\frac{k-1}{2}M_a^2}\right] \tag{15-37}$$

从此式可知$dp/dM_a<0$，即压力随马赫数的增大而减小或随马赫数的减小而增大。考虑前面所讨论的马赫数沿管长的分布可知，对管中的亚音速流而言，沿管长压力是降低的，上式中负的压力梯度（沿管长dM_a为正）可保证存在一个合力可以克服管壁的摩擦，以使流动加速。

将式(15-37)右端方括号中之分式分为部分分数和并除以M_a以后得：

$$\frac{dp}{p}=\left[-\frac{1}{M_a}-\frac{\frac{k-1}{2}M_a}{1+\frac{k-1}{2}M_a^2}\right]dM_a \tag{15-38}$$

将上式积分得：

$$\ln p=-\ln M_a-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{k-1}{2}M_a^2\right)+c \tag{15-39}$$

积分常数c可用$M_a=1$时$p=p_*$决定，故

$$\ln p_*=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{k+1}{2}\right)+c$$

$$c=\ln p_*+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{k+1}{2}\right)$$

将c代回式(15-39)得：

$$\frac{p_M}{p_*}=\frac{1}{M_a}\left(\frac{k+1}{2+(k-1)M_a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{15-40}$$

式中 p_M——对应马赫数为M_a之处的压力。

[例15-7] 空气以每60m/s的速度流进一直径为5cm的一般钢管。空气的压力与温度为

1MPa和100℃。试求距离管进口50m处之马赫数与压力。

［解］ 先求钢管的管壁摩擦系数f：

查表可知，$\mu=2.28\times10^{-5}\text{N}\cdot\text{s/m}^2$。又由理想气体状态方程可知：

$$\rho=\frac{p}{gRT}$$

$$=\frac{10^6}{287\times(273+100)}=9.34\text{kg/m}^3$$

于是可得流动的雷诺数为：

$$R_e=\frac{\rho vd}{\mu}=\frac{9.34\times60\times0.05}{2.28\times10^{-5}}=1.23\times10^6$$

对一般钢管而言$k_s/d=0.001$，于是可得达西摩擦系数：$f=0.0195$

进口的音速为

$$a=\sqrt{kgRT}$$

$$=\sqrt{1.4\times287\times373}$$

$$=386\text{m/s}$$

马赫数为 $M_a=\frac{v}{a}=\frac{60}{386}=0.16$

由式(15-36)可算出

$$\frac{f(x_*-x_{0.16})}{d}=24$$

$$\frac{f(x_M-x_{0.16})}{d}=\frac{f(x_*-x_{0.16})}{d}-\frac{f(x_*-x_M)}{d}$$

所以 $$\frac{f(x_*-x_M)}{d}=24-\frac{0.0195\times50}{0.05}=4.5$$

用式(15-36)试算可知该处对应的马赫数为

$$M_a=0.32$$

利用式(15-40)可得：

$$\frac{p_{0.32}}{p_{0.16}}=\frac{p_{0.32}}{p_*}\cdot\frac{p_*}{p_{0.16}}=\frac{3.4}{6.8}=0.5$$

故 $$p=p_{0.32}=0.5p_{0.16}$$

$$=0.5\times10^6=500\text{kPa}$$

习 题 十 五

15-1 试求在20℃的氦气中音速为多大? (1005m/s)

15-2 试问声音在15℃的氦气中传播的速度比在同温度的氮气中快多少? (650.5m/s)

15-3 一飞机在海面附近(15℃)以速度800km/h飞行。如果该飞机以同样的马赫数在温度为-40℃的高空飞行，试问该飞机的飞行速度多大? (719.3km/h)

15-4 一物体位于一空气流中。空气流的压力（绝对）为200kPa，温度为20℃，流速为2 m/s，试问在物体上的驻点处，压力为多大? (251.8kPa)

15-5 氧气从一个温度为200℃，压力为300kPa（绝对）的大容器中流出。如果流动为等熵的，试计

算在马赫数为0.8之处气流的压力，速度与温度。 (196.8kPa; 312.5m/s; 419.3K)

15-6 氮气从一个温度为60℃，压力为500kPa的容器中流向管路中直径为4cm的截面，在该截面处流速为300m/s，设流动是等熵的，试求该截面处的温度，压力，马赫数与质量流量。

(289.8K; 481.6kPa; 0.231; 0.038kg/s)。

15-7 在氮气流动的管中有一正激波发生在某截面之处。该处流速为500m/s，温度为－40℃，压力为7.kPa，试求激波后之马赫数，压力与温度。 (0.665; 200kPa; 325K)

参考文献

[1] Prandtl, L and Tietjens, O.G.«Fundamentals of Hydro-and Aeromechanics».1934

[2] Prandtl, L and Tietjens, O.G.«Applied Hydro-and Aero mechanics».1957

[3] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе.«Теоретическая Гидро-Механика».1968

[4] 吴望一.流体力学.北京：北京大学出版社，1983

[5] Н.З.富兰凯尔.水力学.北京：人民教育出版社，1962

[6] 毛致清等.流体力学.北京：中国工业出版社，1962

[7] 刘天宝等.流体力学及叶栅理论.北京：机械工业出版社，1983

[8] 查森.流体力学基础及泵的水力设计.镇江：江苏工学院水机教研室，1983

[9] 高建铭、姚志民.水轮机的水力计算.北京：电力工业出版社，1981

[10] А.Ю.Колтон等.水轮机原理与流体动力学计算基础.北京：中国工业出版社，1963